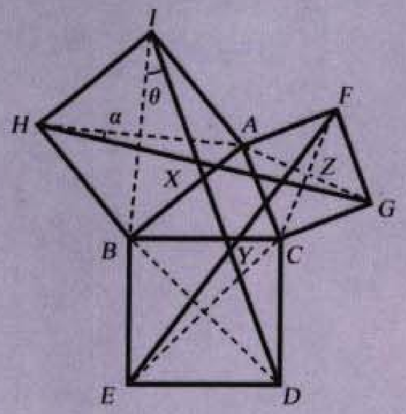
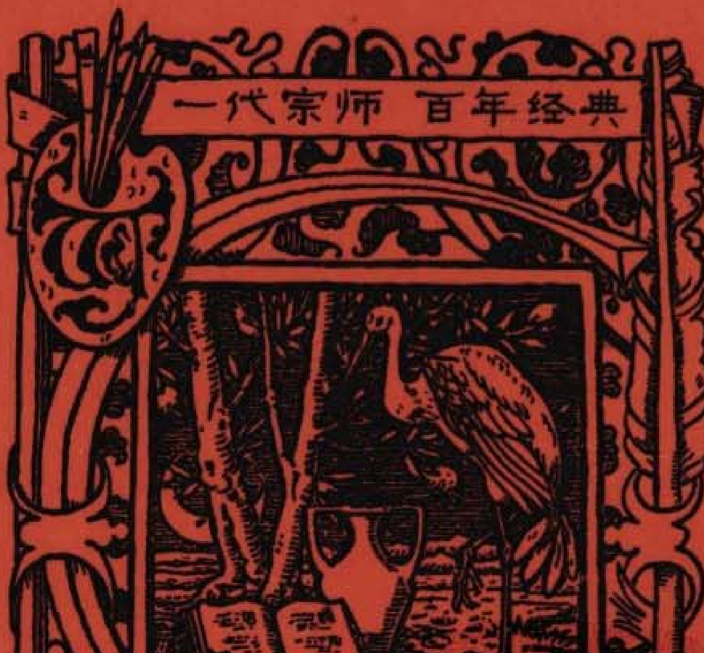


初等数学复习及研究(平面几何)

梁绍鸿　编著

CHUDENG SHUXUE
FUXI JI YANJIU
(PINGMIAN JIHE)



哈爾濱工業大學出版社



刘培杰
数学工作室



梁绍鸿先生

初中文凭　大学教授
一生坎坷　英年早逝
术有专攻　博大精深
昔日风行　洛阳纸贵
尘封经典　堪称观止

策划编辑　刘培杰
责任编辑　唐　蕾
封面设计　孙茵艾

上架建议：初等数学／数学奥林匹克／科普

ISBN 978-7-5603-2735-8
9 787560 327358 >
定价 58.00 元

CHUDENG SHUXUE FUXI JI YANJIU (PINGMIAN JIHE)

初等数学

复习及研究(平面几何)

梁绍鸿　编著

PDG

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书原为师范院校开设的《平面几何》课程的试用教材，以平面几何的复习及研究为主要内容。此次为了满足需要而重新排版印刷的。

本书可作为师范院校数学系的教学参考书，也可作为中学数学教师的教学参考书，还可作为数学竞赛培训用书。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学复习及研究.平面几何/.梁绍鸿著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-5603-2735-8

Ⅰ.初… Ⅱ.梁… Ⅲ.①初等数学-教学研究-师范大学-教材 ②平面几何-教学研究-师范大学-教材 Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 098293 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 唐 蕾
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 37 总字数 647 千字
版 次 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2735-8
印 数 1~3 000 册
定 价 58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

序　言

大哉几何之为用

在数学的大花园里，几何是最美丽的部分.它既有优美的图形，令人赏心悦目；又有众多的问题，供人思考探索.它的论证严谨而优雅，命题美丽而精致.入门不难，魅力无限，因此吸引了大批业余的数学爱好者(包括叱咤风云的拿破仑一世)，在这里大显身手.一些历史上有名的大数学家，像费马(Fermat)、帕斯卡(Pascal)、牛顿(Newton)、欧拉(Euler)、高斯(Gauss)他们，也禁不住在这里流连驻足，为花园增添奇葩.

伟大的物理学家爱因斯坦(Einstein)在《自述》中曾这样回忆道：

> “在我12岁时，我经历了另一种性质完全不同的惊奇：这是在一个学年开始时，当我得到一本关于欧几里得平面几何的小书时所经历的.这本书里有许多断言，比如，三角形的三条高交于一点，它们本身虽然并不是显而易见的，但是可以很可靠地加以证明，以致任何怀疑似乎都不可能.这种明晰性和可靠性给我造成了一种难以形容的印象.……我记得在这本神圣的几何学小书到我手中以前，有位叔叔

曾经把毕达哥拉斯定理告诉了我.经过艰巨的努力以后,我根据三角形的相似性成功地'证明了'这条定理.……对于第一次经验到它的人来说,在纯粹思维中竟能达到如此可靠而又纯粹的程度,就像希腊人在几何学中第一次告诉我们的那样,是足够令人惊讶的了."

(《爱因斯坦文集(第一卷)》湖南科学技术出版社)

无独有偶,不久前在上海文汇讲堂上,华裔著名数学家菲尔兹奖得主丘成桐教授也再次力挺平面几何.他说:"我本人对数学的兴趣是从平面几何开始的.念平面几何,由公理导出很多有趣的定理,我觉得很有意义.现在的学生不见得愿意去推理,怎么引发他们做这个事情,我想是很重要的事情."(《文汇报》2008年5月30日第4版)

面对平面几何世界这笔丰厚的遗产,难怪H·G·弗德会说出这样的话:"谁看不起欧氏几何,谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡."几何学的特点之一是其历史的悠久.早在古希腊时代,几何学就逐渐形成一门独立的学科.以泰勒斯(Thales)为首的爱奥尼亚学派,其贡献是开始了几何命题的证明,为建立几何的理论形式迈出了第一步.其后的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派,他们研究直线形,将数学从具体的事物中抽象出来.到了古典时期,经欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius)等人的发扬,几何学可谓已蔚为大观.欧几里得的《几何原本》,是用公理方法最早建立起演绎的数学体系的典范,影响十分深远,堪称数学最有代表性的经典之一.平面欧几里得几何学,就算从欧几里得算起,也已经有两千多年的历史.

几何学的特点之二是其内容的丰富.美国数学史家E·T·贝尔(E.T.Bell)说过:"几何学的浩瀚的文献比算术和代数的加在一起还要多,其广泛的程度至少和分析的文献相当,这是比数学的其他部门更有意思的、然而是半遗忘的东西组成的丰富的宝库,但是匆忙的一代人无暇去欣赏它."整个欧氏几何确实像是一座丰富的宝藏,经过两千多年的采掘,大部分菁华已经落入人类的手中.到了一个多世纪前,又涌现出了一大批新的瑰宝,发现了数以百计的优美定理,形成了所谓的近代欧氏几何学.

近代欧氏几何学,又称"综合的Euclid几何学",它起源于19世纪后半叶.1873年法国人勒穆瓦纳(Lemoine)在里昂学术奖励会开幕式上宣读了题为《三角形的奇异点及其性质》的论文,为其滥觞.后又经格雷贝(Grebe)、卡塔兰(Catalan)、马蒂厄(Mathieu)、施勒米尔希(Schlomilch)、诺伊贝格(Neuberg)、布罗卡尔(Brocard)、泰勒(Taylor)、凯西(Casey)等诸人的研究,把它推向了极致,当时

曾经繁盛一时，到20世纪初才逐渐衰替．其内容包括逆平行线、等角共轭、反演、陪位重心、Brocard点、Brocard椭圆、Brocard圆、第一Brocard三角形、三乘比圆、余弦圆、Taylor圆、Tucker圆系、Schoute圆系等．正如M·克莱因(M.Kline)在《古今数学思想》中所指出的："这些成果，或许重要性不大，然而显示出这门古老学科的新的主题和几乎无穷无尽的丰富多彩．"

然而，数学也与服装一样，讲究时尚．"20世纪的几何学家早就虔诚地把这些珍品送进了几何博物馆，历史的尘埃很快地把这些珍品的光泽湮没"(贝尔．《数学的发展》，第323页)．随着时间的推移，几何在上个世纪的发展遭受挫折，曾一度步入低谷．布尔巴基学派的代表人物之一狄多涅(Dieudonne)，在《我们应该讲授新数学吗?》一文中提出过"欧几里得滚蛋"的说法，试图动摇欧氏几何在数学课程中的基础地位，其影响面极广，以致在一些西方国家课程改革中欧氏几何体系不复存在，而被其他的一些结构观念所取代．但他的主张当即就遭到许多人的非议，引起了激烈的争论．法国数学家托姆(Thom，突变理论的创始人，拓扑学家，菲尔兹奖获得者)认为"几何思维可说是人类理性活动的正常发展中不能省略的阶段"，并建议恢复欧氏几何体系的教学．经过近半个世纪来的实践和反思，人们对此有了重新认识．1995年《美国数学月刊》刊出了《三角形几何学的兴起、衰落和可能的东山再起：微型历史》一文，全面阐述了"一个被历史的尘埃和灰烬所掩埋的科目能够东山再起吗?"这一饶有意趣的议题，并得出了正面的回答．作者最后坚定地指出：三角形几何过去是为欧几里得精神作证明的实践的基地，如今已变成了决定性、证明和发现定理策略的实验基地．由计算机带来的三角形几何的变革，以及其他领域中的这种变革，已经重新证实和加强了人类在"做数学"美妙活动中的根本作用．

梁绍鸿先生的这部《初等数学复习及研究(平面几何)》，就是国内初等几何学方面的一部集大成之著．它初版于1958年11月，曾作为高等师范院校开设的平面几何课程的通用教材，风行大江南北，培育出了一大批基础扎实的中学数学教师．

学习一门学问，最为有效的方法之一就是直接接触经典．

这里所谓的"经典"，指的是这门学科中众所公认的、内容久经考验的出色的著作．梁先生的这部著作，就堪称这门学科足具代表性的经典之作．

刘培杰数学工作室在这部杰作初版面世50年后又推出其新版，无疑是经典几何这门学科在中国得以复兴的重要标志．

数年前，笔者曾怀着景仰的心情，来到北京师范学院内一处僻静的教工宿舍，这里曾是梁绍鸿先生5的旧居．老夫人还健在，与我谈起梁先生生前的寂

寞,找不到与他探讨问题者.当时他那幢楼中有个女孩子上初中了,梁先生特别高兴,说以后就会有人来问他几何问题了.

古来圣贤皆寂寞,也许正应验了曲高和寡这句成语吧.在这寂寞中所透出的那份苍凉的美丽,是否能让人联想起那个时代知识分子特有的苦境呢?梁先生的人生道路应该说也是坎坷的.早年自学成才,自刻长篇几何论著《朋力点》,印刷发行后方被人识……20世纪50年代初经傅种孙和华罗庚等前辈的提携,才得以从广西百色调往北京师范大学,最终成为一名大学副教授.1952年辅仁大学与北京师大合并后,数学系共有教师22人,其中教授有傅种孙、张禾瑞、魏庚人等5人,副教授有赵慈庚等3人,讲师有:王世强、钟善基、梁绍鸿等4人,助教有:吴品三、刘绍学、严士健、郝炳新等10人,在如此高手云集之地,一个自学者能跻身其间,足见其功力不凡.

不过在经典几何步入低谷的20世纪后半叶,这部著作仅被作为师范院校的普通教材,虽曾广为流传,还不可算有着"寂寞的命运".如1978年曾以粗糙的纸张多次加印,数量达百万之巨,迄今还不时能在旧书店中见到.但另一方面平面几何教与学也确实越来越不受重视,相关课程逐年减缩,以至梁先生晚年改为到外系讲授高等数学去了.在1979年7月29日*,他因突发高血压而过早地离世,享年62年岁.

不过知音总还是会有的,就在梁先生的有生之年,当时安徽省马鞍山市一位十几岁的青年朋友登门前去拜访,将这部经典中的习题全部演绎推算了一遍,后来还通过一家出版社得以出版面世.这位青年就是后来我国数学奥林匹克的高级教练、目前就任深圳市教委教研室主任的尚强兄.

当今,借助网络,越来越多的人意识到这书的价值所在了,开始细加品读,渐渐兴起了一股网络上的读书热潮.例如,今年初,我结识了一位仅读初二的少年朋友,外号叫 frankvista 的,虽尚未与之谋面,但通过邮件不时互相沟通研读梁书及其习题的心得.不久前他甚至独立得到这样一条深刻优美而属于射影几何范畴的命题:"与四条固定直线相截所得交比为定值的动直线,必属于一条与这四条定直线同时相切的二次曲线的切线."处于这等年龄,就能有如此独到的创获,可称得上是神奇了,但他背后苦苦啃读梁书,故实亦不可谓非此书之功.倘若梁先生地下有知,必会为这等后生才子作知己而欣慰吧!

而直至20世纪末,还有一些自命不凡的人打着种种旗号,拣起20世纪60年代以失败而告终的所谓"新数学运动"的唾余,试图将平面几何内容"请出"义

* 原文写的是1981年,经刘培杰与梁先生之长女梁映森电话核实是1979年7月29日.

务教育,以为本着“大众数学”的思路,就可以不让公民掌握数学中的公理化思想.几何的严谨性和明晰性遭到了强暴的摈弃,一些不伦不类的实验手段和含糊不清的说理模式被堂而皇之地“请入”殿堂,取代了数学中的论证和推理.与此同时,一些重要的几何概念和优美的定理被大量删削,真可谓是“黄钟毁弃,瓦釜雷鸣”.甚至连“直径所对的圆周角是直角”这样的最基本的几何遗产也不能幸免,被某些新编教材剔除在外.以致学生对古希腊人就已掌握的数学常识都不具备,不知道严密论证究竟为何物,连解决一些简单习题的基本功夫都未能学到手.这真是对现行教育制度的一种莫大讽刺.殊不知弃亲忘本、轻视几何、拾人牙慧以为时髦等这一系列陈旧的做法和观念已大大落后于形势的发展.

在20世纪末高新技术发展的推动下,几何学原理得到了空前的应用.无论是在CT扫描、核磁共振等医疗成像技术上,还是在机器人、光盘、传真、无线电话、高清晰度电视等最新电子产品上,都广泛采用了传统的和现代的几何学理论.在人类进入电子信息社会的今天,几何学对于人类社会发展的贡献越来越大.

1998年美国科学年会上,学者们一致认为21世纪的教育应把几何学放在头等重要的地位.硅谷的马克斯韦尔(Maxwell)等人甚至喊出“几何学万岁”的口号.与会科学家和教育学家大都认为,21世纪教育的一个重要原则是,学校传授给下一代的将不只是知识,更重要的是技能.几何学具有较强的直观效果,有助于提高学生认识事物的能力,应当成为自然科学教育大纲中的首选和重点内容.新泽西州普林斯顿大学数学系的约翰·康威(J.H.Conway)说,几何学早先是大学的课程,现在几何学的许多内容放到中学来教授,其实,最简单的几何学内容完全可以放到小学甚至学前班来教授.他认为应当让孩子们从小接触、了解、认识、熟悉几何这种形象数学,进而从小养成认识事物和形象思维的习惯.华盛顿大学数学系的詹姆斯·金说,他们在华盛顿州帕克市一些中学进行的几何学教学实验表明,几何学教学引进电脑后效果更佳,因为用电脑演示复杂的图形变化过程可以带给学生“看得见的动态立体形象”,而传统方法则要求学生进行抽象思维.

因此,我们认为,面对高科技信息时代所带来的机遇,在现行教育中恢复和加强欧氏几何体系的教学,不仅必要,而且完全有这种可能.

在初等数学中,我觉得如下这种做法是值得提倡的,即问题本身不追求复杂,但不要仅停留于问题表面,以为给出解答就完事了,而应该去做一位“好事之徒”,自已提出深入的课题,并善于把握现象,从中寻出一些好的线索.如果浅

尝辄止，就往往不能深刻体会到初等数学的乐趣所在(国内初等数学研究不够严谨与活跃，我看主要就在于探讨问题还有待更加深入而自觉；而国外，例如德国，似很强调"彻底性"——Grüntlichkeit，这乃是追求学问过程中比较可贵的一方面). 在平面几何中，这种想法往往较为容易得以满足，在这块长满小花小草的园地中，我们不时可以感受到天地宇宙的至美.

但经典几何学也有其自身的弱处. 现在的人们往往多已遗忘其辉煌的昨日，一些曾被人们熟视的概念和结果对今天大部分读者来说却完全是陌生的. 为了将问题说清楚，每次都得解释一大堆的东西，譬如"等角共轭"、"类似重心"、"Brocard 点"、"Nagel 点"……总之，它也许只能作为一种业余的爱好，且甘苦相较，兴许苦还稍占上风，它于功利可谓毫无裨益，仅有孤芳自赏的喜悦，对于一般的爱好者而言是否情愿呢?

说到底，还是为了美——唯有这种对美的执着，才会将自己苦苦驻留在那块果实不丰，只是长满野花的杂园，她的美丽芬芳确也足以让人痴迷其中了.

然而，对于我们这批爱好几何者而言，在这块园地中还意外地得到了另外一种慰藉. 一些并不相识的陌生人，正由于这种共同的爱好，而走到了一块儿，彼此间渐成为知心好友，让大家不再感觉得十分孤独，这份乐趣，却又是在别处难以找寻到的.

数学是一门博大精深的学问，学习它的最好方法是自己去发现它；如果浅尝辄止，就不能深刻体会数学中的乐趣所在；唯有对美的执著追求，才会把自己带入到"奇伟、瑰怪、非常"的新境界. 平面几何，正提供了这样的一块良好的实验基地，可供爱好们去再现，去创造.

当代英国数学家 M·阿蒂亚(M. F. Atiyah)在《数学的统一性》一书中说得好：数学目的，就是用简单而基本的词汇去尽可能多地解释世界.

数学本身就是一种文化，如果我们积累起来的经验要一代一代传下去的话，我们就必须不断地努力地把它们加以简化和统一. 抛弃传统，就会断绝未来. 继往开来，才能发扬光大.

愿几何世界中的瑶草琼花迎风绽放，来点缀美丽纷芳的数学百花园.

叶中豪

2008 年 6 月于上海

注　文中部分史料及年代由刘培杰补充.

目　录

第一章　引　言 …………………………………………… 1
§1　几何论证的本源 ………………………………… 1
§2　古代几何学简史 ………………………………… 2
§3　欧几里得的《几何原本》 ………………………… 3
§4　希尔伯特公理体系 ……………………………… 6
习题 1 ………………………………………………… 14
第二章　中学平面几何摘要 ………………………………… 15
第一节　直线形定理 ………………………………… 15
§5　三角形的简单性质及有关定理 ………………… 15
§6　直角、垂线、斜线 ……………………………… 19
§7　平行线 ………………………………………… 23
§8　三角形及多边形的内角和 ……………………… 25
§9　平行四边形、梯形 ……………………………… 27
§10　三角形的巧合点 ……………………………… 30
习题 2 ……………………………………………… 31
第二节　关于圆的定理 ……………………………… 32
§11　圆的基本性质 ………………………………… 32
§12　直线与圆及圆与圆的关系 ……………………… 34
§13　圆和有关的角 ………………………………… 38
§14　圆和多边形 …………………………………… 42
习题 3 ……………………………………………… 45

第三节　比例线段及相似形定理……………………… 47
§15　有向线段 ………………………………… 47
§16　比例线段 ………………………………… 51
§17　相似三角形和相似多边形 ……………… 52
§18　勾股定理 ………………………………… 54
§19　点对于圆的幂 …………………………… 55
§20　三角形中几个重要的公式 ……………… 56
§21　某些正多边形的边长公式、圆周率、弧长
公式 …………………………………… 58
习题4 ……………………………………………… 63
第四节　面积定理………………………………… 66
§22　某些直线形的面积 ……………………… 66
§23　两面积之比 ……………………………… 68
§24　圆面积…………………………………… 69
习题5 ……………………………………………… 70
复习题1 …………………………………………… 72
第三章　推证通法………………………………… 81
第一节　命题的形式………………………………… 81
§25　命题的四种形式 ………………………… 81
§26　定理的结构 ……………………………… 82
§27　逆命题制造法、逆定理 ………………… 84
§28　同一法则 ………………………………… 87
§29　分断式命题 ……………………………… 88
习题6 ……………………………………………… 89
第二节　直接证法与间接证法…………………… 90
§30　直接证法与间接证法的意义 …………… 90
§31　间接证法举例 …………………………… 92
习题7 ……………………………………………… 95
第三节　综合法与分析法………………………… 96
§32　综合法…………………………………… 96
§33　分析法…………………………………… 98
习题8 ……………………………………………… 101

第四节　演绎法与归纳法 …………………………………… 102
§ 34　演绎法 …………………………………………… 102
§ 35　归纳法 …………………………………………… 104
习题 9 ……………………………………………………… 111
复习题 2 …………………………………………………… 112
第四章　证题术 ……………………………………………… 115
第一节　相等 ……………………………………………… 115
§ 36　关于相等的证题术 ………………………………… 115
习题 10 …………………………………………………… 121
第二节　和差倍分与代数证法 …………………………… 123
§ 37　关于和差倍分的证题术 ………………………… 123
§ 38　代数证法 ………………………………………… 127
习题 11 …………………………………………………… 129
第三节　不等 ……………………………………………… 132
§ 39　关于不等的证题术 ……………………………… 132
习题 12 …………………………………………………… 137
第四节　垂直与平行 ……………………………………… 139
§ 40　关于垂直的证题术 ……………………………… 139
§ 41　关于平行的证题术 ……………………………… 142
习题 13 …………………………………………………… 145
第五节　共线点 …………………………………………… 147
§ 42　关于共线点的证题术 …………………………… 147
§ 43　梅涅劳斯定理 …………………………………… 151
习题 14 …………………………………………………… 153
第六节　共点线 …………………………………………… 156
§ 44　关于共点线的证题术 …………………………… 156
§ 45　等角共轭点 ……………………………………… 160
§ 46　塞瓦定理 ………………………………………… 163
习题 15 …………………………………………………… 165
第七节　共圆点 …………………………………………… 168
§ 47　关于共圆点的证题术 …………………………… 168
习题 16 …………………………………………………… 173

第八节　共点圆 …… 176
§ 48　关于共点圆的证题术 …… 176
习题 17 …… 182
第九节　线段计算 …… 185
§ 49　关于线段计算的证题术 …… 185
习题 18 …… 192
复习题 3 …… 199
第五章　轨迹 …… 209
第一节　基本知识 …… 209
§ 50　类或集的概念 …… 209
§ 51　轨迹的意义 …… 209
§ 52　轨迹的基本属性 …… 210
§ 53　轨迹命题的证明 …… 211
§ 54　轨迹命题的类型 …… 212
§ 55　基本轨迹命题 …… 213
习题 19 …… 214
第二节　解法范例 …… 215
§ 56　第一类型命题 …… 215
习题 20 …… 220
§ 57　第二类型命题 …… 222
习题 21 …… 230
§ 58　第三类型命题 …… 232
习题 22 …… 238
第三节　求法与检查 …… 240
§ 59　探求轨迹的方法 …… 240
§ 60　间接求迹法 …… 244
§ 61　轨迹的界限问题 …… 246
§ 62　题解的检查 …… 248
习题 23 …… 253
复习题 4 …… 255
第六章　作图 …… 258
第一节　基本知识 …… 258

§ 63　作图题与设定条件 …… 258
§ 64　作图工具与作图公法 …… 260
§ 65　作图成法 …… 261
§ 66　解作图题的步骤 …… 263
习题 24 …… 269
第二节　常用的作图方法 …… 270
§ 67　轨迹交点法 …… 270
§ 68　游移切线法 …… 276
习题 25 …… 278
§ 69　三角形奠基法 …… 280
习题 26 …… 285
第三节　全等变换与变位法 …… 286
§ 70　全等变换 …… 286
§ 71　变位法 …… 292
习题 27 …… 297
第四节　位似变换与放大法 …… 299
§ 72　位似变换 …… 299
§ 73　相似图形 …… 302
§ 74　圆和圆的位似 …… 305
§ 75　放大尺 …… 308
§ 76　放大法 …… 311
习题 28 …… 319
第五节　反演变换与反演法 …… 321
§ 77　反演变换 …… 321
§ 78　保角性 …… 323
§ 79　变态的反演变换 …… 324
§ 80　直线和圆的反像 …… 325
§ 81　反演器 …… 329
§ 82　极点和极线 …… 331
§ 83　反演法 …… 334
习题 29 …… 344
第六节　作图杂法 …… 346

§ 84　伸缩进退法 …………………………………… 346
§ 85　反求法 ………………………………………… 350
§ 86　变更问题法 …………………………………… 352
习题 30 ……………………………………………… 355
第七节　代数在几何上的应用 ……………………… 357
§ 87　几何线段关系式的齐次性 ………………… 357
§ 88　一次式的作图 ……………………………… 358
§ 89　二次方程的根的作图 ……………………… 362
§ 90　代数分析法 ………………………………… 364
§ 91　正五边形和正五角星 ……………………… 376
§ 92　正十七边形 ………………………………… 379
习题 31 ……………………………………………… 384
第八节　尺规作图不能问题 ………………………… 387
§ 93　尺规作图可能性的准则 …………………… 387
§ 94　方程的根与系数间的关系 ………………… 389
§ 95　三次方程的根 ……………………………… 391
§ 96　几何三大问题 ……………………………… 392
§ 97　作图不能问题的间接判断法 ……………… 395
§ 98　等分圆周问题 ……………………………… 397
习题 32 ……………………………………………… 400
复习题 5 …………………………………………… 401
第七章　多值有向角 ……………………………… 405
§ 99　多值有向角及其通值 ……………………… 405
§ 100　多值有向角的相等 ……………………… 406
§ 101　三点共线的条件 ………………………… 408
§ 102　四点共圆的条件 ………………………… 409
§ 103　多值有向角的和 ………………………… 410
§ 104　轴对称的多值有向角 …………………… 411
§ 105　多值有向角的整倍数 …………………… 412
§ 106　多值有向角的优点 ……………………… 413
§ 107　应用例题 ………………………………… 414
习题 33 ……………………………………………… 420

总复习题 …………………………………………………… 424
附录 ………………………………………………………… 439
附录一 朋力点 ………………………………………… 439
§1 绪言 ………………………………………………… 439
§2 等角共轭点 ……………………………………… 440
§3 费尔巴哈定理 …………………………………… 443
§4 燧心 ………………………………………………… 447
§5 羽心 ………………………………………………… 451
§6 连环点 …………………………………………… 453
§7 朋力点 …………………………………………… 464
§8 羔点 ………………………………………………… 475
§9 朋力共轭点 ……………………………………… 480
§10 有公切圆之四圆 ……………………………… 484
附录二 三角形内容极大正方形问题 ……………… 525
附录三 三角形等心的宝藏 ………………………… 532
附录四 帕波斯定理的推广 ………………………… 557
§1 帕波斯定理 ……………………………………… 558
§2 共幂圆系 ………………………………………… 558
§3 对合 ………………………………………………… 562
§4 帕波斯定理的推广 ……………………………… 565
§5 同类命题的推广的一例 ………………………… 567
§6 帕斯卡定理的类似的推广 ……………………… 567
§7 余论 ………………………………………………… 569
作者发表的相关文章目录 …………………………… 571
编后记 ……………………………………………………… 572

第一章 引 言

§1 几何论证的本源

在几何学里经常有两件要做的主要工作:一是为了明确概念而确立定义,一是为了揭示真理而推证定理.

通常每遇一新概念,往往要有明确的定义,使人明白所指的是什么.但是若要求一切概念都有所本,即新概念都要用以前已经明确的旧概念来解释,而旧概念又都须有它自己的定义,这是不可能的.因为从复杂的概念回溯到较简单的概念,这种过程当然不能无止境地继续下去,必须最初先有一些我们从具体事物抽象出来的认为最简单而无需解释的概念,然后所有其余的概念才能由这些原始概念引导出来.所以用旧概念解释新概念,虽然是经常的方法,但追溯上去终究有时而穷,我们不可不事先选定一组基本概念,不加定义,作为解释其余一切概念的本源.这组不定义的基本概念,总称为元词.这些元词中,有的是指单纯的事物的,叫做元名或基本元素;有的是表示事物间的关系的,叫做元谊或基本关系.

证明定理,诚然步步都要根据.可是每见一定理,既追求它所依据的前提,又问此前提所以成立的原因,如此往上追寻,那么何时才可终止呢?事实上,希望每题都证,每证都根据已证的命题,犹之乎要想各各定义,一样是办不到的.因此就有必要采用一套基本命题,不加证明即作为一切定理的基础,而不再追究它的理由.这套不证明的基本命题,称为公理.

选定元词和公理之后,几何的论证便有了明确的本源,此外再无需诉诸直觉或默契.这套选定的元词和公理,彼此相辅而行,组成了所谓公理体系.公理体系乃是奠定本门科学的基石,基石既立,根本才称稳固,一部论证严格而且系统严明的几何学便是由此建立起来了.

§2　古代几何学简史

如上所述,似乎应该先建立公理体系,而后产生几何学.然而事实并不这样.实际上,几何公理体系的建立是在近几十年才得以完成,而几何学早在数千年前已因人类生活的需要而发生了.任何科学的发展过程,大都如此.

相传古代埃及的尼罗河每年泛滥,两岸百亩地界,尽被淹没,事后必须设法测量,重新勘定田地的界线.在这个实际的需要中,测量土地的方法自然要应运而生.据说西方的几何学就是起源于这种测地术."几何学"这个名词,原是我国明朝徐光启(1562—1633)译的,这词的原意无论在拉丁文或希腊文都含着"测地术"的意思,这说明上面的传说相当可靠.

大家都知道,古代埃及建有很多金字塔,这些金字塔的工程非常浩大,而它的精美造型,直到现在还是令人十分叹服.由此可见,埃及人很早就已知道许多关于几何的知识了.大约前1700年,埃及人阿默士(Ahmes,约前1700—前1100)手抄了一本书,即后人所称的《阿默士手册》,里面载有很多关于面积的测量法以及关于金字塔的几何问题.这本世界上最老的数学书出于埃及并不是偶然的,应该说是埃及人智慧积累的结果.

在我国方面,最早的数学书《周髀算经》和《九章算术》[①]里也载有许多关于几何的问题,由这两部书可以知道"圆周率[②]"及"勾股定理[③]".在我国很早就发现了.再推前一些,无论在石器时代的陶器上,还是在殷商的钟鼎上,都已经有了精美的几何图案.所以我国古代的几何知识在很早也已达到了很高的程度.

我国战国时代的墨子(名翟,约前480—前390),著有《墨经》十五卷,其中所载科学文字,标义立说,都极其精微深刻,就其所论几何学的各条来说,较之西方百余年后的欧几里得(Euclid,约前330—前275),毫不逊色.例如,《墨经》上说:"圜,一中同长也."这里的"圜"即是圆,那是说圆有唯一的中心,而这个中心距圆上任何点都一般远.又说:"方,柱隅四讙也."其中的"方"指正方形,"柱"就是边,"隅"就是角,"讙"读如权,有相等的意思,这一条说的是正方形四边及四角个个相等.像这样对"圜"和"方"下的定义,字句很简单而意义详尽,欧几里得所下的"圆"和"正方形"的定义亦不过如此.其后又有荀卿(约前

① 两书著者,已难稽考,大约非出于一人之手.书中所纂各种问题,源流极古,有可以上溯到周秦以前的,也有两汉时代的算法.

② 见 §21 定理 135.

③ 见 §18 定理 124.

310— 前 230)，在他所著《荀子》中曾说："五寸之矩，尽天下之方也."这和欧几里得的第四公设"凡直角都相等[①]"意义完全相同.从这些记录可以窥见我国古代几何的一斑.

古代埃及虽然积累了许多几何知识，但是还没有组织成为一门系统的科学.后来希腊和埃及通商，而当时希腊的许多学者也先后来到埃及留学，于是几何的知识才渐渐传入希腊.此后，这些知识无论在实际材料方面，或是在某些理论基础的奠定方面，在希腊都得到了光辉的发展.这样，几何学便形成了一门独立的科学.这门科学后来再传布于欧洲诸国，以至一直流传到现在.

古代希腊的许多数学家，如泰勒斯(Thales，约前 625— 前 547)、毕达哥拉斯(Pythagoras，约前 560— 前 480)、希波克拉底(Hippocrates，约当前 5 世纪下半叶)、柏拉图(Plato，约前 427— 前 347)、欧几里得诸人，对几何学都有莫大的功绩.泰勒斯曾发现若干几何定理和证明的方法，这是理论几何的开端；他还能运用几何定理来解决实际问题，凭一根竹竿就可以测得金字塔的高.毕达哥拉斯认为数学是一切学问的基础，他对几何学有很多研究，著名的勾股定理在西方就叫做"毕达哥拉斯定理".希波克拉底编著第一部初等几何教科书，他首先会用"反证法[②]"与柏拉图同为研究"几何三大问题[③]"的有名的人，因而附带发现许多几何定理.柏拉图首创现在为证题利器的"分析法[④]"，确立缜密的定义和明晰的公理作为几何学的基础，这种思想也由柏拉图开其先河.欧几里得搜集当时所有已知的初等几何材料(包括他自己的发现)，按着严密的逻辑系统，编成《几何原本》十三卷[⑤]，这书在历史上极负盛名，后世誉为几何学的杰作.

§3 欧几里得的《几何原本》

欧几里得的《几何原本》一书，最突出的一点是它从一些特别提出的公理、

① 见 §3.
② 见 §30.
③ 见 §96.
④ 见 §33.
⑤ 这书原有十三卷，后来别人在书末续了两卷.原来的前四卷及第六卷论平面几何，第五及第七至第十卷论比例和算术理论，后三卷论立体几何.明万历三十五年(1607年)徐光启与西人利玛窦(Metteo Ricci)合译前六卷，在北京出版，这是西洋数学输入我国的开始.至清咸丰五年(1855 年)，李善兰(1810—1882)与伟烈亚力(Alexander Wylie)才续译后九卷.

公设①和定义有计划地来论证其他命题，其次是它第一次把丰富而零散的几何材料整理成了系统严明的读本，这些优点，使它成为人类历史上的科学杰作．因为欧几里得完成了这一件学术上的艰巨工作，所以他的《几何原本》一直被后世推崇，而两千多年来所有初等几何教科书以及19世纪以前一切有关初等几何的论著无不以他的《几何原本》为根据．于是这部系统严明的著作乃被人们看做几何学的经典著作，甚至有将“欧几里得”用做几何学的代名词的．由于这个历史性的称誉，人们一直就把这种体系的几何学，称为欧几里得几何学．现在中学所学的几何，大致还是欧几里得的几何体系．

欧几里得的《几何原本》是一部擅几何学权威达两千余年之久的古代杰作已如上述，但是它并不是毫无缺点的，它的缺点在于它的基础部分．《几何原本》的基础是用一些定义、公设和公理来构造的，主要的有下列几条：

定义 1　点是不可分的．

定义 2　线有长无宽．

定义 3　线的界是点．

定义 4　直线是这样的线，它对于它的任何点来说都是同样地放置着的．

定义 5　面只有长和宽．

定义 6　面的界是线．

定义 7　平面是这样的面，它对于它的任何直线来说都是同样地放置着的．

公设 1　从每一点到另一点可引直线(图 1)．

公设 2　每条直线都可以无限延长(图 2)．

公设 3　以任意点为中心可作半径等于任意长的圆(图 3)．



图 1

图 2

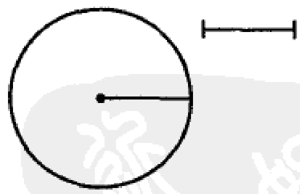


图 3

① 欧几里得本人并没有说明“公理”与“公设”的区别．按字面与内容来看，似乎欧几里得所谓公理，指的是人们认为明白无疑的公共观念，而公设是一种假设的事项，几何学里用它们作为最简单的论理根据．或者欧几里得以为假设的事项，容许有商榷的余地，试看他把第五公设(平行公设)排在很后的地位，仿若他觉得这一条最可怀疑，到不得已时，才将它提出来．欧几里得煞费苦心，于此可见一斑．近代的著作，已不再区分公理与公设，而一律叫做公理．

公设 4 凡直角都相等(图 4).

公设 5 同平面内两条直线与第三条直线相交,若其中一侧的两个内角之和小于二直角,则这两条直线必在这一侧相交(图 5).

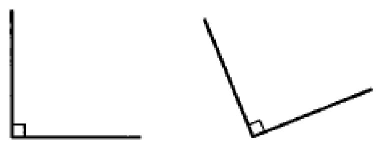


图 4

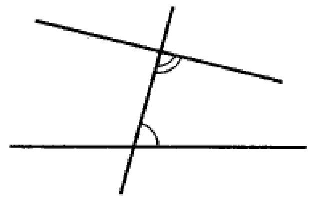


图 5

这条就是有名的欧几里得第五公设,也叫做平行公设[①].

公理 1 等于同量的量相等.

公理 2 等量加等量,其和相等.

公理 3 等量减等量,其差相等.

公理 4 不等量加等量,其和不等.

公理 5 等量的两倍仍相等.

公理 6 等量的一半仍相等.

公理 7 能迭合的量相等.

公理 8 全体大于部分.

欧几里得给"点"、"线"、"直线"、"面"、"平面" 都下了定义,这种工作,论意图自然很正确,但是因为他用了"分"、"长"、"宽"、"界" 等概念,而这些概念却没有定义,其中定义 4 和定义 7 虽然没有用到这些字眼,可是语意模糊,解释起来难免夹杂猜测的成分,所以那些定义都有逻辑上的缺陷.欧几里得的这种定义方法,是用普通语言,从各个角落,将所定义的概念的某些特性描写出来,使人心领神会.像这样的定义方法,叫做描写法.因其易被初学者接受,所以一直到现在,绝大多数的中学几何教科书,开头部分还是沿用这种方法.

欧几里得的全盘公设和公理,作为几何学严格的逻辑推理的基本命题,实在过于贫乏了,它的缺点就在于此.因此欧几里得在推证命题时,往往不得不求助于图形的直观性,而若明若暗地默认一些"显然的事实".例如,"某点介于另两点之间"、"在一直线的同侧或异侧"、"多边形的内部或外部"、"圆与直线或圆与圆(在一定条件下) 的相交" 等类的话,在《几何原本》中不时出现,可是这些

① 后人因觉得这条公设的内容不简单,似乎不该列为公设,于是想法去证明而没有成功,结果产生了"非欧几里得几何学".

话的含义或根据,欧几里得并没有预先明确地指出来.

从严格的逻辑观点来看,欧几里得的《几何原本》确有以上指出的一些缺点,但是我们不该因此便去苛责古人,因为在他的时代说来,他所建立的几何的逻辑结构不能不算是非常严密的了.无疑地,欧几里得在几何发展史上有不可磨灭的功绩,是他示范地完成了用形式逻辑建立严明的几何体系这个出色的工作,所以我们对于《几何原本》的评价,并不因它的缺点而有所降低,历史地看,我们认为这书是一部具有一定历史价值的承前启后的杰作.

§4 希尔伯特公理体系

在几何学的构成中,关于公理体系的产生以及公理体系所起的作用,是到了近代才建成完全明确的观念.近代公理法要求在建立几何学时,必须把一些无定义的基本概念(元词)挑选出来,而这些概念相互间的关联则在一些不加证明的基本命题(公理)中予以确定;一切新的概念一定要用基本概念或已有定义的概念来下定义;一切提出的几何命题,无论它本身如何明显,若不是要根据公理或已证的命题来证明它①,就是要明白宣布它为公理②.这就是说,在构成几何学时,只许纯粹按逻辑推理进行,绝不容许诉诸直觉或默契.像这样严格的要求,是近几十年才提出来的.

在人们尝试证明欧几里得第五公设的长时期过程中,给几何基础积累了极其丰富的公理资料,这些资料经过多年的研究整理乃成为近代公理法学说的基础.20世纪40年代逝世的德国数学家希尔伯特(Hilbert,1862—1943)是完成几何奠基工作的一位大家.他写了一本《几何基础》,这书从1899年到现在已出版至第八版(第八版是倍耐斯(Bernays)的增订本,在1956年出版),每版都作了必要的修正.希尔伯特的工作已经使得欧几里得几何的基础不再残缺,而建立了完善的公理体系,他这个公理体系是比较流行的一种,普通称它做希尔伯特公理体系.

希尔伯特公理体系的全部公理分为五组:

I. 结合公理

首先,希尔伯特采用“点”、“直线”、“平面”这三个元名和“点在直线上”、

① 虽然有时略去这种证明,但这不等于说不需要证明.

② 宣布某组命题为公理,必须注意它们之间的三种性质:和谐性、独立性、完备性.讨论这些性质,属于几何基础的任务,是很艰深的问题.

“点在平面上”这两个元谊.这几个基本概念虽然没有明白的定义,却隐约地受着下列各公理的制约.

若一条直线上的所有点都在某平面上,我们便说该直线在这平面上.

习惯上,有时把“点在直线上”也说做“直线通过点”,同样地把“点在平面上”和“直线在平面上”各说做“平面通过点”和“平面通过直线”,这些话给我们的印象,是它们表示着点、直线、平面间的一种“结合关系”.

这组公理共有八条:

I_1　通过不同两点的直线必定存在(图 6).

I_2　通过不同两点的直线至多有一条(图 7).



图 6



图 7

从这两个公理,可以引得:

推论 1　任意两个不同的点确定唯一的通过它们的直线(图 8).

因此,通过 A,B 两点的直线可以记作“直线 AB”或“AB 直线”,或直接记作“AB”.

推论 2　两条不同的直线至多有一个公共点(图 9).



图 8

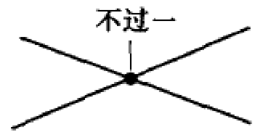


图 9

I_3　在每条一直线上至少有两点.至少有三点不同在一条直线上(图 10).



图 10

I_4　通过不同在一条直线上的三点的平面必定存在.在每一平面上至少有一点(图 11).

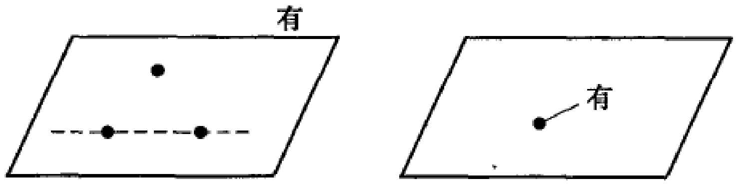


图 11

I_5　通过不同在一条直线上的三点的平面至多有一个(图 12).

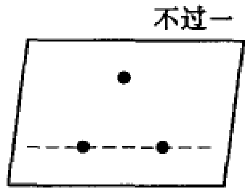


图 12

用 I_4 的前半部和 I_5 可以导出:

推论　任意三个不同在一条直线上的点确定唯一的通过它们的平面(图 13).

因此,通过不同在一条直线上的 A,B,C 三点的平面可以记作"平面 ABC"或"ABC 平面".

I_6　若一条直线有不同的两点在某平面上,则该直线全在这个平面上(图 14).

I_7　若两平面有一公共点,则它们至少还有另一公共点(图 15).

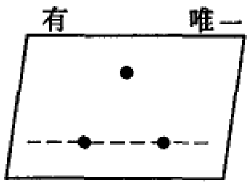


图 13

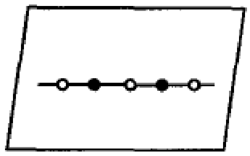


图 14

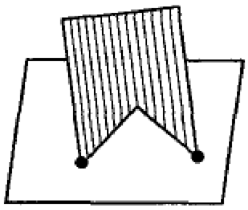


图 15

I_8　至少有四点不同在一平面上(图 16).

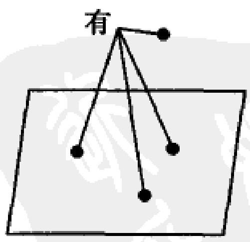


图 16

如果只是建立平面几何学,可以去掉后五个公理.

II. 顺序公理

设有同在一条直线上的三点,则我们从经验上知道有一点介于其余两点之间."介于……之间"这个概念表示的是三点的"顺序关系",希尔伯特采用它作为元谊.

本组公理有四条:

II_1　若点 B 介于 A 和 C 两点之间,则 A,B,C 是一条直线上的三个不同的

点，并且 B 也介于 C 和 A 之间(图 17).

II_2　对于任何不同的 A 和 B 两点，在直线 AB 上至少有一点 C，使得 B 介于 A 和 C 之间(图 18).

II_3　在一条直线上任何不同的三点中，至多有一点介于其余两点之间(图 19).



图 17



图 18



图 19

II_4　(帕施公理)设 A,B,C 是不同在一条直线上的三点，a 是平面 ABC 上的一条直线，它不通过 A,B,C 中任何一点.若 a 有一点介于 A 和 B 之间，则 a 必还有一点介于 A 和 C 或 B 和 C 之间(图 20).

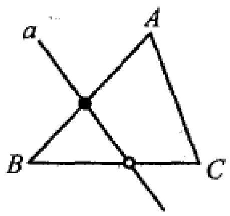


图 20

公理 II_4 是德国数学家帕施(Pasch,1843—1930)首先提出来的，也叫做**截割公理**.

III.相等公理

有了“介于……之间”这个概念和顺序公理，就可以引出下列各定义了.诸定义中所设的点，由以上各公理保证它们的存在①.

介于 A,B 两点之间，有无限多个点(图 21)，所有这类点的全体，叫做一条**线段**，记作“线段 AB”，或直接记作“AB”.原有的 A,B 两点叫做这线段的**端点**②.

设 O 和 A 是直线 a 上的两点(图 22)，则除这两点外，在 a 上还有无限多个点 X，使得 O 不介于 A 和 X 之间；又有无限多个点 Y，使得 O 介于 A 和 Y 之间.所有一切点 X 连同点 A 组成的总体，以及一切点 Y 合成的全体，各叫做一条**半线**或**射线**，记作“射线 OX”及“射线 OY”.点 O 叫做每条射线的**端点**或**原点**③.以某点为端点的射线，有时也说成**自某点发出的射线**.

① 详细的论证不是本书的任务.

② 两端点属于线段的本身.

③ 端点属于射线的本身.



图 21

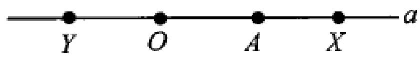


图 22

设在平面 α 上给出一点 A 及一直线 a，A 不在 a 上(图 23)，则除点 A 及 a 上的点外，在 α 上还有无限多个点 X，使得 a 上没有点介于 A 和 X 之间；又有无限多个点 Y，使得 a 上有点介于 A 和 Y 之间. 所有一切点 X 连同点 A 组成的总体，以及一切点 Y 合成的全体，各叫做一个半面，直线 a 叫做每个半面的边缘①. 以某直线为边缘的半面，有时也说成自某直线伸出的半面.

一点 O 及自这点发出的两条射线 OX 与 OY 合起来叫做一个角(图 24(a))，记作"$\angle XOY$". 如果射线 OX，OY 与点 O 恰好形成一条直线(图 24(b))，那么这样特别的角叫做平角.

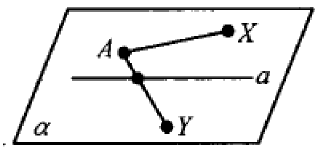


图 23

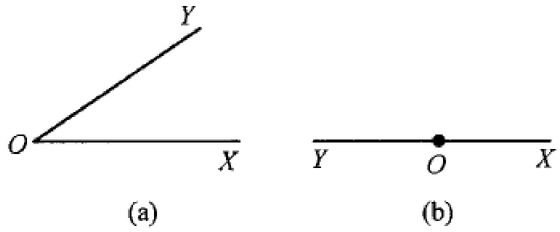


图 24

现在我们认定线段与线段之间，或者角与角之间具有一种相互关系，这个关系我们用"相等"一词来表示，有时也用记号"＝"来标记. 这意思是说，"两线段相等"和"两角相等"这两个概念都是不加定义的基本关系.

下列公理给出了线段与线段或角与角的相等关系的描述.

III_1　设 AB 是给定的线段，$A'X'$ 是自点 A' 发出的一条射线(图 25)，则在 $A'X'$ 上有且仅有一点 B'，使得线段 $AB = A'B'$. 对于每个线段 AB，都有 $AB = BA$.

III_2　如果线段 $A'B' = AB$ 且 $A''B'' = AB$(图 26)，则 $A'B' = A''B''$.

III_3　设点 B 介于 A 和 C 两点之间，点 B' 介于 A' 和 C' 两点之间(图 27)若线段 $AB = A'B'$ 且 $BC = B'C'$，则 $AC = A'C'$.

---

① 边缘属于半面的本身.

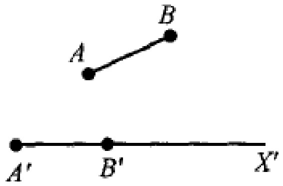


图 25

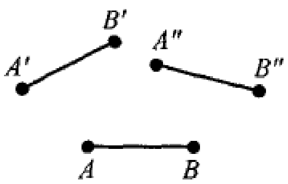


图 26

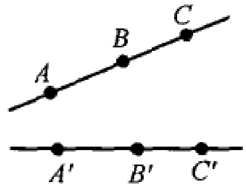


图 27

III_4 设 $\angle XOY$ 是给定的一个非平角的角，$O'X'$ 是自点 O' 发出的一条射线，λ' 是自 $O'X'$ 所在的直线伸出的一个半面(图 28)，则在 λ' 上有且仅有一条自点 O' 发出的射线 $O'Y'$，使得 $\angle XOY = \angle X'O'Y'$．对于每个角 $\angle XOY$，都有 $\angle XOY = \angle XOY$ 和 $\angle XOY = \angle YOX$．

III_5 设 A,B,C 是不同在一条直线上的三点，A',B',C' 也是不同在一条直线上的三点(图 29)．若线段 $AB = A'B'$，$AC = A'C'$ 且 $\angle BAC = \angle B'A'C'$，则 $\angle ABC = \angle A'B'C'$．

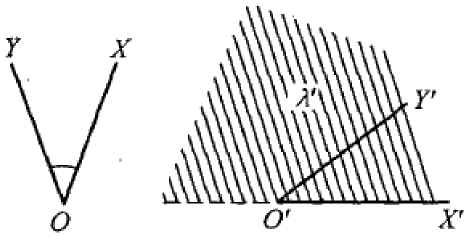


图 28

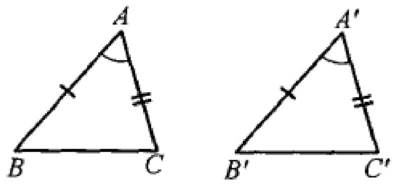


图 29

由这些公理可以推证线段与线段或角与角的相等关系具有“反身性”(甲 = 甲)、“对称性”(若甲 = 乙，则乙 = 甲)和“传递性”(若甲 = 乙且乙 = 丙，则甲 = 丙)，又可以建立关于线段或角的“大于”(甲 > 乙)、“小于”(甲 < 乙)、“加法”(甲 + 乙)以及“图形的变位”等概念．

IV. 平行公理

同在一平面上而且没有公共点的两条直线(图 30)，叫做平行线，或称该两直线互相平行．



图 30

下述公理是英国数学家普莱费尔(Playfair, 1748—1819)首先用来代替欧几里得第五公设的，所以一般把它叫做普莱费尔公理[①]．该公理的叙述在表面看来较平行公设简单，其实

① 普莱费尔公理原来的说法为：“通过不在已知直线上的一点有且仅有一条与该已知直线平行的直线．”其断语较这里所列的公理为强．

二者是等效的①.

IV　通过不在已知直线上的一点至多可引一条与该已知直线平行的直线(图 31).

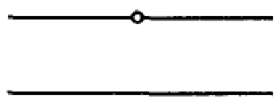


图 31

V. 连续公理

假设有同在一条直线上的 n 个不同的点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，每当 $i < j < k(i, j, k = 1, 2, \cdots, n)$ 时，A_j 介于 A_i 和 A_k 之间，这时我们便说这 n 个点排成 $\{A_1A_2\cdots A_n\}$ 的顺序②.

V_1　(阿基米得公理) 设 AB 和 CD 是给定的两线段，且 $AB > CD$(图 32)，则在射线 AB 上存在有限个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，满足下列条件：

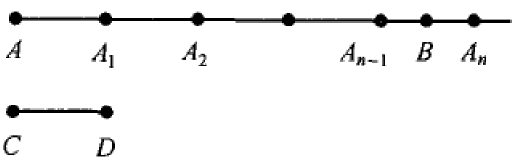


图 32

(1) 诸点 $A_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 排成 $\{A_1A_2\cdots A_n\}$ 的顺序；

(2) 线段 $AA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}A_n = CD$；

(3) 点 B 介于 A 和 A_n 两点之间.

通常也把这个公理说成这样：给定线段 $AB > CD$ 之后，必定存在正整数 m，使得

$$m \cdot CD \leqslant AB < (m + 1)CD$$

如果再用简单的话来表述这个公理，那就是说：不论给定怎样的两个线段，其中小线段的若干倍总会大于大线段.

过去一般都认为是古希腊数学家阿基米得(Archimedes，前 287—前 212) 首先提出上面的公理，因而把它叫做阿基米得公理. 其实我国的墨子在《墨经》上就曾说道："穷，或有前不容尺也." 这话的意思已含有上述公理的内容，因此有人认为阿基米得比我国墨子约晚两百年，所以现应改称或不容尺公理. 但此说现在尚未定论.

V_2　(康托尔公理) 设在直线 a 上给了无限个线段 $A_iB_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots)$，其中线段 $A_{i+1}B_{i+1}$ 的点全属于 A_iB_i(图 33). 假若无论给出怎样小的线段

① 在同一体系之下，如果从甲命题能推出乙命题，反过来从乙命题也能推出甲命题，就说这两个命题是等效的.

② 这件事实的存在，在直觉上是非常明显的，但证明起来很不简单，详细的讨论将要超出本书的范围.

PQ，在该串线段中总有线段 A_kB_k 小于 PQ，那么在直线 a 上有且仅有一点 C 属于该串线段的每个线段或是其中某些线段的端点.

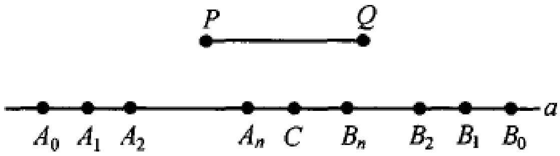


图 33

公理 V_2 因德国数学家康托尔（Cantor，1845—1918）而得名. 在希尔伯特的《几何基础》上，原来所用的最后公理与此不同，希尔伯特把它叫做完备公理. 但完备公理的内容太抽象，因此后来在许多别人的著作中，都改用与它等效的康托尔公理来代替它了.

阿基米得公理又称度量公理，有了它便可以度量任意线段的“长度”；而康托尔公理能解决相反的问题，即保证已知长度的线段必然存在. 这两个公理奠定了线段长度的度量理论的基础.

上述三个元名、五个元谊、五组公理（计 20 条）组成了希尔伯特公理体系，现在把它列成一表，如表 1 所示.

表 1

- 希尔伯特公理体系
  - 元词（以释万名万谊）
    - 元名
      - 点
      - 直线
      - 平面
    - 元谊
      - 结合关系
        - 一点在直线上
        - 一点在平面上
      - 顺序关系 —— 一点介于两点之间
      - 相等关系
        - 两线段相等
        - 两角相等
  - 公理（以推万理万法）
    - 结合公理（$I_1 \sim I_8$）
    - 顺序公理（$II_1 \sim II_4$）
    - 相等公理（$III_1 \sim III_5$）
    - 平行公理（IV）
    - 连续公理（$V_1 \sim V_2$）

希尔伯特公理体系是完备的，纯用逻辑推理，足可建立系统严明的欧几里得几何学. 但是如何根据这个公理体系，逐步去推演欧几里得几何中熟知的那些事理，却是一件相当繁重的工作. 譬如说，从这套公理到中学几何的那些定

理,其间还有着很多细致的定理需要证明,如果要这样做的话,便将大大超出我们这个课程的范围了[①].现在我们只需相信,从这套公理一定能够演出全部中学几何的内容,并且还可以无限地发展下去,产生丰富而灿烂的果实.

以下我们将从复习中学平面几何开始,进而系统地研究推论通法、证题术、轨迹、作图等.这些研究,一方面可以加强我们观察、分析、综合、推究问题的能力,以求得足够熟练的技巧;另一方面可以使我们认识较中学几何进一步的一些事理,来提高我们对初等几何的知识.

习题 1

1.在几何学里经常有哪两件要做的主要工作?

2.什么叫做元词?分哪两类?

3.什么叫做公理?

4.几何论证的本源在哪里?

5.建立系统严明的几何学,为什么必须首先选定元词和公理?

6.什么叫做公理体系?

7.几何学的产生,是因为先有一套公理体系呢?还是由于实际的需要?

8.关于西方几何学的起源,有什么传说?

9.埃及和我国古代对于几何的知识怎样?

10.墨子说:"圜,一中同长也."又说:"方,柱隅四讙也."各是什么意思?

11.荀子说:"五寸之矩,尽天下之方也."是什么意思?这话和欧几里得所提出的哪个公设相当?

12.试举出古代希腊的几个数学家,并简述他们对于几何的贡献.

13.为什么说欧几里得的《几何原本》是一部古代的杰作?

14.我们现在学的几何学叫做"欧几里得几何学",这个名称是怎样得来的?

15.欧几里得的《几何原本》有什么缺点?是不是因为有这些缺点而我们就降低了对这部书的评价?

16.近代公理法对于建立几何学有何严格的要求?

17.试给"线段"、"射线"、"半面"、"角"下严格的定义.

18.试证普莱费尔公理和欧几里得第五公设等效.(可用中学平面几何的定理.)

19."阿基米得公理"在我国是谁首先道出?

20.希尔伯特公理体系中有哪几个元名?哪几个元谊?哪几组公理?

① 这项工作属于几何基础的范围.

第二章　中学平面几何摘要

本章列举的内容，绝大部分是现行中学平面几何课本[①]上的材料，只有很少部分或者是因为需要或者是由中学材料略加推广而添入的. 至于中学教材里的轨迹和作图，因为本书第四第五两章另有专论，所以本章不予列人.

本章对于各定理的排列，是从传统惯例和逻辑顺序这两方面来考虑的，因此有的地方和中学课本不尽相同. 凡性质相近的定理，均经整理成类，一则便于读者复习记忆，再则便于以后引用.

本章所列定理，除极少数外，概不作证明. 其中涉及的名词，若是新的，或是中学课本虽有但需补充注释的，均一一加以说明，其余都认为读者已知，不再重述了.

第一节　直线形定理

§5　三角形的简单性质及有关定理

首先，把公理 III_5 用于等腰三角形（从两方面看做两个三角形），可以得到下面的命题：

定理 1　等腰三角形的两个底角相等（图 34）.

推论　等边三角形的三个角彼此均相等.



图 34

进一步，我们可以得到“三角形全等的判定定理”.

定理 2　两个三角形若具下列条件之一，则它们必是全等的：

（1）两边及夹角对应相等（图 35）；

（2）一边及两邻角对应相等（图 36）；

① 本书所提现行中学平面几何课本均指 20 世纪五六十年代所使用的课本.

(3) 三边对应相等(图 37).

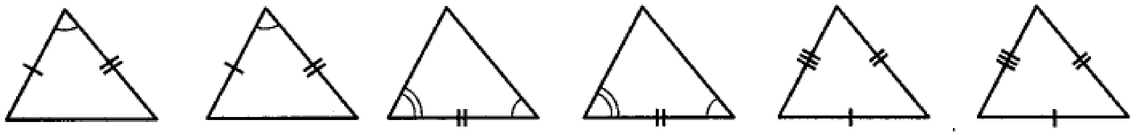


图 35　　图 36　　图 37

三角形的全等分两类:设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等,若沿周界 $ABCA$ 及 $A'B'C'A'$ 环绕的方向相同,则叫做真正全等(图 38(a));若方向相反,则叫做镜像全等(图 38(b)).

把定理 2(2) 用于有两角相等的三角形(从两方面看做两个三角形),可得:

定理 3　若一个三角形有两角相等,则等角所对的两边也相等(图 39).

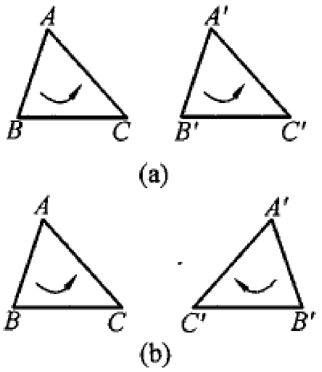


图 38

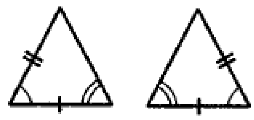


图 39

推论　等角三角形的三边彼此均相等.

应用全等三角形可以证明下述命题:

定理 4　等角的邻补角相等(图 40).

推论　等角的补角相等.

由定理 4 立可导得:

定理 5　对顶角相等(图 41).

又由定理4,可以推得下面极其重要的命题,在以后 §31 的例题3中我们将见到,它的证法与在中学课本上所见的不同.



图 40

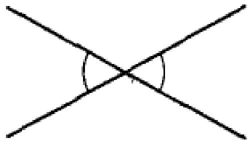


图 41

定理 6　三角形的每个外角大于和它不相邻的任一内角(图 42).

接着即可导出下列描述不等的命题:

定理 7　在每个三角形中(图 43):

(1) 较大的边所对的角也大;

(2) 较大的角所对的边也大.

定理 8　若两个三角形有两边对应相等(图 44),则:

(1) 夹角大的,它所对的边也大;

(2) 第三边大的,它所对的角也大.

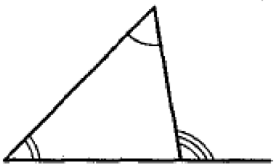


图 42

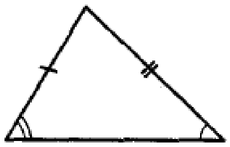


图 43

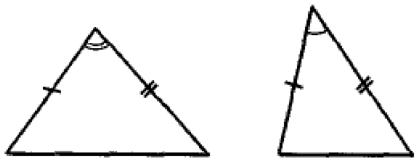


图 44

定理 9　在每个三角形中,每边小于其他两边之和(图 45).

推论 1　在每个三角形中,每边大于其他两边之差.

推论 2　对于任意三点 A,B,C,下面不等式成立

$$|AB - AC| \leqslant BC \leqslant AB + AC$$

定理 10　任一线段短于每个与它有公共端点的折线(图 46).

定理 11　被抱凸折线短于环抱折线(图 47).

这里所说的两折线是指有共同的锁线[①]且同在锁线的一侧,并且后者(两端点除外)在前者与锁线所成多边形的外部的.

① 折线两端点的联结线,叫做折线的锁线.



图 45

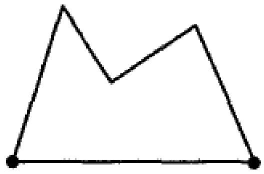


图 46

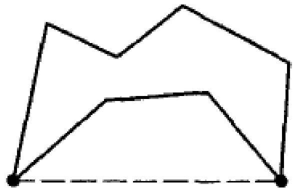


图 47

定理 12 凸多边形的周长小于包围它的任何多边形的周长(图 48).

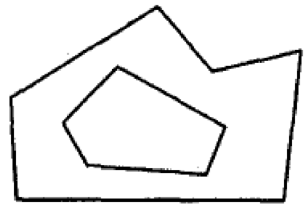


图 48

下述命题是三角形全等的又一判定定理：

定理 13 两个三角形若具下列条件之一,则它们必全等：

(1) 两角及其中一角的对边对应相等(图 49);

(2) 两边及其中大边的对角对应相等(图 50).

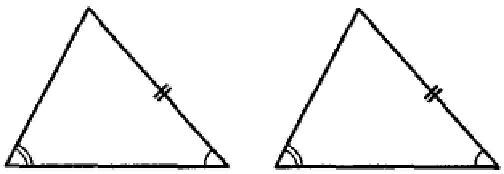


图 49

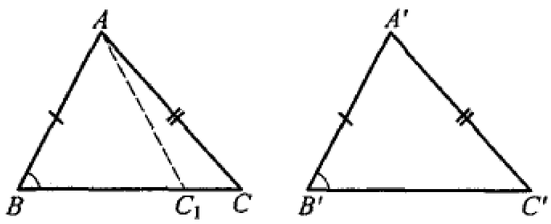


图 50

其中(2)在中学课本上没有讲到,现在证明如下：

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中(图 50),设 $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AC > AB$,且 $\angle B = \angle B'$.在这些条件下,要证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,只需证 $BC = B'C'$ 就够了(定理 2(1)).

如果 $BC \neq B'C'$,则二者必有一大一小,为确定起见,不妨假定 $BC > B'C'$. 这样, 在边 BC 上就有一点 C_1, 使 $BC_1 = B'C'$. 因此 $\triangle ABC_1 \cong \triangle A'B'C'$(定理2(1)).于是 $AC_1 = A'C'$.但题设 $AC = A'C'$,故 $AC_1 = AC$.那么 $\angle C = AC_1C$(定理1).在 $\triangle ABC_1$ 中,$\angle AC_1C > \angle B$(定理6),从而 $\angle C > \angle B$.由此 $AB > AC$(定理 7(2)).但此结果与题设条件 $AC > AB$ 矛盾,故非 $BC = B'C'$ 不可.

应用全等三角形,又可证明下述命题：

定理 14　每条线段必有且仅有一个中心(图 51).

由此导得:

定理 15　每个异于平角的角,在内部必有且仅有一条平分线(图 52).

定理 16　对顶角的平分线互为反向延长线(图 53).

图 51

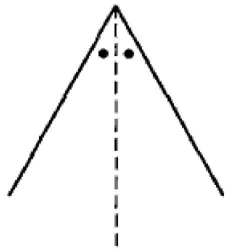


图 52

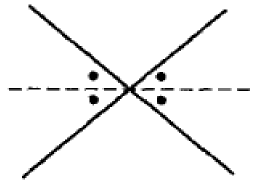


图 53

§6　直角、垂线、斜线

与自己的邻补角相等的角叫做直角(图 54).小于一直角的角叫做锐角(图 55);大于一直角而小于二直角的角叫做钝角(图 56).直角、锐角、钝角均为劣角;大于二直角的角,称为优角(图 57).在没有特别声明的场合下,我们所说的角都是指的劣角.

直角

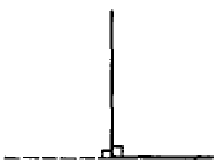


图 54

锐角

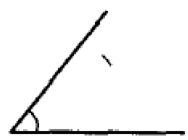


图 55

钝角

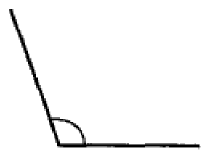


图 56

若两直线的交角①是直角②,则两直线叫做是互相垂直的,或彼此互称为垂线(图 58).如果两直线的交角不等于直角,则两直线叫做是互相倾斜的,或彼此互称为斜线(图 59).

---

① 两直线相交,一共形成四个角(劣角),这些角叫做两直线的交角.

② 只要有一交角是直角,其余三个显然也都是直角.

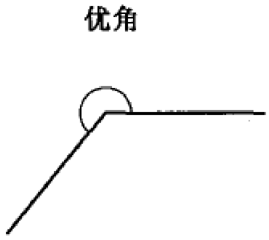


图 57

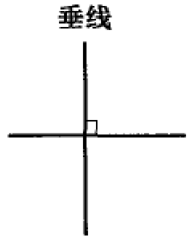


图 58

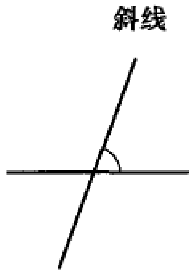


图 59

三个角都是锐角的三角形叫做锐角三角形(图 60);有一个角是钝角的三角形叫做钝角三角形(图 61);有一个角是直角的三角形叫做直角三角形(图 62).直角三角形中夹直角的两边均叫做腰,直角所对的边叫做斜边.一般把直角三角形的两腰分别叫做勾和股,而把斜边叫做弦.以后我们用记号“Rt△”来表示直角三角形.



图 60

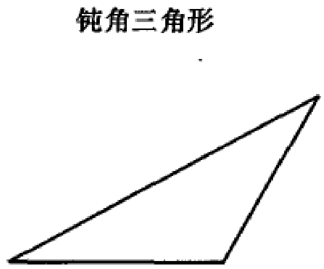


图 61

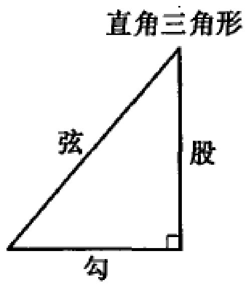
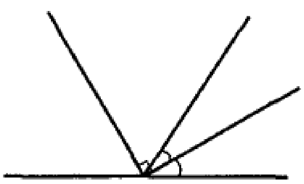


图 62

定理 17　互为邻补角的两角,它们的平分线必互相垂直(图 63).

定理 18　通过已知直线上一已知点有且仅有一条直线垂直于该已知直线(图 64).

定理 19　凡直角都相等(图 65).


图 63

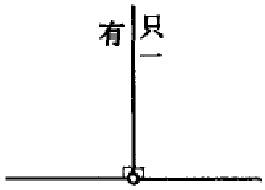
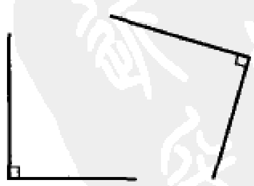


图 64


图 65

推论　等角的余角相等.

定理 20　通过已知直线外一已知点有且仅有一条直线垂直于该已知直线

(图 66).

定理 21　钝角三角形中除有一钝角外,其余两角都是锐角(图 67).

推论　钝角三角形的三边中,以钝角的对边为最长.

定理 22　直角三角形中除有一直角外,其余两角都是锐角(图 68).

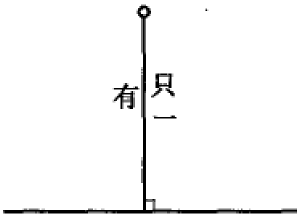


图 66

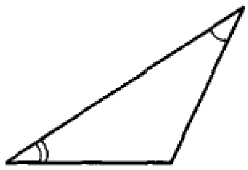


图 67

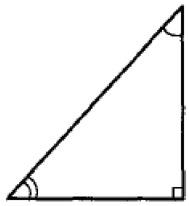


图 68

推论　直角三角形的勾及股均小于弦.

定理 23　自直线外一点至此直线的垂线短于所有的斜线(图 69).

这里的"垂线"和"斜线"均理解为自该点引至已知直线的线段.

定理 24　设自直线外一点引此直线的斜线(图 70),则:

(1) 等长的斜线在该直线上的射影必相等,而射影相等的斜线必等长;

(2) 较长斜线的射影必较长,射影较长的斜线也较长.

本书同中学课本一样,常把"射影"理解为"正射影".

定理 25　两直角三角形若具下列条件之一,则它们必是全等的:

(1) 两腰对应相等(图 71);

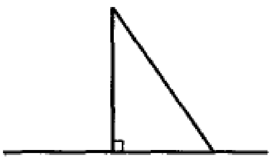


图 69

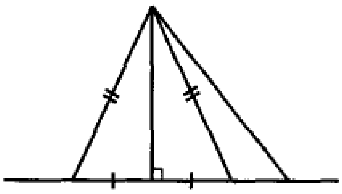


图 70

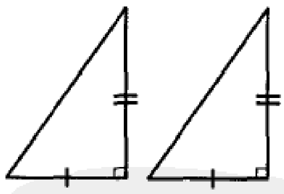


图 71

(2) 一腰及其相邻锐角对应相等(图 72);

(3) 一腰及其相对锐角对应相等(图 73);

(4) 斜边及一锐角对应相等(图 74);

(5) 斜边及一腰对应相等(图 75).

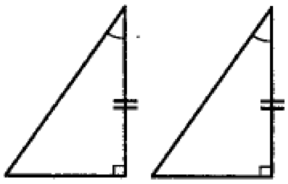


图 72

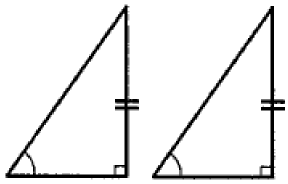


图 73

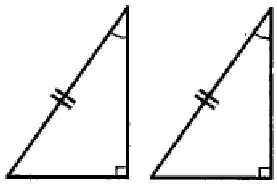


图 74

过一线段的中点且垂直于此线段的直线，叫做该线段的中垂线或垂直平分线.

定理 26 每条线段的中垂线具有下列性质(图 76)：

(1) 中垂线上的点都距线段两端等远；

(2) 凡距线段两端等远的点都在中垂线上.

定理 27 等腰三角形底边的中垂线、高线、中线及顶角的平分线合而为一(图 77).

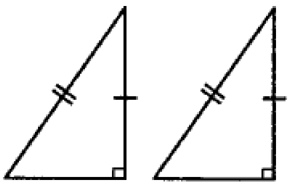


图 75

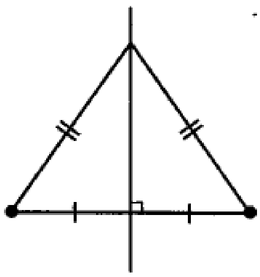


图 76

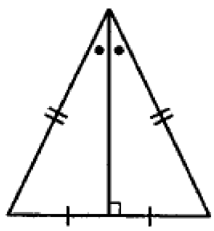


图 77

三角形的高线、中线及内外角平分线，有时我们理解它们是直线，有时我们又理解它们是线段(自三角形的顶点引至对边所在直线的线段). 在不同的场合便可能有不同的理解，例如，在上面定理中所提的诸线就是理解为直线的.

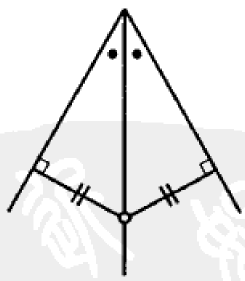


图 78

定理 28 每个异于平角的角，它的平分线具有下列性质(图 78)：

(1) 平分线上的点都与两边等距；

(2) 凡在角内与两边等距的点都在平分线上.

§7　平行线

定理 29　两条已知直线被第三条直线所截，若具下列条件之一，则这两条已知直线互相平行：

(1) 同位角相等(图 79)；

(2) 内错角或外错角相等(图 80)；

(3) 同侧内角或同侧外角互补(图 81).

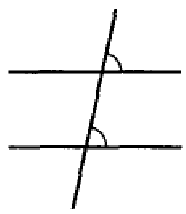


图 79

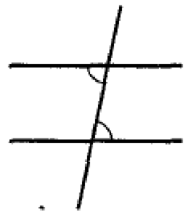


图 80

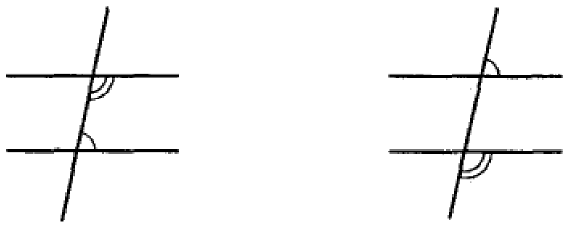


图 81

推论　垂直于同一条直线的两条直线必互相平行(图 82).

定理 30　通过已知直线外一已知点可引该已知直线的平行线(图 83).

定理 31　通过已知直线外一已知点所引该已知直线的平行线仅有一条(图 84).

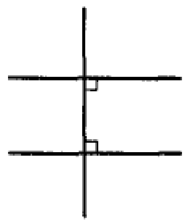


图 82

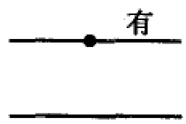


图 83

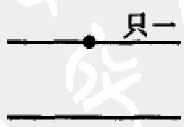


图 84

推论 1　平行于同一条直线的两条直线必互相平行(图 85).

推论 2　若某直线与两条平行线之一相交,则与另一条也相交(图 86).

推论 3　相交直线的平行线也相交(图 87).



图 85

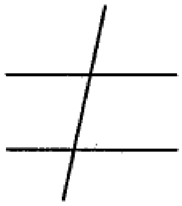


图 86

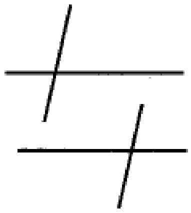


图 87

定理 32　若两条平行线被第三条直线所截,则:

(1) 同位角相等(图 79);

(2) 内错角或外错角相等(图 80);

(3) 同侧内角或同侧外角互补(图 81).

推论 1　若某条直线垂直于两条平行线之一,则也垂直于另一条(图 82).

推论 2　相交直线的垂线也相交(图 88).

定理 33　两条直线与第三条直线相交,若其中一侧的两个内角之和小于二直角,则这两条直线必在这一侧相交(图 89).

推论　同一直线的垂线与斜线必相交(图 90).

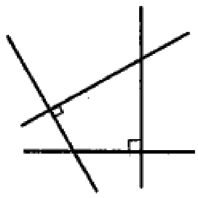


图 88

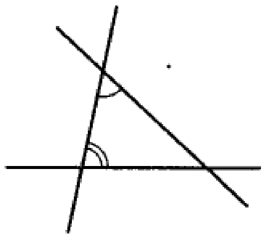


图 89

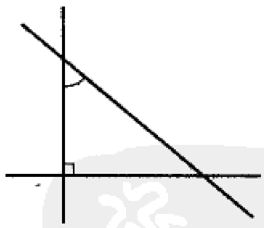


图 90

定理 34　若两个角的边分别平行,则这两个角相等或互补(图 91).

定理 35　若两个角的边分别垂直,则这两个角相等或互补(图 92).

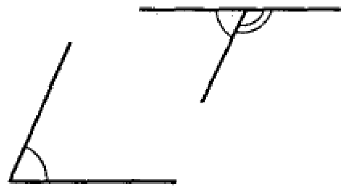


图 91

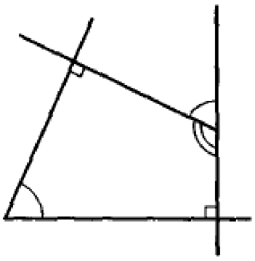


图 92

§8　三角形及多边形的内角和

定理 36　三角形的内角和等于二直角(图 93).

推论 1　三角形的每个外角等于和它不相邻的两个内角之和(图 94).

推论 2　三角形的一外角与不相邻的一内角之差,等于不相邻的另一内角(图 94).

推论 3　直角三角形的两锐角互为余角(图 95).

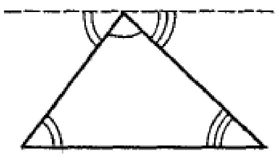


图 93

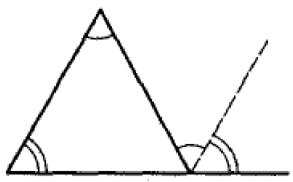


图 94

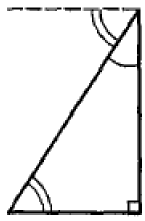


图 95

推论 4　等腰三角形的底角与顶角的一半互余(图 96).

推论 5　等腰直角三角形的底角等于 45°(图 97).

推论 6　正三角形的每个内角等于 60°(图 98).

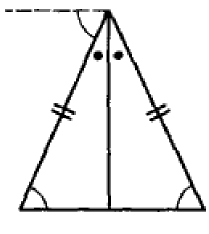


图 96

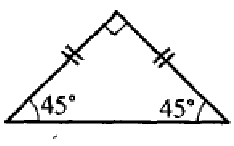


图 97

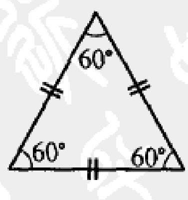


图 98

推论 7　若两个三角形有两双角对应相等,则第三双角也相等(图 99).

定理 37　等腰三角形顶角的外角等于底角的 2 倍(图 100).

推论　等腰三角形顶角的外角平分线平行于底边(图 100).

定理 38 一等腰三角形,若其中有一角(无论顶角或底角)等于 60°,则必是正三角形(图 101).

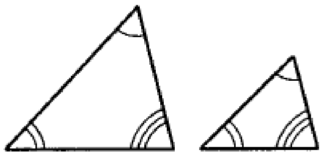


图 99

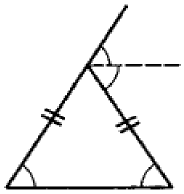


图 100

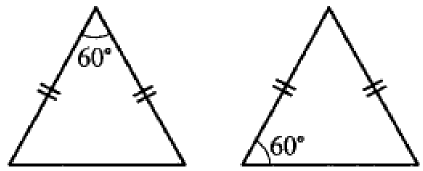


图 101

定理 39 直角三角形中(图 102):

(1) 若有一个锐角等于另一个锐角的一半,则斜边必等于短腰的 2 倍;

(2) 设斜边等于一腰的 2 倍,则此腰的对角必等于另一个锐角的一半.

这样的直角三角形,它的两个锐角实际分别等于 30° 和 60°.

定理 40 一个三角形,若其中有一角等于其余两角之和,或有两角互余,则必是直角三角形(图 103).

推论 一个三角形,若其中有一边等于它的中线的 2 倍,则必是直角三角形(图 104).

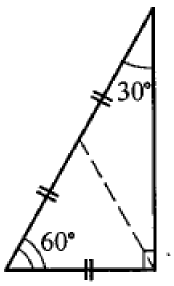


图 102

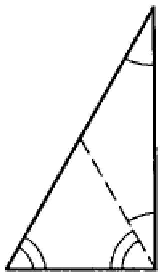


图 103

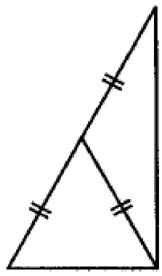


图 104

定理 41 凸 n 边形的内角和等于二直角的 $(n-2)$ 倍(图 105).

周界不自交的多边形叫做简单多边形.具体地说,这种多边形不得有下述三种情况:① 顶点和顶点重合;② 顶点在边上;③ 边和边相交.简单多边形分为凸的与凹的两种(图 106).定理 41 对于凹多边形也成立,但证明起来极其复杂,大大超出了本课程的范围.

推论 1 凸多边形的各外角(在每一顶点仅取一个)之和与边数无关,永远等于四直角(图 107).

推论 2 正 n 边形每个内角等于 $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$,每个外角等于 $\frac{360^\circ}{n}$.

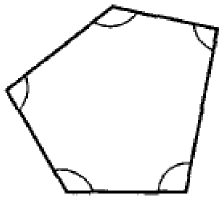


图 105

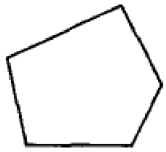


图 106

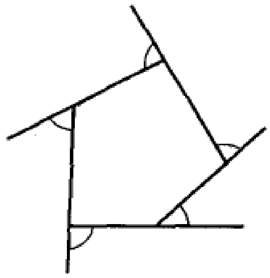


图 107

§9　平行四边形、梯形

定理 42　平行四边形有下列性质：

(1) 对边相等(图 108)；

(2) 对角相等(图 109)；

(3) 两条对角线互相平分(图 110).

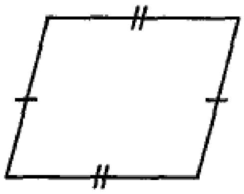


图 108

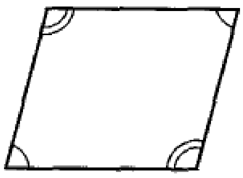


图 109

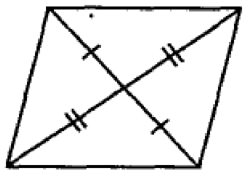


图 110

推论 1　平行四边形任一对角线分原形为两个全等三角形(图 111).

推论 2　夹在两平行线间的平行线段相等(图 112).

推论 3　两平行线间处处距离相等(图 113).

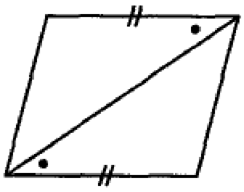


图 111

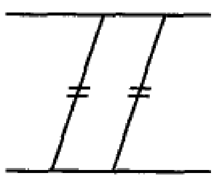


图 112

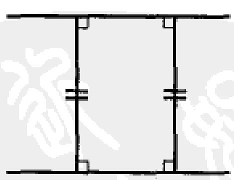


图 113

定理 43　平行四边形是中心对称图形，两条对角线的交点就是对称中心(图 114).

定理 44　矩形的两条对角线相等.逆过来说，两条对角线相等的平行四边形必是矩形(图 115).

定理 45 矩形是轴对称图形,对边中点的连线就是对称轴(图 116).

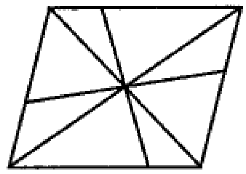


图 114

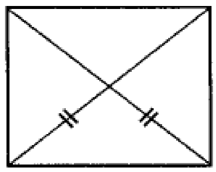


图 115

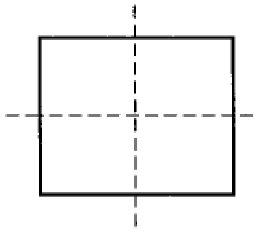


图 116

定理 46 菱形的两条对角线互为中垂线,并且分别平分菱形的一双相对内角(图 117).

定理 47 菱形是轴对称图形,对角线就是对称轴(图 118).

定理 48 正方形有四条对称轴,即两条对角线及每对对边中点的连线(图 119).

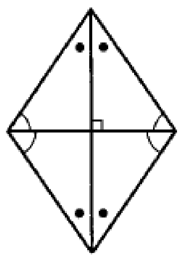


图 117

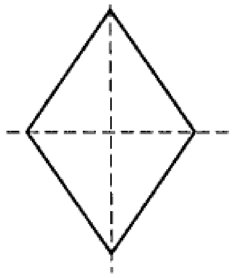


图 118

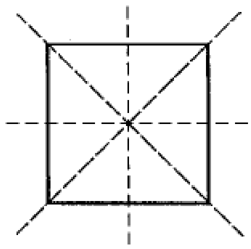


图 119

定理 49 一凸四边形若具下列条件之一,则必是平行四边形:

(1) 每对对边分别相等(图 108);

(2) 一对对边相等且平行(图 111);

(3) 每对对角分别相等(图 109);

(4) 两条对角线互相平分(图 110).

有一对对边互相平行的凸四边形叫做梯形(图 120). 梯形中互相平行的两边均称为底或底边,有时又分别叫做上底及下底,其他两边同称为腰;每底的两邻角叫做底角,有时又分别叫做上底角及下底角. 在这个梯形定义里,梯形的两腰平行与否是忽略不计的,因此平行四边形便成为梯形的一种特殊图形[①].

定理 50 若梯形的两底角(上底角或下底角)相等,则两腰必相等(图

① 这点与现行中学课本有所不同,但是这个定义将给我们带来莫大的便利.

121).

两底角相等的梯形叫做等腰梯形.因此等腰梯形包括矩形但不包括一般的平行四边形.

定理 51　等腰梯形的两对角线相等.逆过来说,两对角线相等的梯形必是等腰的(图 122).

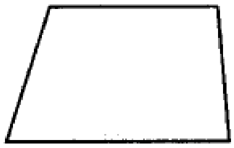


图 120

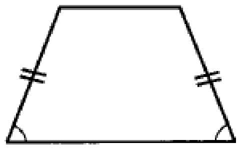


图 121

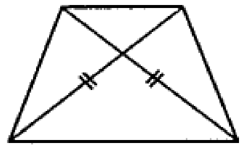


图 122

定理 52　等腰梯形是轴对称图形,两底中点的连线就是对称轴(图 123).

定理 53　一组平行线若分一截线成相等线段,则也分其他截线成相等线段(图 124).

推论 1　过梯形一腰的中点所引的底边的平行线必通过另一腰的中点(图 125).

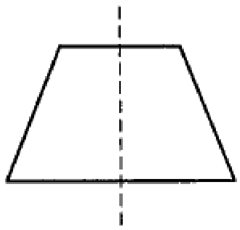


图 123

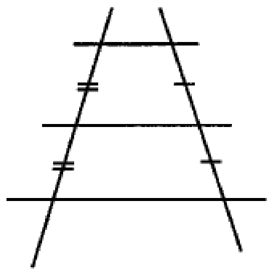


图 124

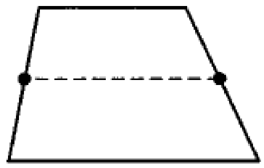


图 125

推论 2　过三角形一边的中点所引的另一边的平行线必通过第三边的中点(图 126).

三角形任两边中点的连线均称为三角形的中位线.这些线有时理解为直线,有时理解为线段.

定理 54　三角形任一中位线平行于第三边且等于该边的一半(图 126).

梯形两腰中点的连线称为梯形的中位线.这线有时理解为直线,有时理解为线段.

定理 55　梯形的中位线平行于底边且等于两底和的一半(图 125).

有一对对边相交的四边形叫做折四边形(图 127).

定理 56 在有一对对边平行的折四边形中,相交的一对对边若不互相平分,则它们中点的联结线平行于该对平行的对边且等于其差的一半(图 128).

定理 57 设四边形一对对边中点的联结线平行于第三边,则亦平行于第四边(图 125,128).

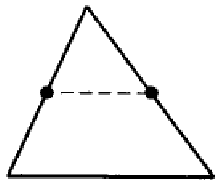


图 126

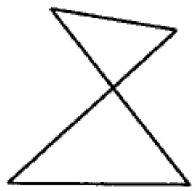


图 127

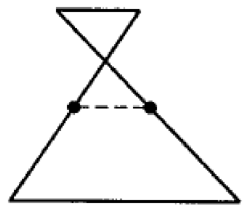


图 128

§ 10 三角形的巧合点

所谓三角形的巧合点,乃是关于三角形的某些特殊线(不限于直线)的交点的泛称.这类点大都各有专名,下列几个是我们所熟知的.

定理 58 三角形三边的中垂线交于一点,此点与三顶点等距(图 129).

这点叫做三角形的外心.

推论 直角三角形斜边的中点与三顶点等距.

定理 59 三角形的三条高线交于一点(图 130).

这点叫做三角形的垂心.

定理 60 三角形三内角的平分线交于一点,此点与三边等距(图 131).

这点叫做三角形的内心.

定理 61 三角形每一内角的平分线与其余两角的外角平分线各交于一点,这些点各与三边(所在直线)等距(图 131).

这样的点共有三个,叫做三角形的旁心.

定理 62 三角形的三条中线交于一点,此点位于各中线(各顶点量起)的 $\frac{2}{3}$ 处(图 132).

这点叫做三角形的重心.

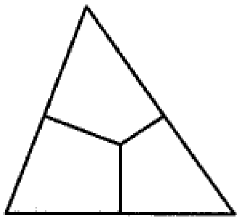


图 129

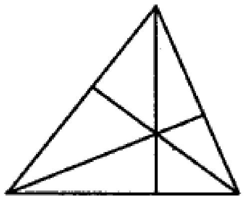


图 130

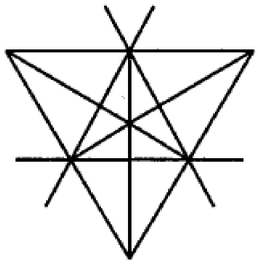


图 131

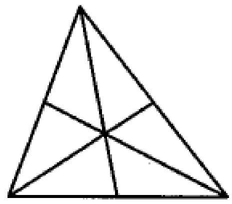


图 132

习题 2

1. 证明 §5 定理 13(1),但不许用以后的定理.

2. 求证:两个三角形若一边的中线及另两边对应相等,则它们必是全等的.

3. 两个三角形若一边的高及另两边对应相等,试问它们是否全等?为什么?

4. 求证:有两条中线相等的三角形必是等腰的.

5. 求证:有两条高相等的三角形必是等腰的.

6. 在 $\angle XOY$ 的边 OX 及 OY 上各取两点 A,B 及 C,D,使 $OA = OC$ 且 $OB = OD$,联结 AD 与 BC 交于 E,求证:OE 平分 $\angle XOY$.

7. 求证:三角形的任一边都小于该三角形周长的一半.

8. 求证:若一三角形中有一边等于另一边的 2 倍,则最短边的长介于周长的 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{4}$ 之间.

9. 求证:三角形任一边的中线小于其他两边和的一半而大于它们差的一半.

10. 设在 $\triangle ABC$ 中 $AB > AC$,D 是边 BC 的中点.求证:$\angle ADB > \angle ADC$ 且 $\angle BAD < \angle CAD$.

11. 求证:三角形任一角的平分线不大于对边的中线.

12. 设在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线交边 BC 于 D,求证:

(1) $AB > BD$ 且 $AC > CD$;

(2) 若 $AB > AC$,则 $BD > CD$.

13. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内部的任一点,求证:

(1) $\angle BPC > \angle BAC$;

(2) $\frac{1}{2}(BC + CA + AB) < PA + PB + PC < BC + CA + AB$.

14. 自等腰三角形底边上任一点引两腰的平行线,且与两腰相交组成平行

PDG

四边形,求证:这样的平行四边形有一定的周长.

15.求证:顺次联结四边形各边的中点必成一个平行四边形.

16.求证:若四边形的两对角线互相垂直,则对边中点的连线彼此相等.

17.求证:梯形的两腰中点及两对角线的中点同在一条直线上.

18.设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,延长 BG,CG 至 E,F,使 $GE=2BG$ 且 $GF=2CG$,求证:E,A,F 三点同在一条直线上.

19.设 O 是正三角形 $\triangle ABC$ 的中心,求证:BO 与 CO 的中垂线必三等分边 BC.

20.设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,过 I 引线平行于 BC 而交 AB,AC 于 E,F,求证:$EF=BE+CF$.

21.设 I,I_1,I_2,I_3 依次是 $\triangle ABC$ 的内心及对着 A,B,C 的旁心,求证:

(1)$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle A$;

(2)$\angle BI_1C=90°-\frac{1}{2}\angle A$;

(3)$\angle BI_2C=\angle BI_3C=\frac{1}{2}\angle A$.

22.设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,求证:$\angle BOC$ 等于 $2\angle A$ 或等于 $360°-2\angle A$.

23.设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,求证:$\angle BHC$ 等于 $180°-\angle A$ 或等于 $\angle A$.

24.求证:若有四点,其中有一点是其余三点连成的三角形的垂心,则其余三点都有同样的性质.(这样的四点合称为一垂心组.)

25.求证:三角形的内心和三旁心构成一垂心组.

第二节　关于圆的定理

§11　圆的基本性质

定理 63　圆关于它的中心成中心对称图形(图 133).

定理 64　在同圆或等圆中(图 134):

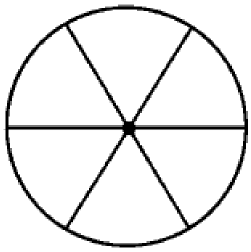
(1) 等圆心角含等弧,较大的圆心角含较大的弧;

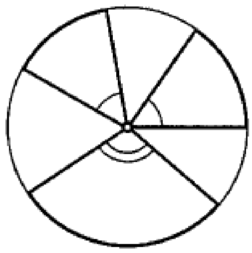
(2) 等弧对等圆心角,较大的弧对较大的圆心角.

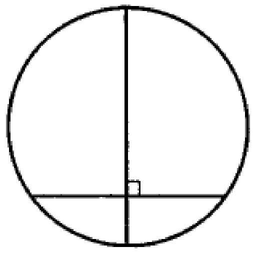
定理 65　在一圆中(图 135):

(1) 垂直于弦的直径必平分此弦及其所对的弧;

(2) 平分非直径的弦的直径必垂直于此弦;
(3) 平分弦的直径必垂直于此弧所对的弦.


图 133

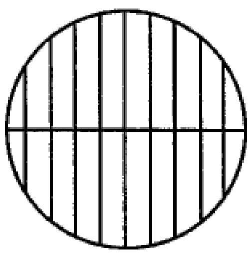

图 134

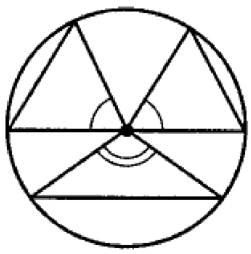

图 135

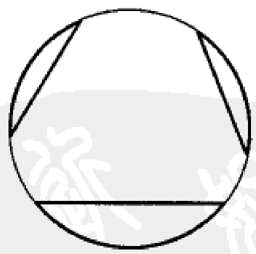
定理 66　圆关于它的任何直径成轴对称图形(图 136).
推论　圆的直径把圆周分为两段相等的弧.

等于圆周一半的弧,叫做半圆;半圆和它两端所连的直径合并称为半圆形.小于半圆的弧叫做劣弧;大于半圆的弧叫做优弧.凡在不宜两可的场合下所说的弧,都是指的劣弧.有时我们把圆的半径直接说为弧的半径而略去圆不提,例如说"以某点为圆心某长度为半径画弧".

定理 67　在同圆或等圆中(图 137):
(1) 等弦对等圆心角,较大的弦对较大的圆心角;
(2) 等圆心角夹等弦,较大的圆心角夹较大的弦.
定理 68　在同圆或等圆中(图 138):
(1) 等弦对等弧,较大的弦对较大的弧;
(2) 等弧对等弦,较大的弧对较大的弦.


图 136


图 137


图 138

定理 69　在一圆中,直径是最大的弦(图 139).
定理 70　在同圆或等圆中(图 140):
(1) 等弦距圆心等远,较大的弦距圆心较近;
(2) 距圆心等远的弦等长,距圆心较近的弦较大.

当一点与圆心的距离小于或大于半径时,我们便说该点在圆内或圆外.

推论　过圆内一定点的所有弦,以被此点平分者为最短(图 141).

被圆内某点平分的弦,叫做过该点的极小弦.

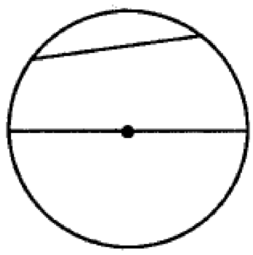


图 139

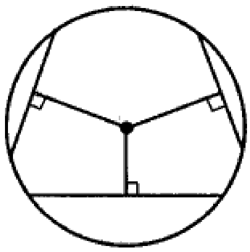


图 140

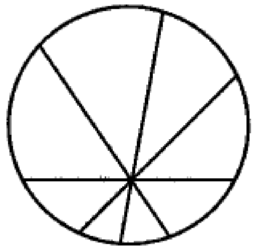


图 141

§12　直线与圆及圆与圆的关系

定理 71　一条直线与一个圆的公共点不能多于两个(图 142).

推论　没有圆能通过同在一条直线上的三个点.

定理 72　过圆上一点且不垂直于自该点所引半径的直线,必与圆有第二个公共点(图 143).

定理 73　过圆上一点作一直线(图 144):

(1) 若它垂直于自该点所引半径,则它是圆的切线;

(2) 若它是圆的切线,则它垂直于自该点所引半径.

推论 1　过圆上一定点仅能作一条切线.

推论 2　圆心在切线上的射影就是切点.

推论 3　垂直于圆的切线的直线,若它通过切点,则必通过圆心.

自圆外一点向圆引两条切线(射线),这两条切线的夹角叫做该点对圆的视角.

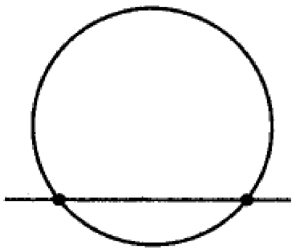


图 142

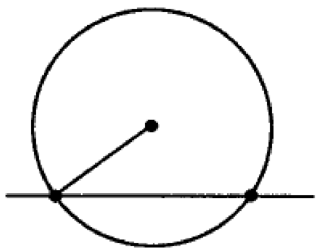


图 143

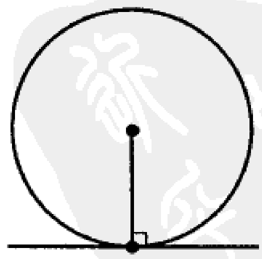


图 144

定理 74　自圆外一点向圆所引的两条切线等长,且自该点至圆心所引的射线平分该点对圆的视角(图 145).

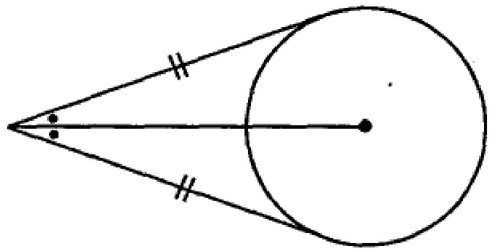


图 145

这里所说等长的两"切线",是指圆外的那点至切点间的线段.

定理 75　直线 l 与圆 $\odot O(r)$①的相互位置有三种情况,如表 2 所示(图 146).

表 2

O 到 l 的距离 h 与 r 的关系	l 与 $\odot O(r)$ 的相互位置
$h > r$	相离(无公共点)
$h = r$	相切(有唯一公共点)
$h < r$	相交(有两公共点)

表中事项,左右互为因果.

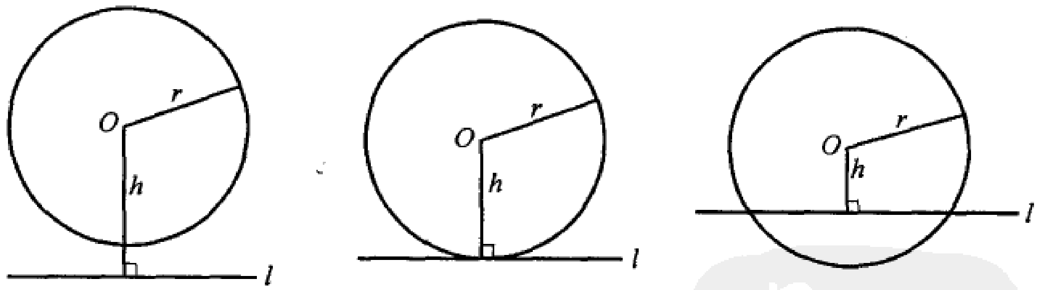


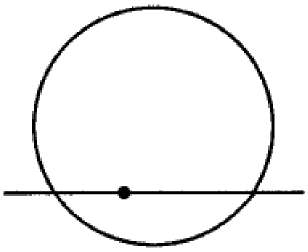
图 146

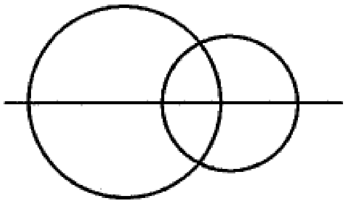
推论　过圆内一点的直线必交圆于两点(图 147).

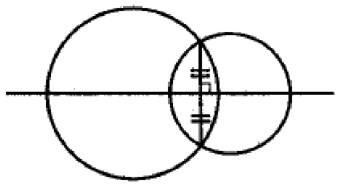
定理 76　两圆若有一公共点不在连心线上,则它们还有第二个公共点(图 148).

定理 77　相交两圆的连心线是公共弦的中垂线(图 149).

① 记号 $\odot O(r)$ 表示 O 是圆的中心,r 是圆的半径.


图 147

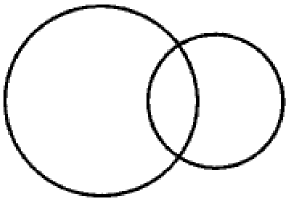

图 148


图 149

定理 78　两圆的公共点不能多于两个(图 150).

推论　过不同在一条直线上的三个点的圆不能多于一个(图 151).

定理 79　两圆若有一公共点在连心线上,则彼此相切.逆过来说,两圆若相切,则切点在连心线上(图 152).


图 150

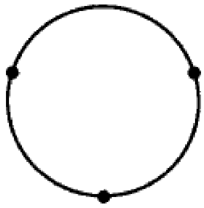
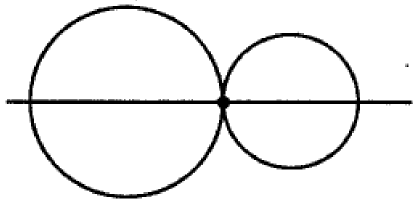


图 151


图 152

定理 80　两圆 $\odot O(r)$ 与 $\odot O'(r')$ 的相互位置有五种情况,如表 3 所示(图 153).

表 3

圆心距 $d = OO'$ 与 r, r' 的关系	$\odot O(r)$ 与 $\odot O'(r')$ 的相互位置
$d > r + r'$	外离
$d = r + r'$	外切
$\mid r - r' \mid < d < r + r'$	相交
$d = \mid r - r' \mid$	内切
$d < \mid r - r' \mid (d = 0)$	内含(同心)

表中事项,左右互为因果.

推论　三条已知线段若符合下列条件之一则可用它们为边构成一三角形(图 154),不然的话,便属不可能:

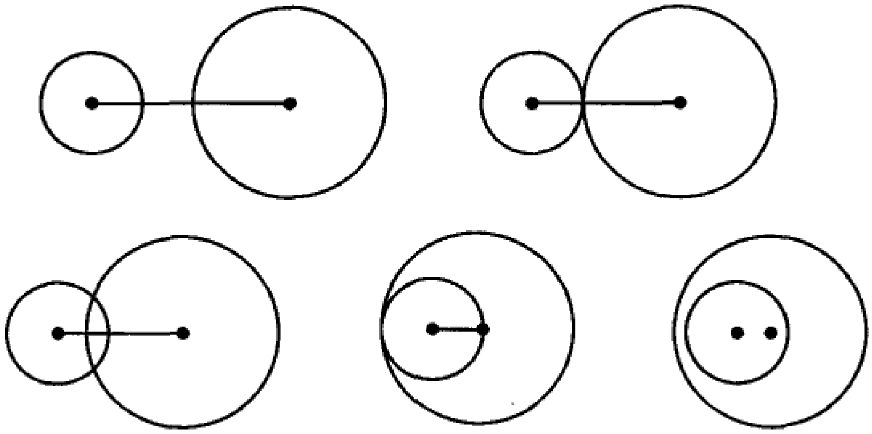


图 153

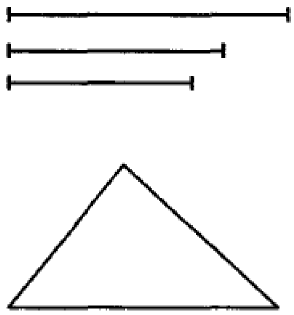


图 154

(1) 有一条小于其他两条的和且大于它们的差；

(2) 每一条均小于其他两条的和；

(3) 最大的一条小于其余两条的和.

定理 81　两圆的公切线条数视两圆相互位置而不同，如表 4 所示（图 155）.

表 4

两圆的相互位置	公切线条数	
	外公切线	内公切线
外离	2	2
外切	2	1
相交	2	0
内切	1	0
内含	0	0

表中事项，左右互为因果.

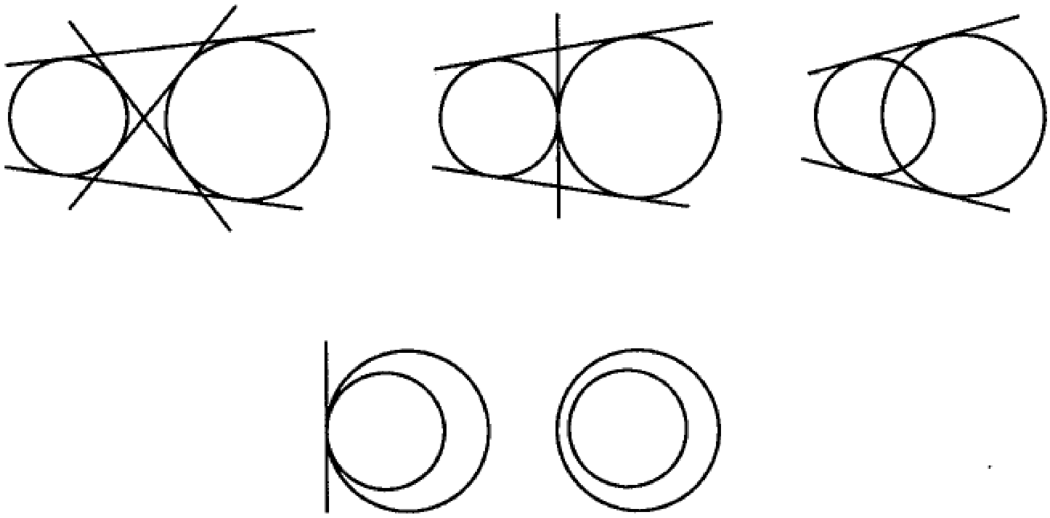


图 155

两圆的外公切线与外公切线,或内公切线与内公切线,叫做是同态的.

定理 82　两圆若有公切线,则同态公切线等长(图 156).

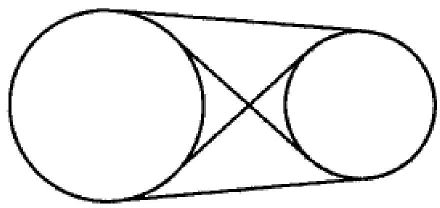


图 156

这里所说等长的两"公切线",是指两切点间的线段.

§ 13　圆和有关的角

定理 83　在一圆中,一弧所对的圆周角等于所对圆心角的一半(图 157).

推论 1　在一圆中,同弧所对的诸圆周角均相等(图 158).

一个角的顶点若在一弓形的弧上,而两边各通过弓形的弦的两端,则该角叫做这弓形的内接角,有时也说为(弓形的) 弧的内接角.

推论 2　一弓形的诸内接角均相等(图 159).

推论 3　半圆所对的圆周角等于直角;或者说,半圆形的内接角等于直角(图 160).

推论 4　在一圆中,等于直角的圆周角所夹的弦是圆的直径(图 160).

自一点发出两条射线使分别通过一已知线段的两端,则这两条射线所成的角,叫做该点对已知线段的视角.

推论 5　一点对圆的一直径的视角若等于直角,则该点必落在圆上(图 160).

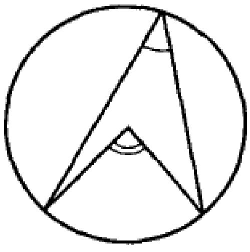


图 157

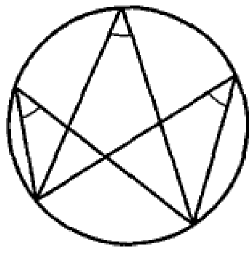


图 158

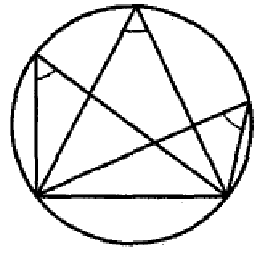


图 159

定理 84　在同圆或等圆中(图 161):

(1) 等弧对等圆周角,较大的弧对较大的圆周角;

(2) 等圆周角含等弧,较大的圆周角含较大的弧.

在同圆上有公共端点的不同的两弧,称它们是共轭的.

定理 85　圆上共轭两弧所对的圆周角互补(图 162).

定理 86　两三角形若有一边彼此相等,且该边的对角彼此相等或互补,则它们的外接圆相等(图 163).

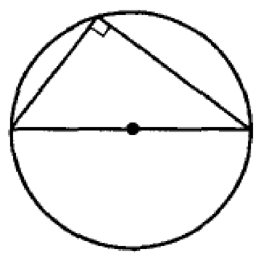


图 160

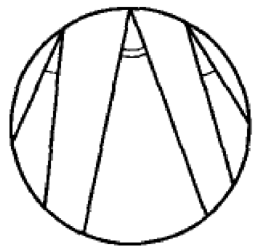


图 161

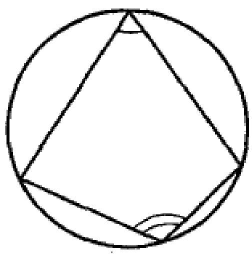


图 162

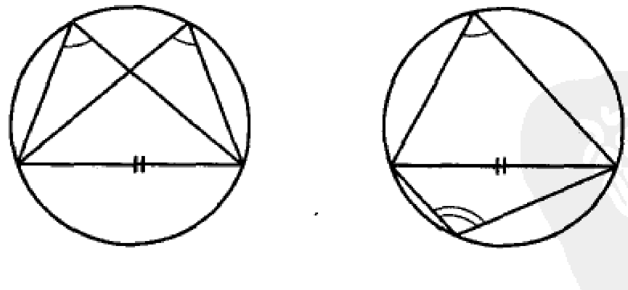


图 163

定理 87　在同圆或等圆中:

(1) 相等的圆周角,所夹的弦相等(图 164);

(2) 非钝角的圆周角,大角所夹的弦也大(图 165);

(3) 非锐角的圆周角,大角所夹的弦反小(图 166).

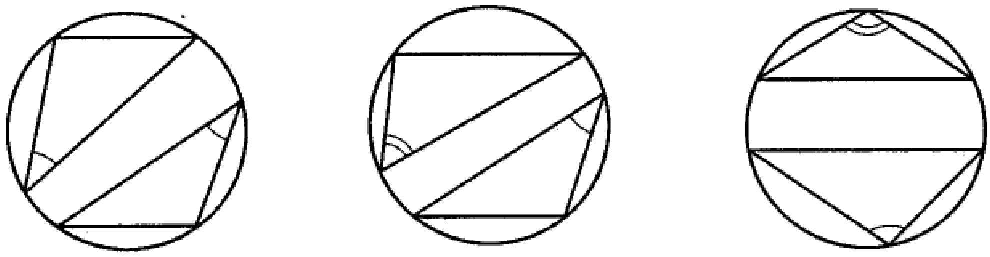


图 164　　图 165　　图 166

定理 88　在同圆或等圆中:

(1) 若两圆周角的和等于二直角,则两角所夹的弦相等(图 167);

(2) 若两圆周角的和小于二直角,则大角所夹的弦也大(图 168);

(3) 若两圆周角的和大于二直角,则大角所夹的弦反小(图 169).

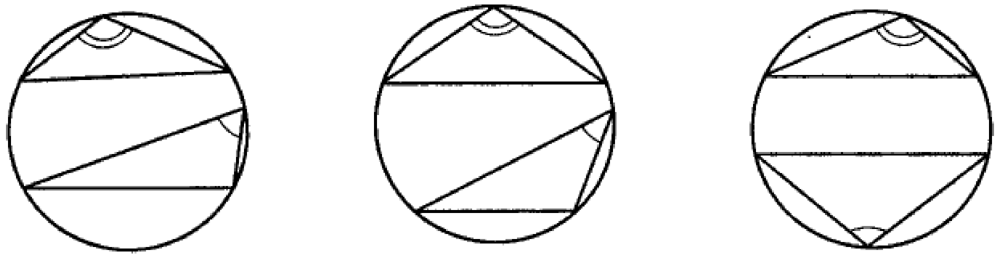


图 167　　图 168　　图 169

定理 89　两平行线若与一圆均有公共点,则两平行线间所夹的两弧相等(图 170).

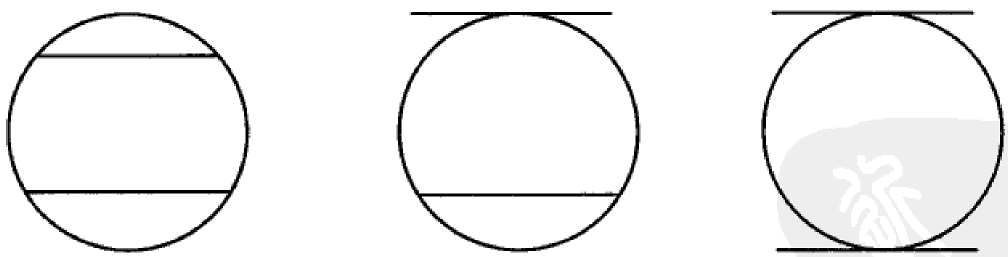


图 170

若一个角的顶点在圆上,一边与圆相交,另一边所在的直线与圆相切,则该角叫做圆的弦切角.

定理 90　圆的弦切角等于它包含的弧所对的圆周角(图 171).

定理 91　设 AB 是圆的一弦,C 是圆上一点,BD 是射线.

(1) 若点 C 与射线 BD 分别在 AB 的两侧,且 $\angle ABD = \angle ACB$,则直线 BD

是圆的切线，或者说 $\angle ABD$ 是圆的弦切角.（图 172(a)）；

(2) 若点 C 与射线 BD 同在 AB 的一侧，且 $\angle ABD$ 与 $\angle ACB$ 互补，则直线 BD 是圆的切线，或者说 $\angle ABD$ 是圆的弦切角.（图 172(b)）.

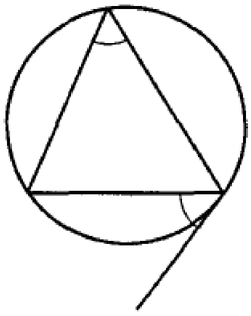


图 171

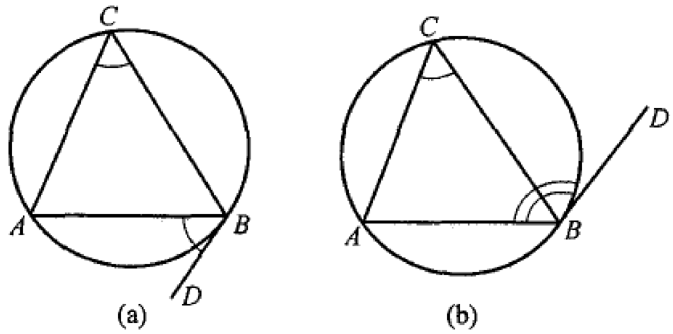


图 172

顶点在某圆内部的角，叫做这圆的圆内角.

定理 92　圆的圆内角，等于它本身及其对顶角包含的弧所对的圆周角之和(图 173).

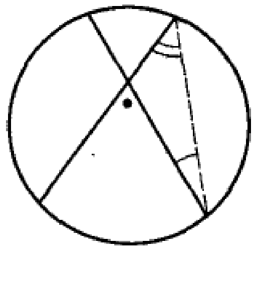


图 173

顶点在某圆外部而两边与圆均有公共点的角，叫做这圆的圆外角.

定理 93　圆的圆外角，等于它包含的两弧所对的圆周角之差(图 174).

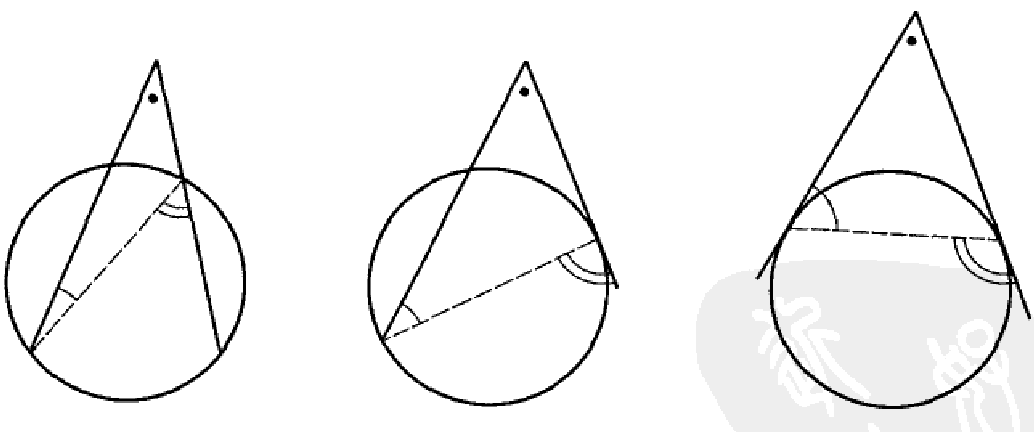


图 174

§14 圆和多边形

若一多边形的所有顶点同在某圆上(图 175),则称这多边形为圆内接多边形,而称某圆为这多边形的外接圆.有时也说该多边形内接于某圆,或说某圆外接于该多边形.

若一多边形的诸边或其延长线同切于某圆(图 176),则称这多边形为圆外切多边形,或说这多边形外切于某圆.当该多边形包围某圆时(图 176(a)),某圆便叫做内切圆,或说某圆内切于该多边形;若是该多边形不包围某圆(图 176(b)),则某圆叫做旁切圆,或说某圆旁切于该多边形.

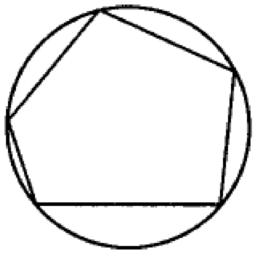
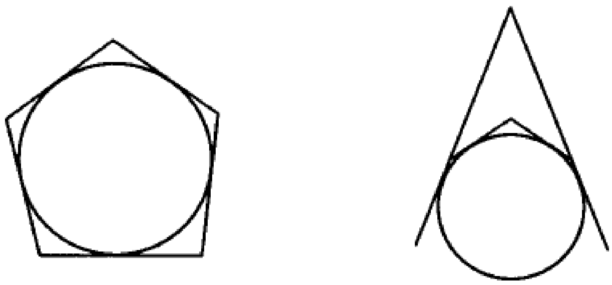


图 175



(a)　　(b)

图 176

定理 94　通过不同在一条直线上的三点的圆唯一存在;或者说,不同在一直线上的三点确定唯一的圆(图 177).

因此,我们常把通过 A,B,C 三点(当然不同在一直线上)的圆记作 $\odot ABC$.

定理 95　一个三角形有以外心为圆心的唯一外接圆(图 178).

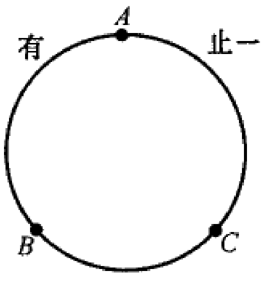


图 177

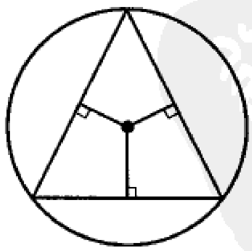


图 178

定理 96　一个三角形有(图 179):

(1) 以内心为圆心的唯一内切圆;

(2) 分别以三个旁心为圆心的三个旁切圆.

在凸四边形中,某内角的对角,叫做该角外角的内对角.

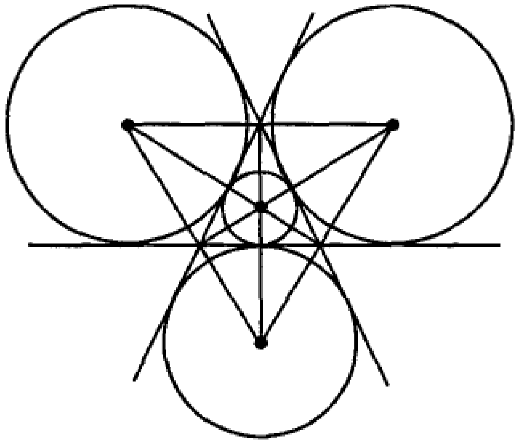


图 179

定理 97　若圆内接四边形:

(1) 是凸的(图 180(a)),则它的对角互补,任一外角等于其内对角;

(2) 是折的,则它的对角相等(图 180(b)).

推论　内接于圆的梯形必是等腰的(图 181).

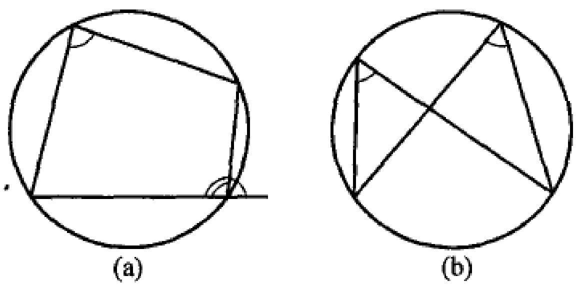


图 180

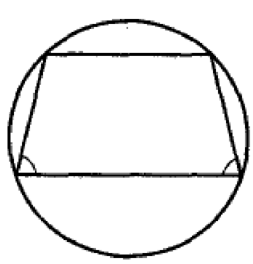


图 181

定理 98　若四边形:

(1) 是凸的,且有一双对角互补或有一外角等于其内对角(图 180(a)),则必有外接圆;

(2) 是折的,且有一双对角相等(图 180(b)),则必有外接圆.

推论　等腰梯形必有外接圆(图 181).

定理 99　若四边形:

(1) 有内切圆,则一双对边的和等于另一双对边的和(这样的四边形有凸的和凹的两种,如图 182 所示);

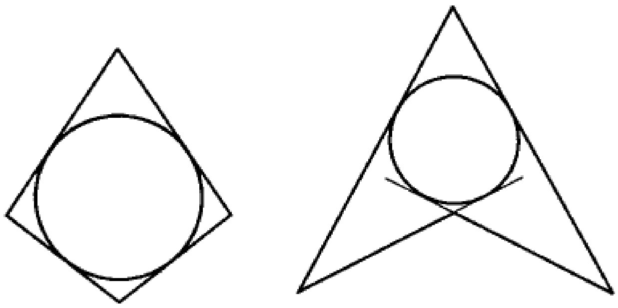


图 182

(2) 有旁切圆,则一双对边的差等于另一双对边的差(这样的四边形有凸的、凹的和折的三种,如图 183 所示).

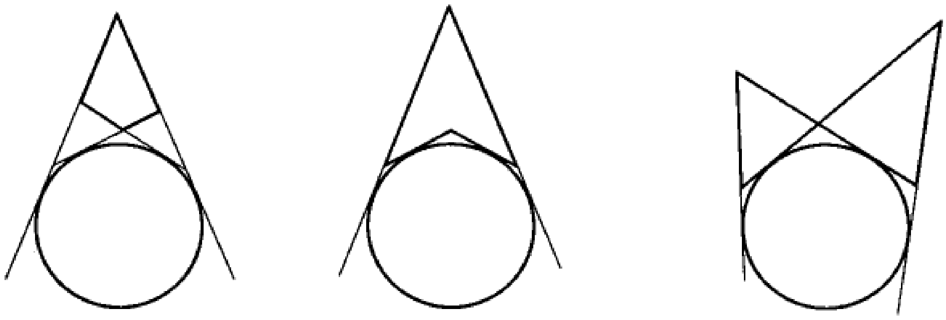


图 183

定理 100 若四边形:

(1) 一双对边的和等于另一双对边的和,则必有内切圆(此时四边形只有凸的和凹的两种,如图 182 所示);

(2) 一双对边的差等于另一双对边的差,则必有旁切圆[①](此时四边形有凸的、凹的和折的三种,如图 183 所示).

推论 1 菱形有一个内切圆(图 184).

四边形若有一对角线是它对角线的中垂线,则叫做筝形.筝形有凸的和凹的两种(图 185).

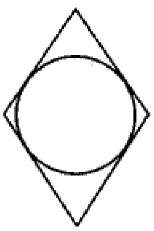


图 184

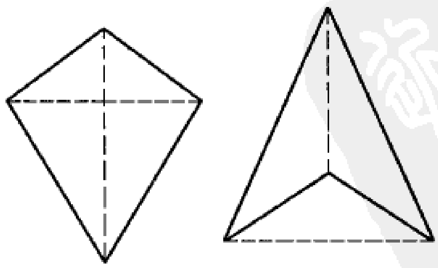


图 185

① 平行四边形除外.

推论 2　等形有一个内切圆和一个旁切圆[①](图 186).

由等腰梯形的两腰及其两对角线构成的图形(一个折四边形),叫做逆平行四边形.

推论 3　逆平行四边形有两个旁切圆(图 187).

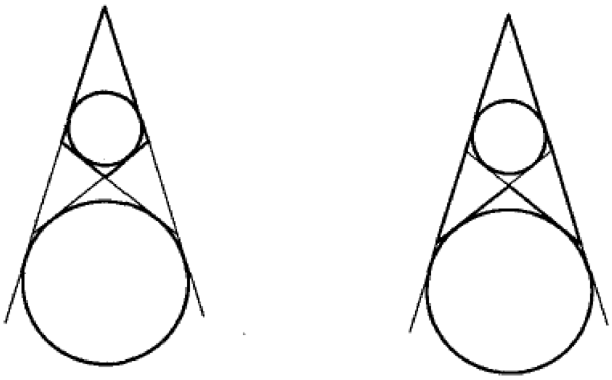


图 186

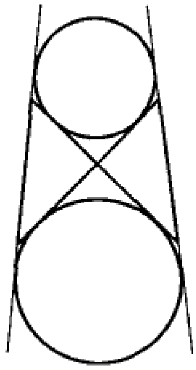


图 187

定理 101　每个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆,而且两圆同心(图 188).

定理 102　设分一圆周为 $n(n \geqslant 3)$ 等份(图 189),则:

(1) 依次用弦联结各分点,可得一个内接正 n 边形;

(2) 依次过各分点作切线,可得一个外切正 n 边形.

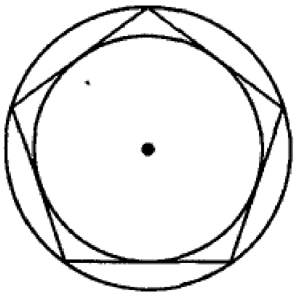


图 188

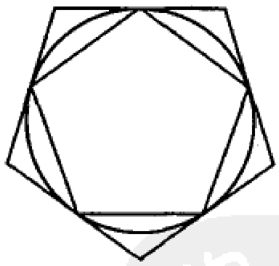


图 189

习题 3

1. 求证:若一个线段的两端在圆内,则整个线段全在圆内.

2. 设 AB 是 $\odot O$ 的直径,P 是射线 OA 上的点,C 是 $\odot O$ 上的任意点,求证:

① 菱形除外.

$PA \leqslant PC \leqslant PB$.

3. 设 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外离，连心线 OO' 交 $\odot O$ 及 $\odot O'$ 于 A,B 及 C,D，四交点成 $\{ABCD\}$ 的顺序. 今在 $\odot O$ 及 $\odot O'$ 上各任取一点 E 及 F，求证：$BC \leqslant EF \leqslant AD$.

4. 设一直线上四点 A,B,C,D 排成 $\{ABCD\}$ 顺序，求证：

(1) 直径各为 AB,CD 的两圆外离；

(2) 直径各为 AC,BD 的两圆相交；

(3) 直径各为 AD,BC 的两圆内含.

5. 在圆上依次取 A,B,C,D 四点，且 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{DA}$，求证：弦 $AC < BD$.

6. 证明 §13 的定理 87 和 88.

7. 求证：以等腰三角形的腰为直径所作的圆必平分底边.

8. 求证：直角三角形的内切圆直径等于勾股的和减去弦所得的差.

9. 在半径为 r 的圆中有六个轮回两两外切的等圆都与原圆内切，试求这六圆的半径长，并证明这六圆同外切于另一个相等的圆.

10. 自点 P 向 $\odot O$ 引切线 PA,PB，延长半径 OB 至 C，使 $BC = OB$，求证：$\angle APC = 3\angle BPC$.

11. AB 是 $\odot O$ 的直径，自 AB 的延长线上一点 C 引一割线交 $\odot O$ 于 D,E，若 $CD = OA$，求证：$\angle ACE = \frac{1}{3}\angle AOE$.

12. 自两相交圆的一交点各引两圆的直径，求证：这两条直径的另一个端点与两圆的另一个交点在同一条直线上.

13. 圆中有两弦，过每弦的端点作本弦的垂线，求证：所作四线交成的平行四边形的中心与圆心重合.

14. 求证：若 AB,CD 是交于圆内且互相垂直的两弦，则 $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$. 反之，若 $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$，则 $AB \perp CD$.

15. 从圆内挖去一个内接凸四边形，造成四个弓形，试证：相对弓形的弧的中点连线互相垂直.

16. 从圆内挖去一个内接三角形，造成三个弓形，试证：联结它们的弧的中点所成的三角形，以原三角形的内心为垂心.

17. 设两圆外切于 T，一条外公切线切它们于 A,B，求证：$\angle ATB = 90°$.

18. 承上题，设 AC,BD 各是两圆的直径，求证：AD 与 BC 交于点 T.

19. 有两圆外切，以它们的连心线（线段）为直径作一圆，求证：这三个圆有共同的外公切线.

20. 求证：外离两圆的两内公切线所截取外公切线的线段等于内公切线，内公切线在两外公切线间的线段等于外公切线.

21. 把外离两圆的所有公切线作出后，求证：

(1) 外公切线上的四个切点同在一圆上；

(2) 内公切线上的四个切点同在一圆上；

(3) 两圆心及每一外公切线与每一内公切线的交点凡六点同在一圆上；

(4) 所得的三个圆同心.

22. 求证：外离两圆的四条公切线的中点同在一条直线上.

23. 自圆内接凸四边形的对角线交点向各边引垂线，求证：顺次联结四垂足所成的四边形有一个内切圆.

24. 证明 §14 的定理 99 和 100.

第三节　比例线段及相似形定理

§15　有向线段

一条直线上的点排成两种不同的顺序，我们说这两种顺序确定了这条直线的两个不同的方向. 在这两个方向之中，我们通常选择一个作为直线的正向，而把另一个叫做负向. 选定了正向的直线，叫做有向直线，或简称为轴[①].

在有向直线上的线段，叫做有向线段. 有向线段的两端，一端叫做始端，另一端叫做终端. 用字母标记有向线段的时候，必须先记始端，后记终端，并在上面加一横线，以示与通常线段有别. 例如，在有向直线 l 上有有向线段 AB（图 190），如果它的始端是 A，终端是 B，那么我们把它记为“$\overline{AB}$”. 一条有向线段从始端到终端的方向若是和有向直线的正向一致的，便称它为正线段，否则称为负线段.

本来有向直线的正向是在两个方向中随意选定的，但是对于两条平行的有向直线，如无相反的说明，总是要使它们的正向一致. 具体地说就是：在平行的有向直线 l 与 l' 上各取一个有向线段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{A'B'}$（图 191），假如它们都是正线段

① “轴”这个词有时也用于通常的直线，例如，对称轴就不是有向直线.

或都是负线段的话,那么 B,B' 两点应该同在连线 AA' 的一侧.

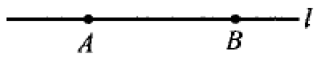


图 190

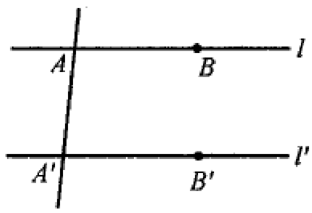


图 191

有向线段既然有正负之分,那么它们的长度也相应的有正负之别.现在我们规定有向线段长度的正负,永远与这线段方向的正负相同.这样一来,我们马上得一基本命题如下:

定理 103 有向线段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的长度有下述关系

$$\overline{AB}=-\overline{BA}$$

注 这关系式有时也书如

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0$$

进一步,我们证明下面的重要命题:

定理 104 (沙勒定理)设在一有向直线上有不同的任意三点 A,B,C,则下面关系式永远成立

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

证明 下面分三种情形来证明.

(1) 假定 B 介于 A 和 C 之间(图 192(a)).这时

$$AB+BC=AC$$

但是在这个情形下,$\overline{AB},\overline{BC},\overline{AC}$ 同向,因而它们的长度具有相同的符号,所以

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

(2) 假定 C 介于 A 和 B 之间(图 192(b)).由(1)有

$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$$

故

$$\overline{AB}-\overline{CB}=\overline{AC}$$

于是据定理 103,即得

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

(3) 假定 A 介于 B 和 C 之间(图 192(c)).同上得

$$\overline{BA}+\overline{AC}=\overline{BC}$$

故

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

注 定理 104 的关系式有时也书如

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

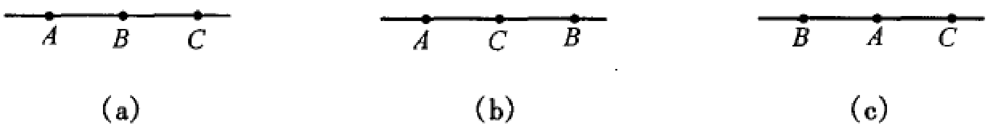


图 192

推论　设 O 是有向直线 l 上选定的一点(普通叫它做原点),$\overline{AB}$ 是 l 上的有向线段(图 193),则

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

从这个式子来看,当点 B 无限趋近于点 A 时,$\overline{AB}$ 的长度便趋近于零.因此,有时我们可以把一点看做是两端重合的线段,而规定它的长度为零.但通常所谓线段,仍指两端不重合者而言.

当给出有向线段 $\overline{AB}$,而在它所在的有向直线 l 上标定一点 P 后(图 194),我们便说点 P 把 $\overline{AB}$ 分为 $\overline{PA}$ 和 $\overline{PB}$ 两个有向线段,而称 P 为 $\overline{AB}$ 的分点.当 P 介于 A 和 B 之间时,叫做内分,P 称为内分点;当 P 非 A 或 B 且不介于 A 和 B 之间时,则叫做外分,P 称为外分点.这些称谓对于通常线段来说一样适用.



图 193

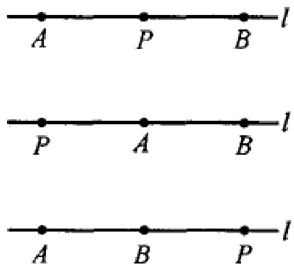


图 194

现在设 P 是有向线段 $\overline{AB}$ 的分点,则 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 这个比叫做 P 分 $\overline{AB}$ 的分比.分比因内分与外分而有内分比与外分比的区别.显然,分比的符号与选定有向直线的正向无关,即:内分比永远为负,外分比永远为正.

特别地,按上面规定知,当 P 重合于 A 时,$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=0$;当 P 重合于 B 时,$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 无意义.

这就是说:在有向直线 l 上除 B 外所有其余的点,对于有向线段 $\overline{AB}$ 来说,都有一个确定的分比.

但是,在 l 上不同的点对于 $\overline{AB}$ 来说是否有不同的分比呢?这问题由如下定

理解决：

定理 105 设 P, P' 是有向线段 $\overline{AB}$ 所在的有向直线 l 上的点(图 195)．若

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} \qquad ①$$

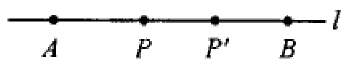


图 195

则 P 与 P' 合而为一．

证明 因为由 ①，得

$$\frac{\overline{PA} - \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{P'A} - \overline{P'B}}{\overline{P'B}}$$

即(定理 104 推论)

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{P'B}}$$

于是

$$\overline{PB} = \overline{P'B}$$

从而

$$\overline{BP} = \overline{BP'}$$

故 P 与 P' 非重合不可(公理 III_1)．

由此可见在 l 上不同的点对于 $\overline{AB}$ 来说应各有不同的分比．

定理 106 设 $\overline{AB} \neq 0$，P 是 $\overline{AB}$ 所在的有向直线 l 上的任意点(图 196)，则 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \neq 1$．

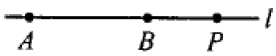


图 196

证明 假设 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$，则 $\overline{PA} = \overline{PB}$，于是导致 A 与 B 重合而与题设 $\overline{AB} \neq 0$ 矛盾．

定理 107 设 O, A, B, P 是一条有向直线 l 上的四个点(图 197)．若命 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$，则 $\overline{OP} = \frac{\overline{OA} - k \cdot \overline{OB}}{1 - k}$．

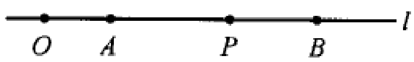


图 197

证明 令 $\overline{OA} = a$，$\overline{OB} = b$，$\overline{OP} = p$，则

$$\overline{PA} = \overline{OA} - \overline{OP} = a - p$$

$$\overline{PB} = \overline{OB} - \overline{OP} = b - p$$

于是

$$\frac{a - p}{b - p} = k$$

解出 p，即得

$$p = \frac{a - kb}{1 - k}$$

§ 16　比例线段

定理 108　一组平行线截两直线所得的对应线段成比例(图 198).

定理 109　设直线 a,b,c 各截 l 及 l' 于 A,B,C 及 A',B',C'(图 198).若 $a\parallel b$ 且 $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$,则 $c\parallel a$.

定理 110　设一直线平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC 而交 AB,AC 两边或其延长线于 E,F(图 199),则 $\overline{EA}:\overline{EB}:\overline{AB}=\overline{FA}:\overline{FC}:\overline{AC}$.

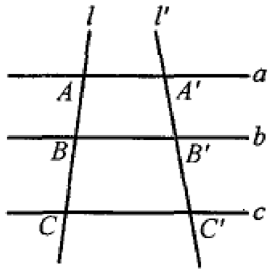


图 198

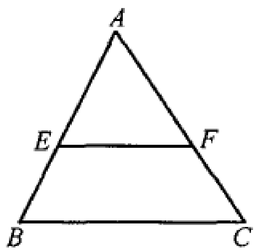


图 199

定理 111　设 E,F 是 $\triangle ABC$ 的 AB,AC 两边或其延长线上的点(图 199),若符合下列条件之一,则 $EF\parallel BC$:

(1) $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{FA}}{\overline{FC}}$;

(2) $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$;

(3) $\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}}$.

定理 112　三角形的内角平分线内分对边所得两线段与两邻边成比例(图 200).

推论　若自三角形一顶点引出一射线内分对边所得两线段与两邻边成比例,则所引射线必是该角的平分线(图 200).

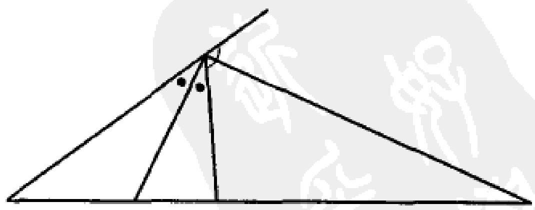


图 200

定理 113　设三角形的两边不等,则其夹角的外角平分线外分对边所得两

线段与两邻边成比例(图 200).

推论 若自三角形一顶点引出一直线外分对边所得两线段与两邻边成比例,则所引直线必是该角的外角平分线(图 200).

§17 相似三角形和相似多边形

定理 114 两三角形若具下列条件之一,则它们必是相似的:

(1) 两对对应角分别相等(图 201);

(2) 两对对应边成比例且夹角相等(图 202);

(3) 各对对应边成比例(图 203);

(4) 两对对应边成比例且其中大边的对角相等(图 204);

(5) 对应边分别平行或者同在一条直线上(图 205);

(6) 对应边分别垂直(图 206).

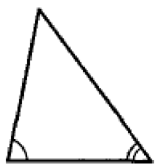


图 201

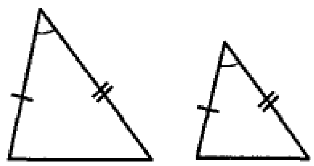


图 202

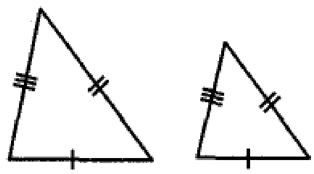


图 203

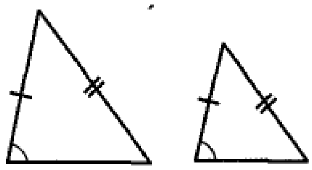


图 204

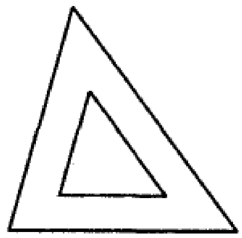


图 205

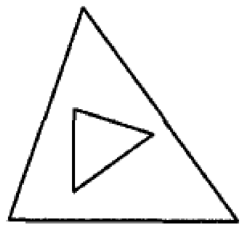


图 206

三角形的相似分两类:设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似,若沿周界 $ABCA$ 及 $A'B'C'A'$ 环绕的方向相同,则叫做真心相似(图 207(a));若方向相反时,则叫做镜像相似(图 207(b)).

定理 115 两直角三角形若具下列条件之一,则它们必是相似的:

(1) 一锐角对应相等(图 208);

(2) 勾股成比例(图 209);

(3) 弦勾或弦股成比例(图 210).

定理 116 相似三角形的对应线段(例如,对应的高、中线等)与对应边成

比例(图 211).

定理 117　三角形的边与它的高成反比例(图 212).

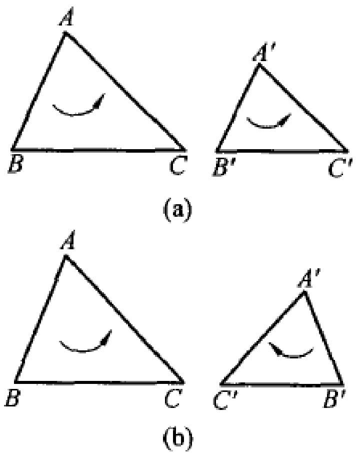


图 207

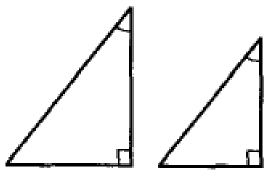


图 208

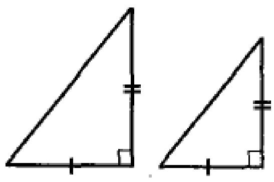


图 209

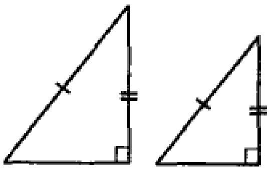


图 210

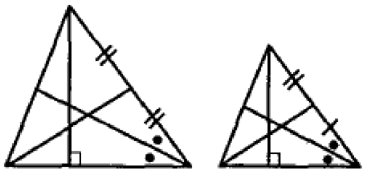


图 211

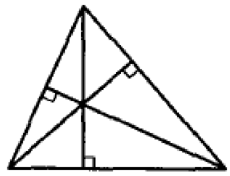


图 212

定理 118　自一点引出一组直线,它们在两平行线上所截的对应线段成比例(图 213).

定理 119　在梯形 $ABB'A'$ 中(图 214),$AA' \mathbin{/\mkern-5mu/} BB'$.今有一直线平行于 AA' 而交直线 AB,$A'B'$ 于 P,P',若命 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$,则

$$\overline{PP'} = \frac{\overline{AA'} - k \cdot \overline{BB'}}{1 - k}$$

定理 120　两个相似的凸多边形可以分别用对角线分裂成一样多个彼此双双相似的三角形(图 215).

注　这定理对于凹多边形也成立,但其证明要超出本课程的范围.

定理 121　相似多边形的周长之比等于对应边之比(图 215).

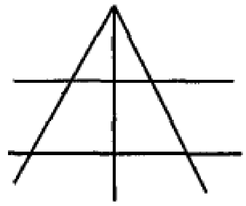


图 213

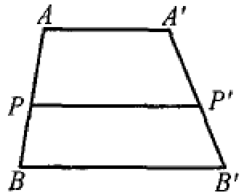


图 214

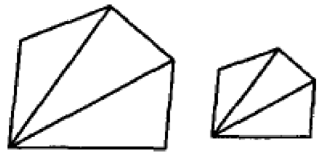


图 215

定理 122　边数相同的正多边形彼此相似,它们的外接圆半径或边心距之比等于边长之比(图 216).

推论　边数相同的正多边形的周长之比,等于它们的外接圆半径或边心距之比.

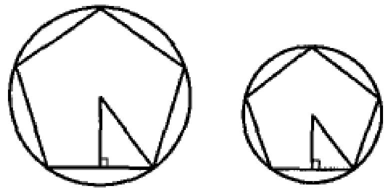


图 216

§18　勾股定理

定理 123　在直角三角形中(图 217):

(1) 弦的高是勾股在弦上射影的比例中项;

(2) 勾或股各是它自己在弦上射影与弦的比例中项;

(3) 勾股的平方之比等于它们在弦上射影之比.

推论　自半圆形的弧上任一点向直径引垂线把直径分为两线段(图 217),则:

(1) 所引垂线是直径上两线段的比例中项;

(2) 该点与直径一端的联结线是相邻线段与直线的比例中项.

定理 124　直角三角形的勾股平方和等于弦的平方(图 218).

这是一个著名而重要的定理,用途极广.它的证法很多,我国从前的数学家均有不少的研究.《周髀算经》载商高(约前 11 世纪) 答周公问,说:“勾广三,股修四,径隅[①]五.” 这话完全符合上面的定理,该书又载陈子(约前 11 世纪) 答荣方问,说:“若求邪至日者,以日下为勾,日高为股,勾股各自乘,并而开方除之,得邪至日.” 这话已经简单地道出上面的定理了.可见我国先民对这定理的发

① “径隅”即指弦长.

现实较希腊的毕达哥拉斯为早，而在我国一向都称直角三角形为勾股形，所以现在我们把上面的定理叫做勾股定理.

一切直角三角形中，三边之比最简单者莫过于"勾三股四弦五"(图219)，这件事实在我国是商高首先发现的，因此这种形式的直角三角形可以叫做商高三角形. 也有人认为古代的埃及人早已知道这个道理所以又有叫做埃及三角形的.

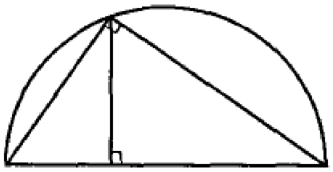


图 217

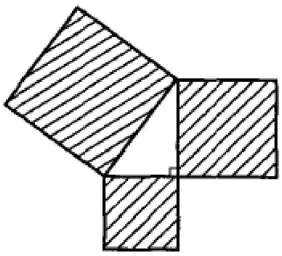


图 218

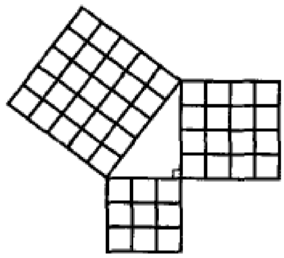


图 219

推论　直角三角形的弦勾(股)平方差等于股(勾)的平方.

定理 125　在 $\triangle ABC$ 中(图 220)，设 $CD \perp AB$ 于 D，则关系式 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AD}$，不论 $\triangle ABC$ 的形式如何永远成立.

这定理是勾股定理的推广，故有广勾股定理之称.

推论 1　三角形一边的平方等于、小于或大于其他两边的平方和，视乎该边的对角是直角、锐角或钝角而定.

推论 2　三角形的一角是直角、锐角或钝角，视乎该角对边的平方等于、小于或大于其他两边的平方和而定.

定理 126　平行四边形各边的平方和等于两对角线的平方和(图 221).

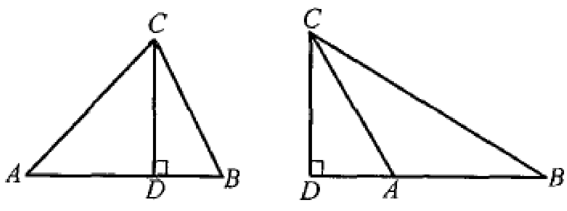


图 220

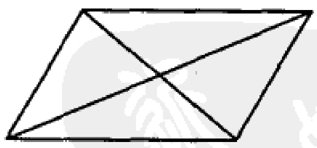


图 221

§ 19　点对于圆的幂

定理 127　过一定点对某定圆任作一割线，交该圆于两点，则自定点至两

交点的两条有向线段之积是常数.

设定点为 P(图 222),定圆为 $\odot O(r)$,所作割线与 $\odot O$ 的两交点为 A,B,则所说的常数为

$$p=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$$

这个常数 p 叫做点 P 对于 $\odot O$ 的幂.当点 P 在 $\odot O$ 的外部时(图 222(a)),p 值为正,它等于自 P 向 $\odot O$ 所引切线(PC)的平方;当点 P 在 $\odot O$ 的内部时(图 222(b)),p 值为负,它的绝对值等于在 $\odot O$ 中过 P 的极小弦(EF)一半的平方;如果点 P 在 $\odot O$ 的上面,那么 p 值便为零了.无论何种情形,p 值均可以表示如下

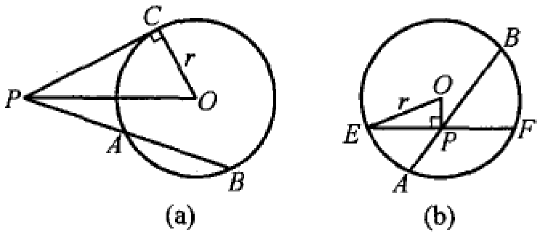


图 222

$$p=PO^2-r^2$$

点对于圆的幂这个概念,在“圆几何学”中极其重要.

定理 128 三角形的垂心分每个高所得的两条有向线段之积彼此相等(图 223).

定理 129 设直线 AB 与 CD 交于点 P(图 224),且等式

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$

成立,则 A,B,C,D 四点同在一圆上.

定理 130 设直线 AB 与 CP 交于点 P(图 225),且等式

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}^2$$

成立,则 $\odot ABC$ 与直线 CP 相切于 C.

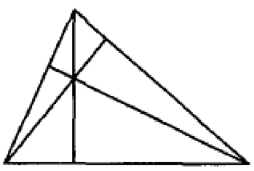


图 223

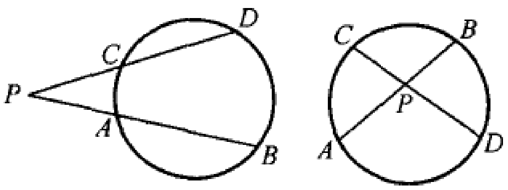


图 224

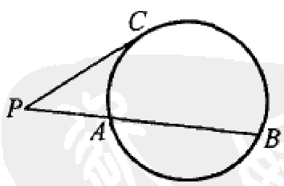


图 225

§20 三角形中几个重要的公式

以下我们以 a,b,c 表三角形的三边,s 表半周,m_1,m_2,m_3 表三中线,h_1,

h_2, h_3 表三高，t_1, t_2, t_3 及 t'_1, t'_2, t'_3 分别表各角的内外平分线[①].

定理 131　三角形的边与中线有下述关系(图 226)

$$b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2m_1^2$$

$$c^2 + a^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2m_2^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m_3^2$$

这定理通常叫做阿波罗尼奥斯定理. 阿波罗尼奥斯(Apollonius, 约前 262—前 190)是研究圆锥曲线的著名的古代希腊几何学家.

定理 132　三角形的中线、高、内外角平分线，各可用三边及半周表出，如表 5 所示(图 226 ~ 229).

表 5

线别	公　　式
中线	$m_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ $m_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$ $m_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$
高	$h_1 = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $h_2 = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $h_3 = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
内角平分线	$t_1 = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$ $t_2 = \frac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)}$ $t_3 = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$
外角平分线	$t'_1 = \frac{2}{\lvert b-c \rvert}\sqrt{bc(s-b)(s-c)}$ $t'_2 = \frac{2}{\lvert c-a \rvert}\sqrt{ca(s-c)(s-a)}$ $t'_3 = \frac{2}{\lvert a-b \rvert}\sqrt{ab(s-a)(s-b)}$

① 即各角的平分线及各外角的平分线.

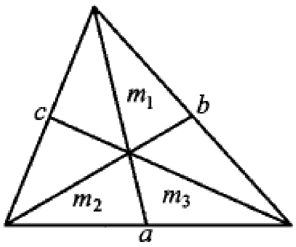


图 226

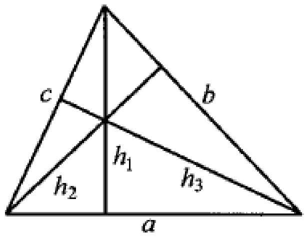


图 227

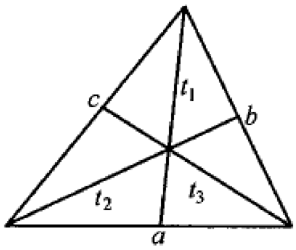


图 228

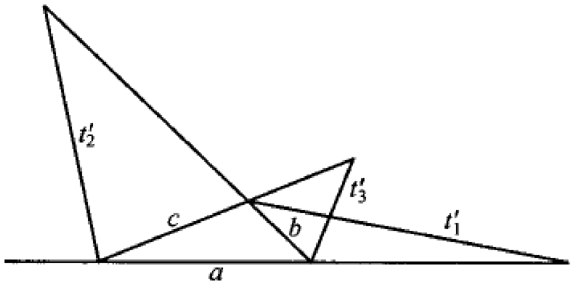


图 229

推论　正三角形的高 h 与边长 a 有下述关系(图 230)

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

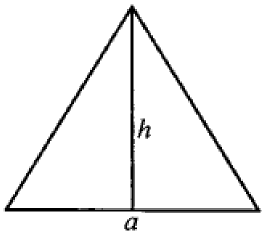


图 230

§21　某些正多边形的边长公式、圆周率、弧长公式

下面我们用 a_n 表正 n 边形的边长，R 表它的外接圆半径.

定理 133　图 231 ～ 237 各正多边形的边长与外接圆半径的关系如表 6 所示.

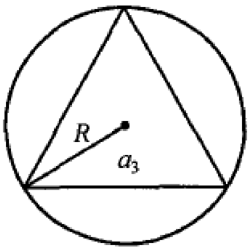


图 231

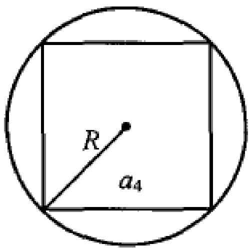


图 232

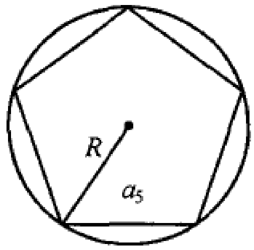


图 233

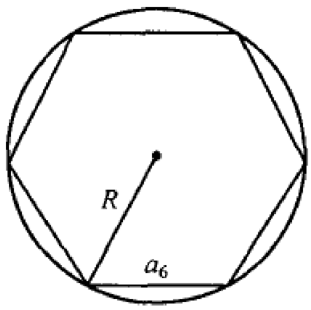


图 234

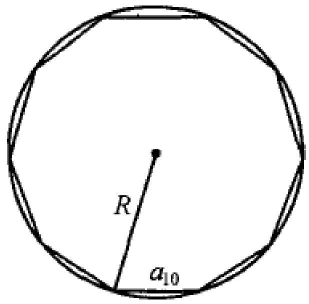


图 235

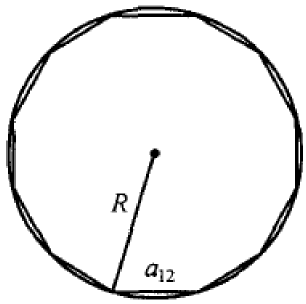


图 236

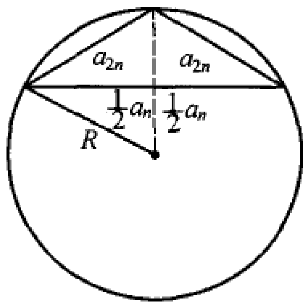


图 237

表 6

正多边形	边长公式
正三角形	$a_3 = R\sqrt{3}$
正方形	$a_4 = R\sqrt{2}$
正五边形	$a_5 = R\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$
正六边形	$a_6 = R$

续表 6

正多边形	边长公式
正十边形	$a_{10}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$
正十二边形	$a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
正 $2n$ 边形	$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}$

末式叫做正多边形的倍边公式.

推论 若 $R=1$,则 $a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$.

注 由这个公式可以计算得单位圆①中某些内接正多边形的边长及周长,如表 7 所示.

表 7

正多边形的边数	边 长	周 长
6	1.000 000 00	6.000 000 00
12	0.517 638 09	6.211 657 08
24	0.261 052 38	6.265 257 12
48	0.130 806 26	6.278 700 48
96	0.065 438 17	6.282 064 32
192	0.032 723 46	6.282 904 32
384	0.016 362 28	6.283 115 52
768	0.008 181 21	6.283 169 28

定理 134 两圆的周长之比,等于两圆的半径或直径之比(图 238).

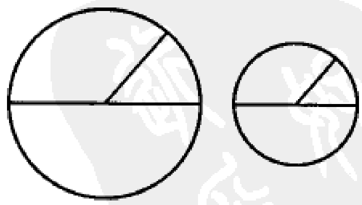


图 238

定理 135 对于一切的圆来说,周长与直径之比是一个常数.

这个常数在数学上是一个很重要的数,叫做圆周率,通常用记号 π 来表示它. π 是一个超越数,它的真值是永远写不尽的

① 半径为单位长即半径等于 1 的圆,叫做单位圆.

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,3\cdots$$

我国最早的数学书《周髀算经》载有“圆径一而周三”，这话是说π等于3，可以称它为古率．西汉刘歆（约前50— 公元23）作铜斛，由其容量而推得π为3.154 66，后人称为歆率．东汉张衡（78—139）计算球的体积，因而推得π为$\sqrt{10}\approx 3.162\,3$，是为衡率．至三国魏景元四年（263年）刘徽注《九章算术》，他曾创“割圆术”，将圆内接正多边形的边数逐次加倍，谓“割之弥细，所失弥少．割之又割，以至于不可割，则与周合体，而无所失矣”．他从圆内接正六边形起，推算到圆内接正九十六边形的周长，求得π为3.14，世称为徽率．在刘徽的这段注文之后，又有一段注文对刘歆所作铜斛的容量加以修正，其中有说“径得一千二百五十，周得三千九百二十七．”这是道出π为$\frac{3\,927}{1\,250}=3.141\,6$了，有人认为这个结果也是刘徽所得①．从前关于$\pi$的研究，大都从一些孤立的具体事物来着想，没有更深入地从理论上去推求，而刘徽创立的割圆术，虽然他本人所得结果还不十分精密，但却指出一个正确的方向，所以他可说是走向正规路线的第一个人．此后南北朝祖冲之（429—500）更开密法，断定

$$3.141\,592\,6 < \pi < 3.141\,592\,7$$

并定分数$\frac{22}{7}$为π的约率，$\frac{355}{113}$为密率．祖冲之的约率与希腊阿基米得所得数值相同，而密率在欧洲则直到1573年才为荷兰数学家奥托（Otho，约1550—1605）所知，但已比祖冲之晚了一千多年．祖冲之这个发现是空前的，它显示着我国先民在科学史上的光辉成就；这，应是我们伟大的中华民族的骄傲．为了表示敬仰先哲的功绩，现在我们把祖冲之的密率叫做祖率．

近世对于π的研究，改用分析的方法，使计算π的值得到莫大的便利，因而这方面的发展极其迅速．最近人们用电子计算机来计算π，竟达到小数点后2 035位②，这是过去所达不到的结果．不过，π在实用上实在无需那样精密，普通取3.141 6已足，再要细些用祖率也尽够了．

推论　设圆的半径为r，周长为c，则$c=2\pi r$．

定理 136　同圆或等圆上两个弧的弧长之比，等于两弧所对圆心角之比（图239）．

定理 137　在半径为r的圆上有一弧（图240），设以l表示它的长，α表示它所对的圆心角，d表示直角，则

① 这个说法现在尚未定论，另有人认为这个结果是祖冲之所创．

② 此数据为作者出版此书时的数据，现在的数据已远远超过它了．

$$l = \frac{\pi}{2d}\alpha r$$

这公式右端的$\frac{\pi}{2d}$之值,视"角度单位"的选择而变更.

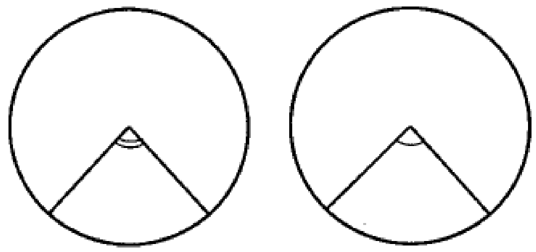


图 239

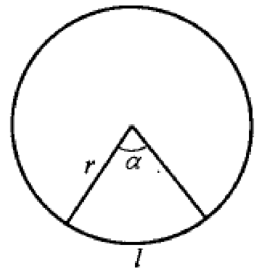


图 240

我们要知道,度量线段时是没有绝对单位的,所以常常不免采用一些实物当作"长度单位"的标准.但度量角时,所用角度单位可以无需借助于任何实物而由角自己来决定.角的这种特性指示了人们如何去选择合用的角度单位.

除了直角是天然的角度单位外,关于角度单位的选择,人们曾经采用下列三种方法:

(1) 六十分制:取直角的$\frac{1}{90}$为单位,叫做度;再分1度为60分,1分为60秒.此制起源于古代的巴比伦,一直流传到现在,仍然盛行不衰.

(2) 百分制:取直角的$\frac{1}{100}$为单位,叫做粳;再分1粳为100分,1分为100秒.此制是法国创立米突制时(1795年)提议的,虽较60分制为便,但因人们狃于习惯,结果没有得到推行.

(3) 弧制:以在圆上与半径等长的弧所对的圆心角为单位,叫做弧度.这样一来,一周角应等于2π弧,因而一平角有π弧,一直角有$\frac{\pi}{2}$弧.但用此制来表示角时,习惯上常把"弧"字略去不写.高等数学多采此制.

假设有一个角,用度去量时得度数为D,用粳去量时得粳数为G,用弧去量时得弧数为R,那么下述关系式显然成立

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}$$

这就是三种量角制互相换算的公式.

上面定理里的弧长公式,在三种量角制中分别表现为:

六十分制(α 为度数)

$$l=\frac{\pi}{180}\alpha r$$

百分制（α 为糔数）

$$l=\frac{\pi}{200}\alpha r$$

弧制（α 为弧数）

$$l=\alpha r$$

其中以弧制的公式为最简.

习题 4

1.设 M 是线段 AB 的中点，O 是直线 AB 上的任意点，求证：

(1) $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$；

(2) $\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=-2\,\overline{AB}\cdot\overline{OM}$.

2.设 A,B,P,Q 是同在一条直线上的四点，命 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=p,\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}=q$，求证

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\frac{p-q}{(1-p)(1-q)}$$

3.设 A,B,C,D 是同在一条直线上的四点，且 $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=k$，$AB,CD$ 的中点分别为 O,M，求证：

(1) $\overline{OA}^2=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$；

(2) $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k^2$；

(3) $\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}=\frac{2}{\overline{AB}}$.

对于这样的 A,B,C,D 四点，我们常说 C,D 调和分离 A,B（也说 A,B 调和分离 C,D），或把这四点合称为调和点列.

4.设三角形一角的内外平分线与对边所在直线相交，求证：两交点与该边的两端成调和点列.

5.在 $\triangle ABC$ 中，I 是内心，I_1,I_2,I_3 各是对着 A,B,C 的旁心.设直线 AII_1，I_2AI_3 交 BC 于 E,F，求证：

(1) $\frac{IA}{IE}=\frac{I_1A}{I_1E}=\frac{AB+AC}{BC}$；

(2) $\frac{I_2A}{I_2F}=\frac{I_3A}{I_3F}=\frac{|AB-AC|}{BC}$.

6. 证明 §16 定理 112 的推论及定理 113 的推论.

7. 过梯形的对角线交点作一条嵌于两腰间且平行于底边的线段,试用两底来表示这条线段的长度.

8. 设直线 $ABC \parallel A'B'C'$,且$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$,求证:$AA'$,$BB'$,$CC'$ 三直线交于一点或互相平行.

9. 求证:梯形两底的中点,对角线的交点,两腰延长线的交点,同在一直线上.

10. 在梯形两底之间作底边的一条平行线,求证:这条直线被一腰和一条对角线所截的线段等于被另一腰和另一条对角线所截的线段.

11. 求证:三角形两边之积等于第三边的高与外接圆直径之积.

12. 求证:圆上任一点到某切线的切点的距离等于该点到某切线的距离与圆直径的比例中项.

13. 求证:圆上任一点到一弦(所在直线)的距离等于该点到过弦端的两切线的距离之比例中项.

14. 求证:设两圆外切,则它们的外公切线是两直径的比例中项.

15. 求证:三角形的重心至三边的距离与三边成反比例.

16. 设直线 $PQ \perp MN$ 于 Q,求证:$PM^2-PN^2=QM^2-QN^2$.

17. 求证:三角形任两边的平方差,2 倍于第三边与其中线在此边上的射影之积.

18. 求证:若四边形的两条对角线互相垂直,则一对对边的平方和等于另一对对边的平方和.

19. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,求证:$HA^2+BC^2=HB^2+CA^2=HC^2+AB^2$.

20. 求证:四边形对边中点联结线的平方和,等于两对角线的平方和的一半.

21. 求证:两相交圆的两交点与两条外公切线的中点同在一条直线上.

22. 设 AB,CD 是 $\odot O$ 的两弦,且前者把后者平分.过 C,D 分别引 $\odot O$ 的切线设交于 P,求证:PO 是 $\angle APB$ 的平分线.

23. 已知 $\triangle ABC$ 及一点 H,AH 与 BC,BH 与 CA,CH 与 AB 分别交于 D,E,F. 若 $\overline{HA}\cdot\overline{HD}=\overline{HB}\cdot\overline{HE}=\overline{HC}\cdot\overline{HF}$,求证:$H$ 必是 $\triangle ABC$ 的垂心.

24. 在 $\triangle ABC$ 中,设 $\angle A$ 的内外平分线交直线 BC 于 E,F,又交 $\triangle ABC$ 的外

接圆于 M,N,求证:

(1)$AB \cdot AC = AE \cdot AM = AF \cdot AN$;

(2)$AE^2 = AB \cdot AC - EB \cdot EC$;

(3)$AF^2 = FB \cdot FC - AB \cdot AC$.

25. 证明 §20 定理 132 中的内外角平分线的公式.

26. 延长等腰三角形 $\triangle ABC$ 的底边 BC 至 D,使 $CD = BC$,求证

$$AD^2 = AB^2 + 2BC^2$$

27. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,设 E,F 是弦 BC 的三等分点,求证:$AE^2 + AF^2 = \frac{5}{9}BC^2$.

28. 用 a,b,c 表示三角形的三边,s 表示半周,R 表示外接圆半径,求证

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

29. 在 §21 定理 133 中,求证:正五边形的边长公式.(提示:应用 a_{10} 及 a_{2n} 的公式.)

30. 求证:圆内接正五边形边长的平方,等于同圆的内接正六边形及正十边形边长的平方和.

31. 已知边长,试求下列正多边形的边心距:

(1) 正五边形;

(2) 正六边形;

(3) 正十边形;

(4) 正十二边形.

32. 设 AB 是一半圆形的直径,O 是圆心.在此半圆形内,以 AO,BO 为直径各作半圆,又在这三个半圆之间的隙缝中作内切圆,求证:这圆的直径等于 AB 的$\frac{1}{3}$.

33. 将一线段随意分成若干小线段,以这些小线段为直径分别作半圆,求证:这些半圆的和为定长.

34. 求证:在两圆中,等长的弧所对圆心角之比,等于两圆半径的反比.

第四节　面积定理

§22　某些直线形的面积

下面我们以 S 表示面积，对某具体图形来说，例如 $\triangle ABC$ 的面积记为“$S_{\triangle ABC}$”.

定理 138　图 241 ~ 252 各图形的面积公式如表 8 所示.

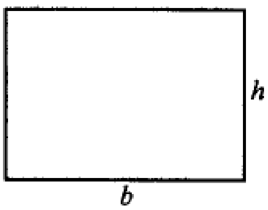


图 241

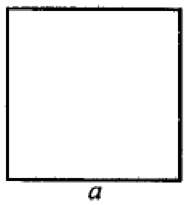


图 242

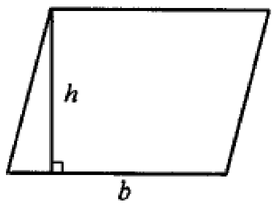


图 243

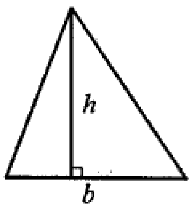


图 244

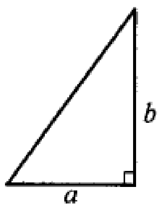


图 245

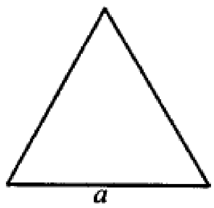


图 246

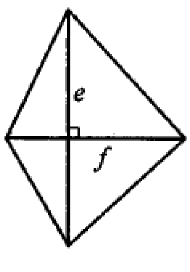


图 247

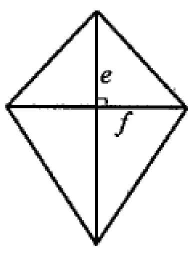


图 248

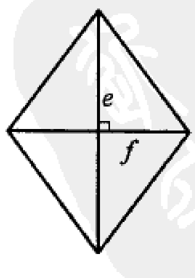


图 249

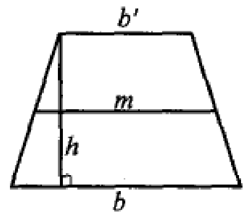


图 250

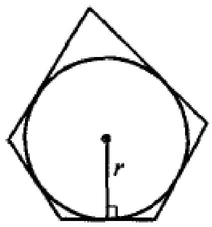


图 251

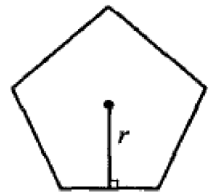


图 252

表 8

图　形	面积公式	附　注
矩形	$S = bh$	b 表底，h 表高
正方形	$S = a^2$	a 表边长
平行四边形	$S = bh$	b 表底，h 表高
三角形	$S = \frac{1}{2}bh$	b 表底，h 表高
直角三角形	$S = \frac{1}{2}ab$	a 表勾，b 表股
正三角形	$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	a 表边长
对角线互相垂直的简单四边形	$S = \frac{1}{2}ef$	e,f 表两对角线
筝形	$S = \frac{1}{2}ef$	e,f 表两对角线
菱形	$S = \frac{1}{2}ef$	e,f 表两对角线
梯形	$S = \frac{1}{2}(b + b')h = mh$	b 表下底，b' 表上底，h 表高，m 表中位线
有内切圆的简单多边形	$S = sr$	s 表半周，r 表内切圆半径
正多边形	$S = sr$	s 表半周，r 表边心距

推论　等底等高的三角形的面积相等(图 253).

定理 139　设 a,b,c 表示三角形的三边，s 表示半周，S 表示面积，则

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad ①$$

这个公式首由希腊数学家海伦(Heron，约公元 62 年前后)发现，因此一般叫做海伦公式.我国南宋秦九韶(约当 13 世纪初叶至中叶)也发现了类似的求

三角形面积的方法.他把三角形的三边分别叫做大斜、中斜、小斜(图 254),在他所著的《数学九章》(1247年)卷五中载着术文说:"以小斜幂并大斜幂减中斜幂,余半之,自乘于上;以小斜幂乘大斜幂,减上,余四约之,为实;一为从隅,开平方得积."若把这段文字写成公式,便是

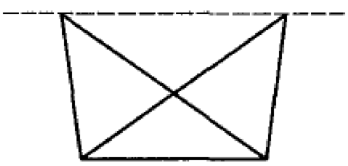


图 253

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}\left\{c^2a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}\right)^2\right\}} \qquad ②$$

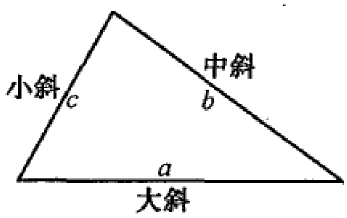


图 254

② 和 ① 形异而实同,秦九韶虽在海伦之后,但却是独立发现,所以我们应把 ① 或 ② 叫做海伦 - 秦九韶公式.又秦九韶当时把这个求三角形面积的方法叫做三斜求积,因此也可称 ① 或 ② 为三斜求积公式.

§23　两面积之比

定理 140　两个三角形的面积之比,等于它们的底高乘积之比(图 255).

推论 1　两个等底三角形的面积之比,等于它们的高之比(图 256).

推论 2　两个等高三角形的面积之比,等于它们的底之比(图 257).

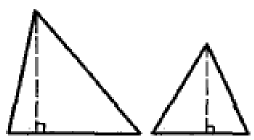


图 255

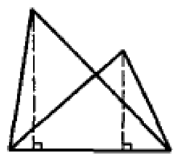


图 256

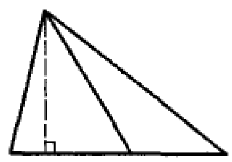


图 257

定理 141　两个三角形若有一角彼此相等或互补,则它们的面积之比等于夹该角的两边乘积之比(图 258).

定理 142　相似三角形的面积之比,等于对应边的平方之比(图 259).

定理 143　相似凸多边形的面积之比,等于对应边的平方之比(图 260).

注　这定理对于凹多边形也成立,但其证明要超出本课程的范围.

推论　边数相同的正多边形的面积之比,等于边长或外接圆半径或边心距的平方之比(图 261).

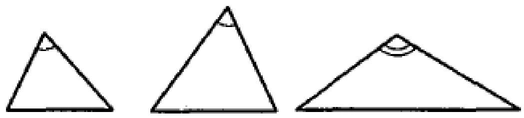


图 258

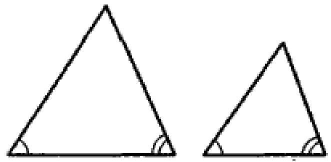


图 259

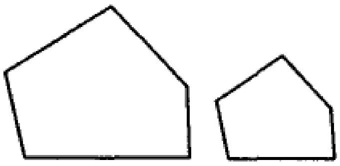


图 260

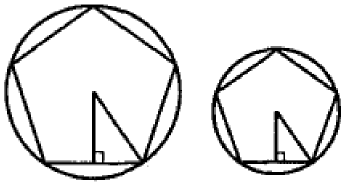


图 261

§ 24　圆 面 积

定理 144　设一圆的半径为 r，直径为 d，面积为 S（图 262），则

$$S = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$$

我国古算书《九章算术》上载有圆面积的求法说："半周半径相乘得积步."又说："周径相乘四而一."这些话的意思实际就是上面的公式.

推论　两圆面积之比，等于它们的半径或直径的平方之比（图 263）.

定理 145　等半径的两个扇形的面积之比，等于它们的弧长之比（图 264）.

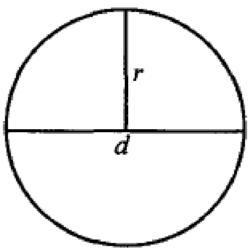


图 262

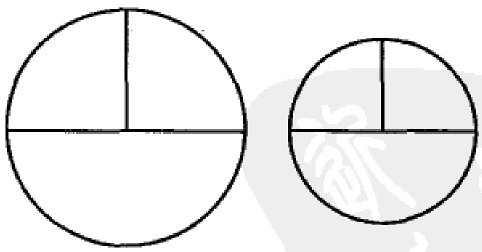


图 263

定理 146　设一扇形的半径为 r，弧长为 l，面积为 S（图 265），则

$$S = \frac{1}{2}lr$$

PDG

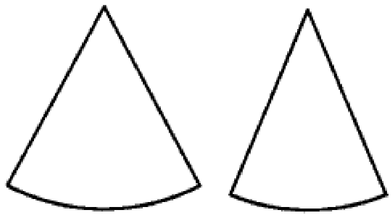


图 264

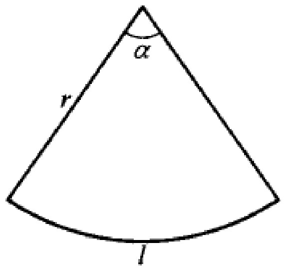


图 265

若命扇形的顶角[①]为 α,那么:

六十分制(α 为度数)

$$S=\frac{\pi}{360}\alpha r^2$$

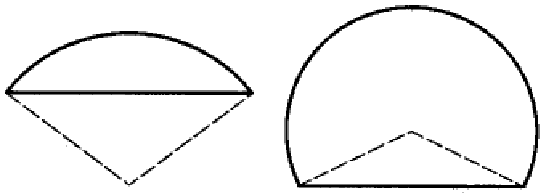
百分制(α 为粮数)

$$S=\frac{\pi}{400}\alpha r^2$$

弧制(α 为弧数)

$$S=\frac{1}{2}\alpha r^2$$

至于欲求弓形的面积,可将它的弦的两端与圆心联结起来,成为一个扇形和一个三角形(图 266),然后由这个扇形和三角形的面积去推求.当弓形的弧是劣弧时(图 266(a)),弓形的面积就等于该扇形与三角形的面积之差;若弓形的弧是优弧(图 266(b)),则弓形的面积等于该扇形与三角形的面积之和.



(a) (b)

图 266

习题 5

1. 求证:梯形的两对角线与两腰围成两个面积相等的三角形.

① 扇形的弧所对的圆心角,叫做扇形的顶角.

2. 以梯形一腰为底另一腰中点为顶点作三角形，求证：所作三角形的面积等于梯形面积的一半.

3. 设梯形的两对角线与两底所围成的两个三角形的面积为 p^2 及 q^2，试证：梯形的面积为 $(p+q)^2$.

4. 将三角形的重心与三顶点相连，求证：这三条联结线必三等分三角形的面积.

5. 在平行四边形的一条对角线上任取一点，过此点作两条直线分别与两邻边平行，这两条直线把平行四边形分为四个小平行四边形，求证：其中不含该对角线的两形必等积.

6. 求证：顺次联结简单四边形各边中点所成四边形的面积，等于原四边形面积的一半.

7. 设 A,B,P,Q 是任意四点，O 是 PQ 的中点. 求证：

(1) 若 P,Q 同在 AB 的一侧，则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle QAB})$；

(2) 若 P,Q 分在 AB 的两侧，则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|S_{\triangle PAB}-S_{\triangle QAB}|$.

8. 以 Rt$\triangle ABC$ 的两腰 AB，AC 各为一边向外边作正方形 $ABDE$，$ACFG$，作 $DH\perp BC$ 于 H，$FK\perp BC$ 于 K，求证：$S_{\triangle BDH}+S_{\triangle CFK}=S_{\triangle ABC}$.

9. 在 $\triangle ABC$ 的外边作正方形 $ABDE$，$BCFG$，$CAHK$，求证：$S_{\triangle AHE}=S_{\triangle BDG}=S_{\triangle CFK}$.

10. 求证：设以直角三角形的三边为对应边作相似的凸多边形，则立于弦的多边形的面积等于立于勾及股的多边形的面积之和.

11. 已知 $\square ABCD$，作直线 $AE\parallel DF$，设前者交 BC 于 E，作 $EF\parallel AG$，设二者交 DF 于 F，G，求证：$S_{AEFG}=S_{ABCD}$.

12. 在矩形 $ABCD$ 中，设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心. 引 $IE\perp CD$ 于 E，$IF\perp DA$ 于 F，求证：$S_{IEDF}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

13. 在凸四边形 $ABCD$ 中，E 是对角线 BD 的中点，过 E 引 EF 平行于 AC 交边 BC 于 F，求证：AF 平分四边形 $ABCD$ 的面积.

14. 在凸四边形 $ABCD$ 中，设 E,F,G,H 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点 I,J 分别是两对角线 AC,BD 的中点. 引直线 $IO\parallel BD$ 及 $JO\parallel AC$，求证：$S_{OHAE}=S_{OEBF}=S_{OFCG}=S_{OGDH}$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC:AB=1:2$. 设 $\angle A$ 的内外平分线交直线 BC 于 E,F，求证：$S_{\triangle ACE}:S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AEF}=1:2:3:4$.

16. 设 D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC, CA, AB 三边上的一点,且 $DE \parallel BA$, $DF \parallel CA$,求证:$S_{\triangle AEF} = \sqrt{S_{\triangle BFD} \cdot S_{\triangle CDE}}$.

17. 问沙田一段,有三斜,其小斜一十三里,中斜一十四里,大斜一十五里,里法三百步,欲知为田几何.(这是秦九韶所著《数书九章》中卷五田域类里的一个题目,意思是要求三角形沙田的面积.原来的答案是 315 顷,但 1 里 = 300 步,1 顷 = 24 000 方步.)

18. 设一扇形的顶角为 2 弧,求证:这扇形与以它的半径为边长的正方形等积.

19. 设 AB 是一半圆形的直径,C, D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点(图 267),求证:AC, AD 两弦与 $\overset{\frown}{CD}$ 所围成图形的面积等于半圆形面积的 $\frac{1}{3}$.

20. 以直角扇形 OAB 的弦 AB 为直径作不过点 O 的半圆(图 268),求证:这半圆与扇形的弧所围成镰刀形的面积等于 $\triangle OAB$ 的面积.(所谓直角扇形,指顶角为直角的扇形.)

21. 设以 Rt$\triangle ABC$ 的勾 AB 及股 AC 为直径向外边作半圆,又以弦 BC 为直径作半圆 BAC(图 269),求证:这三个半圆所围成两个镰刀形的面积和等于 Rt$\triangle ABC$ 的面积.(希波克拉底定理)

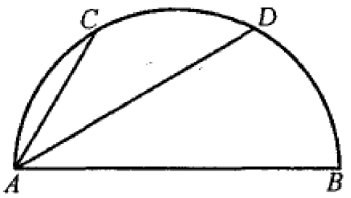


图 267

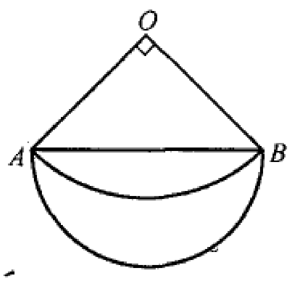


图 268

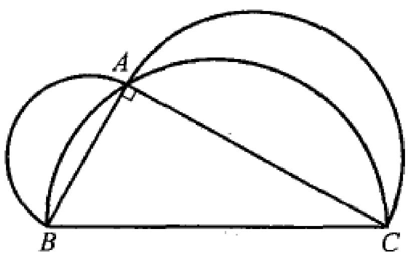


图 269

复习题 1

1. 求证:凸多边形的内角不能有多于三个的锐角.

2. 求证:平行四边形各外角的平分线交成一个矩形,这矩形的对角线等于平行四边形两邻边的和.

3. 求证:凸四边形中,若一对对角的平分线平行或重合,则另一对对角相等;逆过来说,若一对对角相等,则另一对双对角的平分线平行或重合.

4. 过 ▱$ABCD$ 的顶点分别作 $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$,设这四条直线交某

一直线于 A', B', C', D',求证:$\overline{AA'} + \overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$.

5.过三角形的重心任作一直线,求证:在此直线同侧的两顶点与此直线的距离和等于第三顶点与此直线的距离.

6.过 $\triangle ABC$ 的顶点及重心 G 分别作 $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel GG'$,设这四条直线交某一直线于 A', B', C', G',求证:$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\,\overline{GG'}$.

7.求证:正多边形的边心距不小于外接圆半径的一半.

8.求证:有内切圆的四边形,它的任一对对边中点的联结线不大于周长的 $\frac{1}{4}$.

9.在 $\triangle ABC$ 中,引 $AD \perp BC$ 于 D, $DE \perp AC$ 于 E, $DF \perp AB$ 于 F,求证:B, C, E, F 四点同在一圆上.

10.设两圆相切于点 P,过 P 作一直线交两圆于 A, B,求证:过这两交点分别作所在圆的切线必互相平行.

11.设三圆两两相切,过每两切点作直线分别与各圆相交,求证:每圆上的两交点各为一直径的两端.

12.以平行四边形各边分别为直径作圆,求证:所作四圆有两个公切圆.当平行四边形是菱形时,两公切圆中有什么变态?(所谓诸圆的**公切圆**,指与诸圆均相切的圆.)

13.设 $\triangle ABC$ 的内切圆及对着 A, B, C 的旁切圆分别切 BC, CA, AB 于 $X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3$.令 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$,求证:

(1) $AY = AZ = BZ_3 = BX_3 = CX_2 = CY_2 = s - a$;

(2) $BZ = BX = CX_1 = CY_1 = AY_3 = AZ_3 = s - b$;

(3) $CX = CY = AY_2 = AZ_2 = BZ_1 = BX_1 = s - c$;

(4) $AY_1 = AZ_1 = BZ_2 = BX_2 = CX_3 = CY_3 = s$;

(5) $XX_1 = |b - c|$, $YY_2 = |c - a|$, $ZZ_3 = |a - b|$;

(6) $X_2X_3 = b + c$, $Y_3Y_1 = c + a$, $Z_1Z_2 = a + b$;

(7) $YY_1 = ZZ_1 = Y_2Y_3 = Z_2Z_3 = a$, $ZZ_2 = XX_2 = Z_3Z_1 = X_3X_1 = b$, $XX_3 = YY_3 = X_1X_2 = Y_1Y_2 = c$.

14.设 D 是 $\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 的切点,求证:$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的内切圆相切.

15.求证:设四边形 $ABCD$ 有内切圆,则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$ 的内切圆相切,$\triangle BCO$ 与 $\triangle DAB$ 的内切圆也相切.

16. 在 $\triangle ABC$ 中,设以 AB 为弦且切于 AC 的圆及以 AC 为弦且切于 AB 的圆交 BC 于 E 及 F,求证:$AE = AF$.

17. 求证:若圆外一点对圆的视角为 60°,则该点与圆心所连线段必被圆周平分.

18. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心或旁心,AI 交外接圆于 P,求证:$PI = PB = PC$.

19. 求证:三角形的内心与旁心或旁心与旁心所连线段,必被外接圆平分.

20. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,AK 是外接圆的直径,试证:HK 与 BC 互相平分.

21. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,AH 交 BC 于 D 而交外接圆于 K,求证:$DH = DK$.

22. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,求证:$\odot HBC$,$\odot HCA$,$\odot HAB$,$\odot ABC$ 均相等.

23. 三等圆交于一点,求证:这点和其他三个交点必构成一垂心组.

24. 求证:三角形的垂心是垂三角形的内心或旁心,视乎原三角形是锐角的或钝角的而定.普遍地说,垂心组的四点是它的垂三角形的内心和旁心.(三角形(非直角的)三个高线足连成的三角形,叫做原三角形的垂三角形.垂心组中任三点连成的三角形有共同的垂三角形,我们仍把它叫做垂心组的垂三角形.)

25. 正六边形中六条短对角线分别相交,试证:每条均被三等分.

26. 求证:在一圆中,108° 的圆心角所夹的弦,等于半径与内接正十边形的边长之和.

27. 试证:可用下列各组边长相等的正多边形来铺满平面.

(1) 正方形与正八边形;

(2) 正三角形与正十二边形;

(3) 正五边形与正十边形.

28. 设 A,B,C,P 是一直线上的任意四点,求证:$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0$.(欧拉定理)

29. 设三条互相平行的直线 a,b,c 各交两截线 l 及 l' 于 A,B,C 及 A',B',C',求证:$\overline{AA'}\cdot\overline{BC'}+\overline{BB'}\cdot\overline{CA'}+\overline{CC'}\cdot\overline{AB}=0$.

30. 设 A,B,C,P 是一直线上的任意四点,则

$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

(本题称斯图尔特定理,尚可推广,见习题 18 第 17 题.斯图尔特(Stewart,1717—1785)是 18 世纪的英国数学家,于近世初等几何学研究甚多.)

31. 已知 $\square ABCD$.过 A 引一直线设交 BD,BC,CD 于 E,F,G,求证

$$\overline{AE}\cdot\overline{AF}=\overline{AG}\cdot\overline{EF}$$

32. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,P 是直线 BC 上的任意点,求证

$$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{PB}\cdot\overline{PC}$$

33.设 BE,CF 是 $\triangle ABC$ 的高,求证:$\overline{BC}^2=\overline{BA}\cdot\overline{BF}+\overline{CA}\cdot\overline{CE}$.

34.在 $\triangle ABC$ 中,若 $\angle BAC=2\angle ABC$,求证:$BC^2=CA^2+CA\cdot AB$;逆过来说,若 $BC^2=CA^2+CA\cdot AB$,求证:$\angle BAC=2\angle ABC$.

35.求证:若三角形一边的高线和中线将对角三等分,则这角必是直角.

36.求证:直角三角形中,弦的立方大于勾股的立方和.

37.求证:直角三角形的勾股平方之倒数和,等于弦的高的平方之倒数.

38.设 AD 是 Rt$\triangle ABC$ 的弦之高,E,F 是 D 在 AB,AC 上的射影,求证

$$AD^3=BC\cdot BE\cdot CF$$

39.在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle A=90°$,G 是重心,求证:$GB^2=GC^2=5GA^2$.

40.有两同心圆,设 AB 是外圆的直径,P 是外圆上的点,CD 是内圆的直径,Q 是内圆上的点,求证:$AQ^2+BQ^2=CP^2+DP^2$.

41.设 AB 是 $\odot O(r)$ 的一弦,P 是符合于 $OP\parallel AB$ 的一点,求证

$$PA^2+PB^2=2(PO^2+r^2)$$

42.在圆内接四边形 $ABCD$ 中,若 AC 平分 BD,求证:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2AC^2$$

43.设 a,b,c 表示三角形的三边,m_1,m_2,m_3 表示三条中线,求证:

(1)$m_1^2+m_2^2+m_3^2=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$;

(2)$m_1^4+m_2^4+m_3^4=\dfrac{9}{16}(a^4+b^4+c^4)$.

44.已知 $\triangle ABC$ 及一任意点 O,设 AO 与 BC,BO 与 CA,CO 与 AB 各交于 X,Y,Z,求证:$\dfrac{\overline{OX}}{\overline{AX}}+\dfrac{\overline{OY}}{\overline{BY}}+\dfrac{\overline{OZ}}{\overline{CZ}}=1$.

45.设 h_1,h_2,h_3 表示三角形的三高,r,r_1,r_2,r_3 分别表示内切圆及三个旁切圆的半径,求证:

(1) $\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}=\dfrac{1}{r}$;

(2) $\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}-\dfrac{1}{h_1}=\dfrac{1}{r_1}$;

(3) $\dfrac{1}{h_3}+\dfrac{1}{h_1}-\dfrac{1}{h_2}=\dfrac{1}{r_2}$;

(4) $\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}-\dfrac{1}{h_3}=\dfrac{1}{r_3}$;

(5) $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r}$.

46.设 a,b,c 表示三角形的三边,s 表示半周,S 表示面积,r,r_1,r_2,r_3 分别

表示内切圆及三个旁切圆的半径,求证:

(1) $S = sr = (s-a)r_1 = (s-b)r_2 = (s-c)r_3$;

(2) $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$;

(3) $r_1 = \sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$;

(4) $r_2 = \sqrt{\dfrac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}$;

(5) $r_3 = \sqrt{\dfrac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$.

47. 已知 Rt△ABC,令勾 $BC = a$,股 $CA = b$,弦 $AB = c$.试就下面各图(图 270 ~ 281)分别证明下列各等式,其中 $d_i(i = 1,2,\cdots,12)$ 代表各图里的圆的直径.

(1) 图 270: $d_1 = \dfrac{2ab}{a+b+c}$(参看习题 3 第 8 题);

(2) 图 271: $d_2 = \dfrac{2ab}{b+c}$;

(3) 图 272: $d_3 = \dfrac{2ab}{c+a}$;

(4) 图 273: $d_4 = \dfrac{2ab}{a+b}$;

(5) 图 274: $d_5 = \dfrac{2ab}{c}$;

(6) 图 275: $d_6 = \dfrac{2ab}{b+c-a}$;

(7) 图 276: $d_7 = \dfrac{2ab}{c+a-b}$;

(8) 图 277: $d_8 = \dfrac{2ab}{a+b-c}$;

(9) 图 278: $d_9 = \dfrac{2ab}{c-a}$;

(10) 图 279: $d_{10} = \dfrac{2ab}{c-b}$;

(11) 图 280: $d_{11} = \dfrac{2ab}{b-a}(b > a)$;

(12) 图 281: $d_{12} = \dfrac{2ab}{a-b}(a > b)$.

勾股容圆

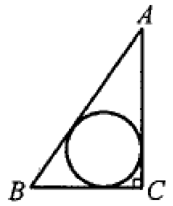


图 270

勾上容圆

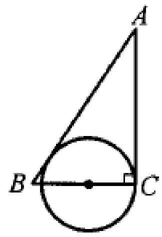


图 271

股上容圆

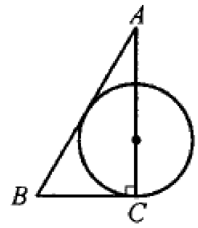


图 272

弦上容圆

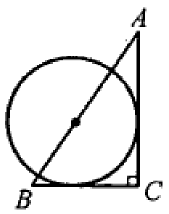


图 273

勾股上容圆

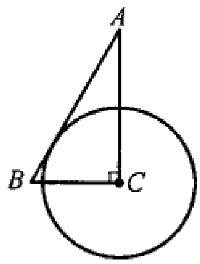


图 274

勾外容圆

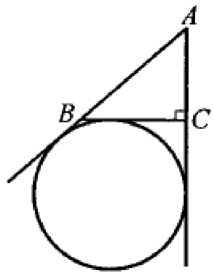


图 275

股外容圆

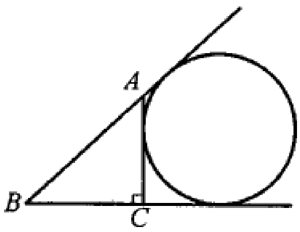


图 276

弦外容圆

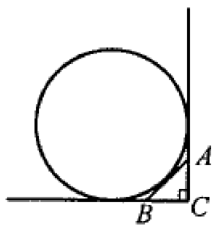


图 277

勾外容圆半

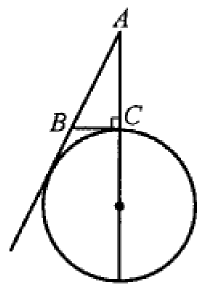


图 278

股外容圆半

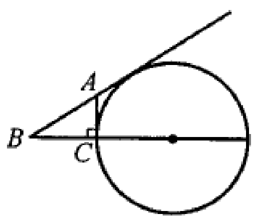


图 279

弦上勾外容圆

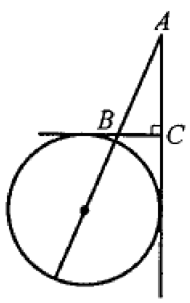


图 280

弦上股外容圆

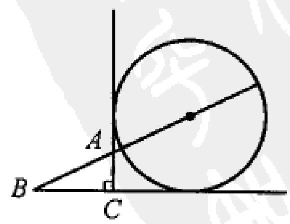


图 281

上述各种圆径的求法,称为测圆术.第一法“勾股容积”见于《九章算术》,是后世测圆术的起源.元初李冶(原名李治,1192—1279)著《测圆海镜》(1248年)推衍洞渊老人的“九容术”(即上述第二至第十法),得题170则,定理500条,其间错综变化,极其巧妙.最后两法是后人补入.

48.试就下列各图(图 282 ~ 290)一一去验证勾股定理(§18 定理 124).

赵君卿弦图

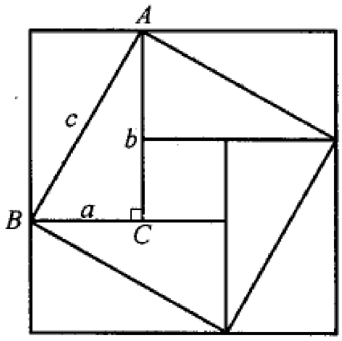


图 282

梅文鼎图

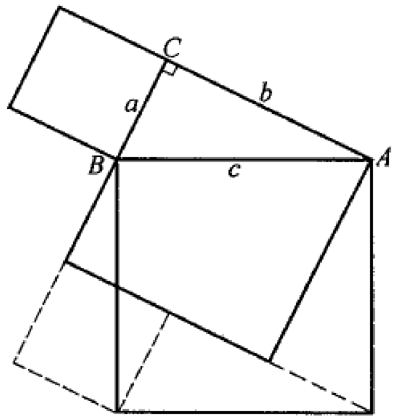


图 283

杨作枚图

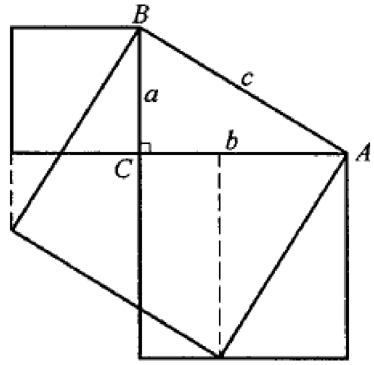


图 284

李锐图

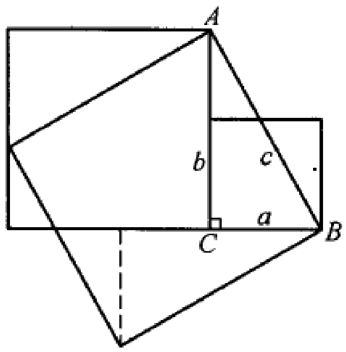


图 285

安清翘图

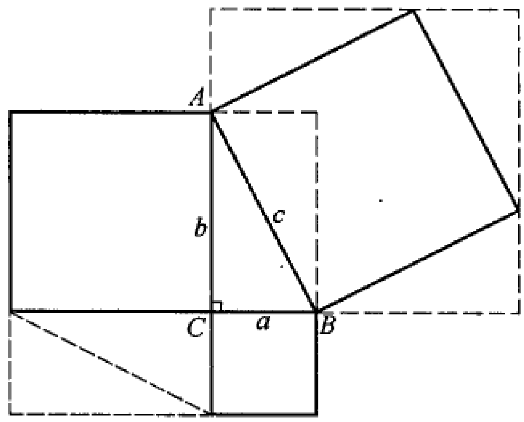


图 286

何梦瑶图

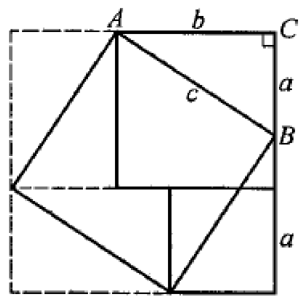


图 287

项名达图

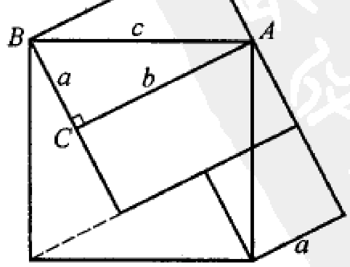


图 288

陈杰图

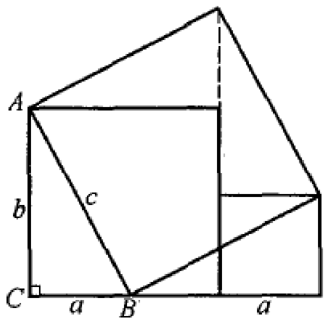


图 289

华衡芳图

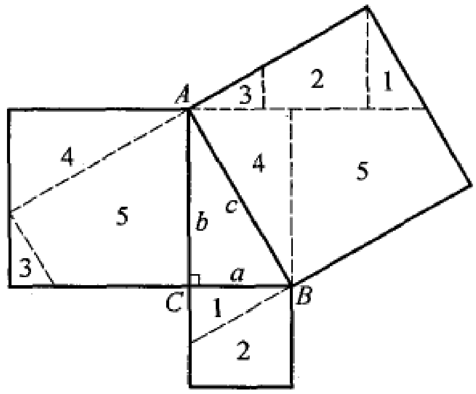


图 290

我国历代数学家发现的关于勾股定理的证法，据说不下两百种，这里所载的图不过是其中一小部分.

49. 求证：等边凸多边形内部任一点至各边的距离和为定长.

50. 求证：等角凸多边形内部任一点至各边的距离和为定长.

51. 已知边长，试求下列正多边形的面积：

(1) 正五边形；

(2) 正六边形；

(3) 正十边形；

(4) 正十二边形.

52. 求证：圆内接正六边形的面积等于同圆外切正六边形面积的$\frac{3}{4}$.

53. 求证：以三角形的三条中线为边构成的三角形，它的面积等于原三角形面积的$\frac{3}{4}$.

54. 已知弓形的弧有 120°，求证：弓形中最大内切圆的周长等于弓形弧长的$\frac{3}{4}$.

55. 求证：顶角为 60° 的扇形的弧长，等于扇形内切圆的周长的一半.

56. 求证：直角三角形弦的高分原形为两个三角形，这两个三角形的内切圆面积和等于原直角三角形的内切圆面积.

57. 将一正方形的两邻边分别 n 等分，自诸分点分别引所在边的垂线，这些直线分正方形为 n^2 个小正方形(图 291)，试证：这些小正方形内切圆的面积和对于任何正整数 n 都有一定的值.

58. 有两同心圆，外圆面积是内圆面积的 2 倍(图 292). 这两圆的圆周圈成

一圆环.作内圆的两平行切线,求证:圆环介于这两条切线间那一部分的面积等于内圆的内接正方形的面积.

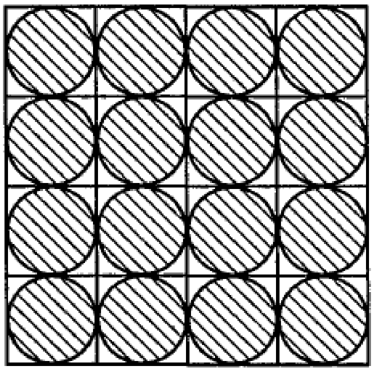


图 291

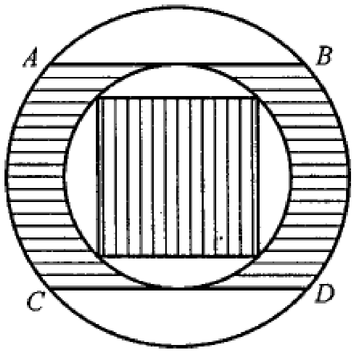


图 292

59.在一圆中作内接正六边形 $ABCDEF$,分别以 BC, CE, EF, FB 为直径向圆外作半圆(图 293).求证:这些半圆与原圆的弧所围成四个镰刀形的面积和等于该正六边形面积的$\frac{2}{3}$.

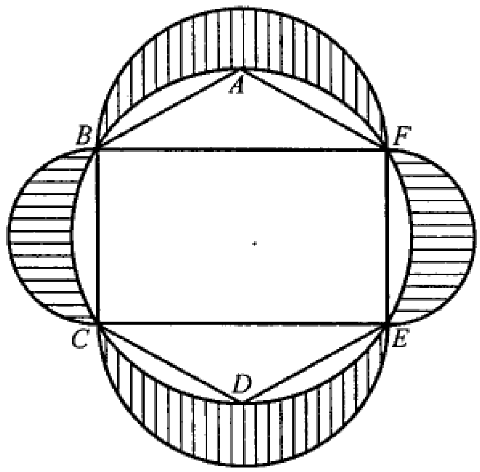


图 293

第三章　推证通法

第一节　命题的形式

§25　命题的四种形式

判断一件事理的语言,称为命题.命题有真有假.命题中给出的假设事项,叫做前提;经过判断得到的结论(未必真确),叫做断案.叙述一个命题,也有只说出前提而要求断案的,这时的命题便成为问题的形式了.

命题有下述四种形式.

(1) 原命题:若 A,则 B.

(2) 逆命题:若 B,则 A.

(3) 对称命题:若 $\overline{A}$①,则 $\overline{B}$.

(4) 反申命题:若 $\overline{B}$,则 $\overline{A}$.

它们相互间的关系,如图 294 所示.

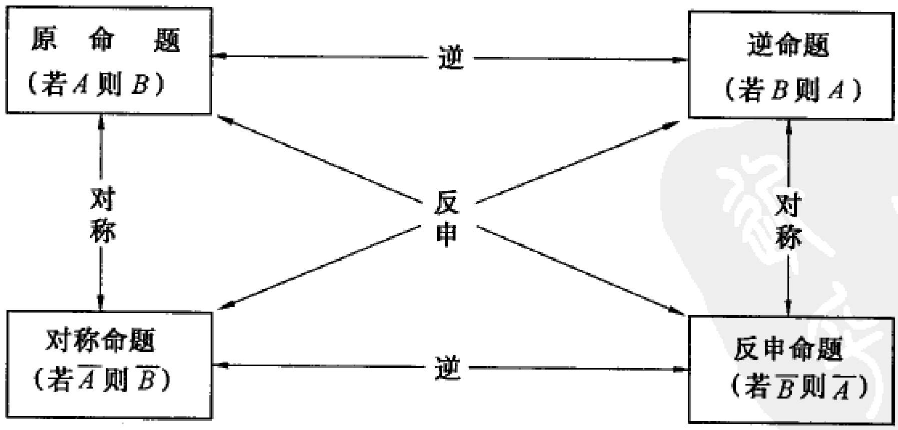


图 294

① "$\overline{A}$"是否定 A 的意思,读作"不 A".其他仿此.

命题既然有真有假，那么上述四种命题之间的真假关系如何呢？现在试看一些具体的例子.

(1) 原命题：三角形中，若两边相等，则对角亦等.—真.

逆命题：三角形中，若两角相等，则对边亦等.—真.

对称命题：三角形中，若两边不等，则对角亦不等.—真.

反申命题：三角形中，若两角不等，则对角亦不等.—真.

(2) 原命题：若两角是对顶角，则它们相等.—真.

逆命题：若两角相等，则它们是对顶角.—假.

对称命题：若两角非对顶角，则它们不等.—假.

反申命题：若两角不等，则它们非对顶角.—真.

(3) 原命题：若四边形有一对对边互相平行，则另一对对边彼此垂直.—假.

逆命题：若四边形有一对对边彼此垂直，则另一对对边互相平行.—假.

对称命题：若四边形有一对对边不互相平行，则另一对对边不互相垂直.—假.

反申命题：若四边形有一对对边不互相垂直，则另一对对边不互相平行.—假.

由这些例子，我们发现：互逆或互相对称的两个命题，可以都真，可以都假，也可以一真一假；而互为反申的两个命题，真则同真，假则同假.

两个互为反申的命题同真同假，不但在上面举的例子中是这样的，对一切命题来说都是这样的.这件事实说明了互为反申的两个命题虽然表面看上去不同，实际上是一样的.这叫做反申命题的等效性，在数学上的作用很大，它给命题的证明开辟了一条广阔的道路.

§26　定理的结构

如果一个命题的真实性是证明出来的，即由公理或其他已由公理证其为真实的命题经过逻辑推论而得的，那么就称为定理[①].定理中的前提和断案，为了区别于一般命题，前者改称题设，后者改称题断.

定理既是经过逻辑推论认为真实的命题，所以它实际就是叙述题设和题断

① 著书时往往把由某定理很易导出的定理附于某定理之后，而称其为推论.有些命题(例如，例题、习题)表面虽不号称定理，但实质上仍然是定理.

间一种必然关系的条文；换句话说，定理的真谛无非是说有了这样的题设，必然得到那样的题断．由此可见一个定理的结构，可以概括地说为“题设隐含题断”，也可用记号表示为

$$\text{题设} \Rightarrow \text{题断}$$

这个表达式称为隐含式，它的意思是说题断所说的现象，本已隐伏于题设所指情形之中．

叙述定理的条文，在字面上可以有种种形式．有些定理把题设和题断叙述得极其明显．例如，定理“若四边形的两条对角线互相垂直，则一对对边的平方和等于另一对对边的平方和”（习题 4 第 18 题），不言而喻，其中的“四边形的两条对角线互相垂直”就是题设，“一对对边的平方和等于另一对对边的平方和”就是题断；若用记号来表示，则为（图 295）：

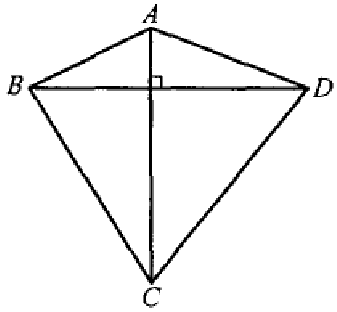


图 295

四边形 $ABCD$ 中，$AC \perp BD \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$．

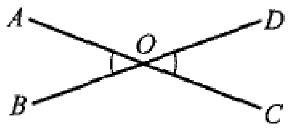


图 296

但从某些定理的字面看来，题设和题断往往未必表现得很分明，这时需要我们把定理的字句加以改造①．例如，“对顶角相等”这个定理（§5 定理 5），字句里并无“若”、“则”等字，我们把它改造为“若两角是对顶角，则它们相等”后，那么定理的题设和题断就显得清楚了；若用记号表示，就是（图 296）

$$\angle AOB \text{ 与 } \angle COD \text{ 是对顶角} \Rightarrow \angle AOB = \angle COD$$

注　著书时为求文字简洁，因而对每条定理的叙述往往各人手法不一，所以如何改造定理的字句去了解定理的结构，是学习几何学的人必须掌握的技能．

一个定理的题设和题断所含的事项，大多数都不是很单纯的（尤其题设是如此），这时便需要我们把它们详细分为若干条，才能清楚地了解这个定理的结构．例如，“等角的邻补角相等”这一定理（§5 定理 4），它的题设里面就含有三个事项，而题断则仅含一个事项；用记号表示时，应为（图 297）

① 改造定理的字句，是指用更明显的文字去代替原来的句子，切莫把定理的内容给歪曲了．

$$\left.\begin{array}{r}\angle AOB=\angle A'O'B'\\ \angle BOC\text{ 是 }\angle AOB\text{ 的邻补角}\\ \angle B'O'C'\text{ 是 }\angle A'O'B'\text{ 的邻补角}\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BOC=\angle B'O'C'$$

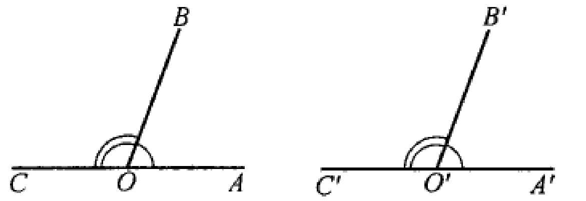


图 297

又如,定理"三边对应相等的两个三角形必然全等"(§5 定理 2(3)),把它图解出来应是(图 298):

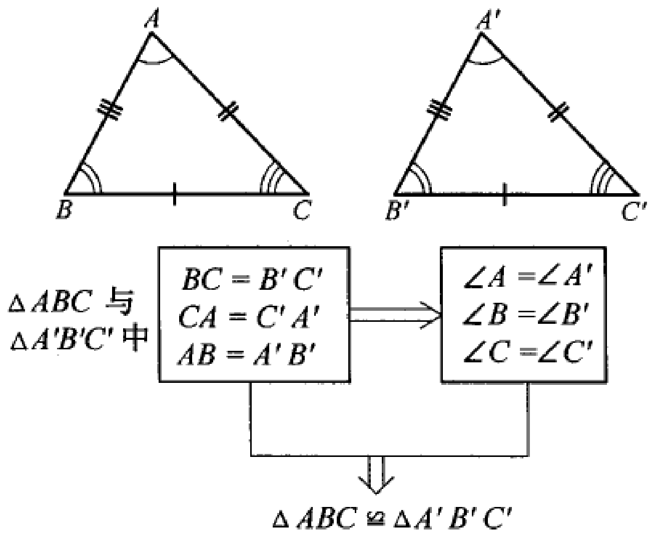


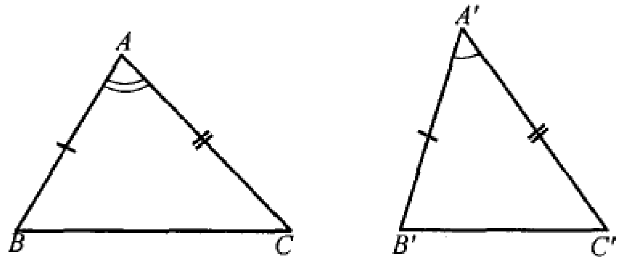
图 298

像这样把一个定理的题设和题断尽量剖析为若干条单纯的事项,在制造逆命题时是一个很必要的工作.

§27　逆命题制造法、逆定理

前面(§25)讲过,假定原命题是"若 A,则 B",那么逆命题便是"若 B,则 A".这是指的当 A 和 B 都只含一条事项时的逆命题制造法.例如,"对顶角相等"这一命题,它的前提是"两角是对顶角",断案是"该两角相等",由此可得逆命题"若两角相等,则它们是对顶角",再简单一点说就是"两等角是对顶角"(假的).但是当一个命题的前提或断案所含事项不止一条的时候,习惯上制造它的

逆命题便有所不同了.例如,定理"若两个三角形有两边对应相等,则夹角大的,它所对的边也大"(§5定理8(1)),分析起来,它的结构如下(图299):



$$\left.\begin{array}{r}\triangle ABC\text{ 与}\\ \triangle A'B'C'\text{ 中}\end{array}\left\{\begin{array}{l}AB = A'B'\\ AC = A'C'\\ \angle A > \angle A'\end{array}\right.\right\}\Rightarrow BC > B'C'$$

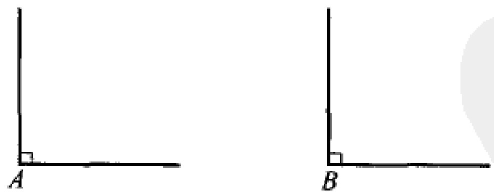
图 299

按照惯例,无不以"$\angle A > \angle A'$"与"$BC > B'C'$"交换来造成逆命题:

$$\left.\begin{array}{r}\triangle ABC\text{ 与}\\ \triangle A'B'C'\text{ 中}\end{array}\left\{\begin{array}{l}AB = A'B'\\ AC = A'C'\\ BC > B'C'\end{array}\right.\right\}\Rightarrow \angle A > \angle A'$$

此即定理"若两个三角形有两边对应相等,则第三边大的,它所对的角也大"(§5定理8(2));而未闻有以"$AB = A'B', AC = A'C', \angle A > \angle A'$"与"$BC > B'C'$"交换后作为逆命题的说法.因此从习惯,制造逆命题时,要在原命题的前提与断案中各取出一般多条的事项交换.

将一定理的题设及题断,细分为若干条事项,然后交换其一般多条,这样所得的逆命题,往往有真确的希望.试看"凡直角都相等"这一定理(§6定理19),若就定理原貌造成逆命题:"凡等角都是直角",则显然不成立;倘先将原定理详细分析为(图300):



$$\left.\begin{array}{l}\angle A\text{ 是直角}\\ \angle B\text{ 是直角}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A = \angle B$$

图 300

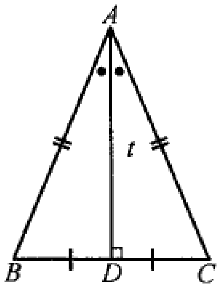
然后按上述原则以"$\angle B$ 是直角"与"$\angle A = \angle B$"交换,那么却得到真确的

逆命题

$$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ 是直角} \\ \angle A=\angle B\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B \text{ 是直角}$$

即“等于直角的角也是直角”.

一个定理的逆命题如果真确,则此逆命题即称为该定理的逆定理.如上所述,由一个定理往往可以造出许多逆命题,选择其中真确的,往往可以得到许多逆定理.例如,有定理“等腰三角形顶角的平分线也是底边的中垂线”(§6 定理27),把它分析为(图 301):



$$\triangle ABC \text{ 中}\left\{\begin{array}{l}①AB=AC \\ ②AD \text{ 平分 } \angle A\end{array}\right\} \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}③AD \perp BC \\ ④AD \text{ 平分 } BC\end{array}\right.$$

图 301

而后,可以造成五个逆命题,并且都是原定理的逆定理:

(1) 若三角形顶角的平分线又是底边的高线,则也是底边的中线,且三角形的两腰相等.

这是 ① 与 ③ 交换的结果.

(2) 若三角形顶角的平分线又是底边的中线,则也是底边的高线,且三角形的两腰相等.

这是 ① 与 ④ 交换的结果.

(3) 等腰三角形底边的高线也是底边的中线及顶角的平分线.

这是 ② 与 ③ 交换的结果.

(4) 等腰三角形底边的中线也是底边的高线及顶角的平分线.

这是 ② 与 ④ 交换的结果.

(5) 若三角形底边的高线与中线重合,则该线也是顶角的平分线,且三角形的两腰相等.

这是 ①,② 与 ③,④ 同时交换的结果.

把一个定理的题设及题断析成若干小条时,分析的方法或许因人而不同.譬如,对于刚才所举的定理,也许有人把它剖析为

$$\triangle ABC \text{ 中} \left\{ \begin{array}{l} ①' AB = AC \\ ②' t \text{ 是 } \angle A \text{ 的平分线} \end{array} \right\} \Rightarrow ③' t \text{ 是 } BC \text{ 的中垂线}$$

这时又可得如下两个逆定理:

(6) 若三角形底边的中垂线与顶角的平分线重合,则三角形的两腰相等.

这是 ①′ 与 ③′ 交换的情形.

(7) 等腰三角形底边的中垂线也是顶角的平分线.

这是 ②′ 与 ③′ 交换的情形.

此外尚有别的分法,留给读者自己思考(见习题 6 第 11 题).

假如我们每见一个定理都进行详尽的剖析,然后辨别各逆命题的真假,往往可由此发现新定理.

§28　同一法则

我们已经知道,一个定理的逆命题未必成立,所以必须经过证明确知其成立之后,才可以肯定它为逆定理. 但在比较特殊的情形下,也有极易觉察得到的. 如

"中国是世界上人口最多的国家"　①

这句话,是公认为对的,而把它倒过来说成

"世界上人口最多的国家是中国"　②

大家也会认为完全正确. 试问其中有什么道理使得人们对 ② 这般信服无疑呢? 说起来道理也很简单,因为世界上只有一个国家叫做中国,同时世界上也只有一个国家人口最多,可见"中国"和"世界上人口最多的国家"实际上是相同的,所以把 ① 说成 ② 便没有什么不可以了. 类似这种例子在几何上也不少. 例如对于定理

"等腰三角形顶角的平分线也是底边的中垂线"　③

来说,它的逆命题

"等腰三角形底边的中垂线也是顶角的平分线"　④

的真确性也是我们确信不疑的,确信的根据在于一个角的平分线或一条线段的中垂线都属唯一存在(§5 定理 14,15, §6 定理 18).

像上面所举的两个互逆命题 ③ 和 ④,当我们已知某一个成立时,就会立刻知道另一个也成立,这个道理叫做**同一法则**. 有时我们也说这样的两个互逆命题是**彼此等效**的.

对某个定理欲使用同一法则,必须先把题设和题断所含事项分辨清楚,然

后断定可否使用;切戒看见某某事物唯一存在,便滥用这个法则,不然的话,很可能陷入错误.例如,我们绝不能从

"等腰三角形两底角的外角平分线相等" ⑤

这一定理,贸贸然认为等腰三角形每个底角的外角平分线都是独一无二的,便根据同一法则来断定

"有两外角平分线相等的三角形必是等腰的" ⑥

的真确.事实上,这样推断毫无逻辑根据,与 ⑥ 的成立不成立互不相干.怎见得呢?试将 ⑤ 改叙为

"如果一个三角形是等腰的话,那么它的两个底角的外角平分线相等" ⑤′

我们便会觉察到它的题设和题断所含事项不但不符全等一法则,而且目前也还没有任何根据足可由 ⑤′ 断定 ⑥ 成立[①],因为此时此地尚未知道究竟是否有两外角平分线相等的非等腰三角形存在.

§29 分断式命题

假如把 n 个命题合起来叙述成一个命题 N,而该 n 个命题的前提和断案所含事项双方都面面俱到且互不相容,那么这个命题 N 叫做分断式命题.例如,定理"在同圆或等圆中,等弦距圆心等远,不等弦距圆心不等远,大者距离较近,小者距离较远",其中题设把两弦的大小关系"等于"、"大于"、"小于"一一道尽,题断也把两弦距圆心的远近关系"等远"、"较近"、"较远"一一说完,而且这些关系又各不相容,所以这个定理是分断式命题.

在一个分断式命题中,假设前提及断案各为 A_i 及 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$,而

$$A_i \Rightarrow B_i$$

现从这 n 个隐含式中,取出 $n-1$ 个来,譬如

$$A_i \Rightarrow B_j \quad (j=2,3,\cdots,n)$$

那么由于分断式命题的本性,这 $n-1$ 个隐含式联立起来实无异于说

$$\overline{A}_1 \Rightarrow \overline{B}_1$$

由此(§25) $B_1 \Rightarrow A_1$

同理 $B_k \Rightarrow A_k \quad (k=2,3,\cdots,n)$

这就是说,凡属分断式命题,一旦其本身成立,它的逆命题一定也成立.

① 实际 ⑥ 并不成立.

关于分断式命题,实际上我们已屡见不鲜,不过平常大都将原命题与逆命题合并叙述或是把其中各个命题(或一部分)拆开来分条叙述了.例如,§6 的定理 24;§11 的定理 64,定理 67,定理 68,定理 70;§12 的定理 75,定理 80,定理 81;§13 的定理 84;§18 定理 125 的推论等,都是分断式命题和它的逆命题合在一起所成的定理;§5 的定理 1,定理 2(1),定理 2(3),定理 3,定理 6,定理 7,定理 8;§7 的定理 29,定理 32,定理 33 等,就是分开叙述的.

习题 6

1. 什么叫做命题?一个命题的内容包含哪两个部分?

2. 命题有哪几种形式?它们相互间的关系怎样?

3. 互逆的两个命题是不是永远真则同真,假则同假?试举例说明.

4. 互相对称的两个命题是不是永远一真一假?试举例说明.

5. 什么叫做反申命题的等效性?

6. 什么叫做定理?每个定理的结构是怎样的?

7. 试改造下列定理的字句,使题设和题断表现得很分明:

(1) 在每个三角形中,较大的边所对的角也大;

(2) 通过已知直线外一已知点可引该已知直线的平行线;

(3) 三角形的内角和等于二直角;

(4) 三角形一边的平方等于、小于或大于其他两边的平方和,视乎该边的对角是直角、锐角和钝角而定.

8. 当一个命题的前提或断案所含事项不止一条时,习惯上是怎样制造它的逆命题的?

9. 什么叫做逆定理?如果说:"某定理的逆定理不成立",这话有无语病?

10. 试制造定理"在一圆中,弦的中垂线必通过圆心"的逆命题,并一一辨明其真假.

11. 试制造如下定理的逆命题,并一一绘图辨明其真假

$$\triangle ABC\text{ 中}\begin{cases}(1)\,AB=AC\\(2)\,t\text{ 平分 }\angle A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3)\,t\perp BC\\(4)\,t\text{ 平分 }BC\end{cases}$$

12. 什么叫做同一法则?使用这个法则时应注意什么?

13. 什么叫做分断式命题?这种命题与其逆命题间有什么特性?

14. 设 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 同在公共边 BC 的一侧(图 302),求证:

(1) 若点 A' 在弓形 BAC 的弧上,则 $\angle A'=\angle A$;

(2) 若点 A' 在弓形 BAC 的内部,则 $\angle A'>\angle A$;

(3) 若点 A' 在弓形 BAC 的外部,则 $\angle A' < \angle A$.

试问(1),(2),(3) 的逆命题一定成立吗?什么道理?

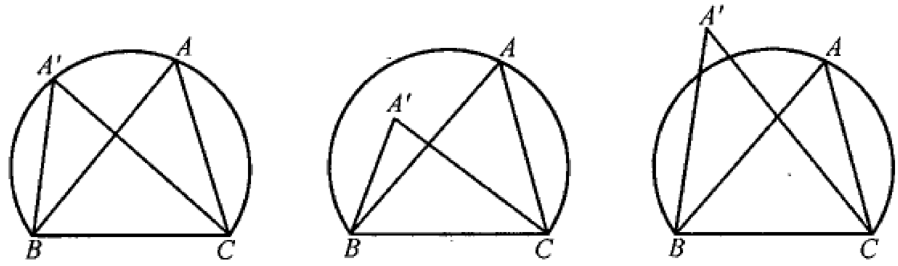


图 302

15. 在下列两个命题中,试择其中之一证明:

(1) 三角形的某边等于、小于或大于它的中线之 2 倍,视乎该边的对角是直角、锐角或钝角而定;

(2) 三角形的某角是直角、锐角或钝角,视乎它的对边等于、小于或大于该边的中线之 2 倍而定.

当二者之一证明后,另一个是否就随着成立?为什么?

第二节　直接证法与间接证法

§ 30　直接证法与间接证法的意义

人们认识一切事物的过程,都是从经验获得感性认识,再经过归纳、思维、判断,之后达到理性认识.前面(§ 25) 说过,判断的语言就是命题.一个命题有无价值,须看它是否符合于客观现实.要证实这点,经验固然重要,但经验的次数终究有限,我们不应该对于某种现象只凭有限次的经验便武断它永远不错.譬如,三角形的三条中线,人们经过实验,几乎都相信它们交于一点,这是由经验归纳而得的信念;然而图形或许耦合,画线容有弯曲,怎晓得方才那有限次经验之中,不是次次凑巧,或线迹弯曲呢?一般图形是否如此,非进一步作理论上的核验,不足令人信服.像这样希望从理论上来辨明一个命题是否正确,可说是人们进步的要求.这个要求的实质是什么呢?那就是要引用其他命题按着逻辑推理来判断当前命题的正确性,而所引用的命题,它的正确性必须是已经认可

的. 在数学上, 这种推理工作叫做证明[1].

既然一个命题的成立, 在判断之前必须经过确凿无疑的证明, 那么如何去证明一个命题就值得研究了. 我们知道, 任何命题都有和它等效的命题, 因此, 要证明某个命题真确, 可以斟酌方便, 或直接从原题入手, 或间接从它的等效命题着眼. 由于这两方面的不同, 证明的方法便分为直接的与间接的两种.

Ⅰ. 直接证法

在 §26 中曾经分析过, 任何定理的结构都不外是"题设隐含题断", 但细考起来, 每个定理仍然需用本科公理或前此定理为根据, 因此详细说起来为

$$\left.\begin{array}{l}\text{本科公理}\\\text{前此定理}\\\text{本题题设}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{本题题断}$$

那么, 我们要证明一个定理的时候, 就可以由题设出发, 根据公理及前此定理, 按照逻辑推理, 一直推到所要的题断, 其一般过程如

$$\text{题设} \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \text{题断}$$

像这样由原题入手的证明方法, 叫做直接证法. 几何学中多数定理采用这种方法证明.

Ⅱ. 间接证法

有的定理, 往往不易或不能从原题直接证明, 这时不妨改而证明它的等效命题成立, 结果也能间接地达到目的. 这样的证明方法, 叫做间接证法.

用间接证法证明定理时, 多半是证明定理的反申命题成立. 具体地说, 当欲证定理

$$\text{题设} \Rightarrow \text{题断}$$

而不易着手的时候, 可以改证它的反申命题

$$\text{否定题断} \Rightarrow \text{否定题设}$$

成立. 此时实际无异于要证明

[1] 公理的正确性不是推理证明的, 而是人们在无数次实践中经过不断的验证所得到的结论, 所以证明的过程归结起来仍需立足于实践的基础之上.

$$\left.\begin{array}{l}\text{本科公理}\\ \text{前此定理}\\ \text{本题题设}\\ \text{否定题断}\end{array}\right\}\text{四者不相容}$$

其具体表现为

$$\left.\begin{array}{l}\text{本科公理}\\ \text{前此定理}\\ \text{本题题设}\\ \text{否定题断}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\text{一结果为某公理或某定理或题设或临时}\\ \text{假定所不容,或竟自相矛盾者}\end{array}$$

这就是说,题断一假,便会出错,而此种错处,既不是由于推理有误,则不能不归咎于题断为假的假定,因此题断不能假,那就是题断真了.这种间接证法,通常叫做**反证法**,它对许多基本命题特别有用.用反证法证题时的实际措辞,是假定否定题断为真,然后由此引出一种不合理的现象,其过程如

$$\left\{\begin{array}{l}\text{否定题断}\Rightarrow A\Rightarrow B\Rightarrow C\\ \text{而 }C\text{ 不合理,即}\left\{\begin{array}{l}\text{或与本科公理抵触}\\ \text{或与前此定理不容}\\ \text{或与本题题设冲突}\\ \text{或与临时假定违背}\\ \text{或自相矛盾}\end{array}\right.\\ \text{由此题断不容假}\\ \text{故题断为真}\end{array}\right.$$

具体的例子,其实早在证明 §5 定理 13(2) 时,我们就已经见过了.

除反证法外,间接证法中尚有一种比较特殊的证法,叫做**同一法**,这是在同一法则(§28)下证明原定理的逆命题成立的一种方法.此法有时颇有用处.

§31 间接证法举例

如上所述,间接证法有反证法和同一法两种,前者目的在于驳倒原定理题断的否定事项,后者在一定条件下证明原定理的逆命题成立.下面我们列举一些具体的例题来说明这些证题法的应用.

Ⅰ.反证法

视原定理题断的否定事项的情形分为两种:

(1) 若原定理题断的否定事项只有一面，那么只需把这面推翻，就达到证明的目的了．这种比较单纯的反证法，叫做归谬法．

例题 1　圆内非直径的两弦，必不能互相平分．

题设　AB，CD 是⊙O 内非直径的两弦(图 303)．

题断　AB 与 CD 不能互相平分．

证明　假定 AB 与 CD 互相平分于一点 P．按题设，点 P 不能与圆心 O 重合．联结 OP，则由假定将有 $OP \perp AB$ 及 $OP \perp CD$(§11 定理 65(2))．这就是说，通过点 P 可有两条直线 AB 和 CD 同垂直于直线 OP，这个结果抵触了已知定理(§6 定理 18)，所以 AB 与 CD 不能互相平分．

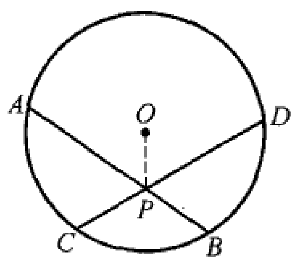


图 303

例题 2　若四边形中有一对对边中点的联结线等于另一对对边的和的一半，则另一对对边必互相平行．

题设　在四边形 $ABCD$ 中(图 304)，E，F 分别是 AD，BC 两边的中点，而 $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$．

题断　$AB \parallel CD$．

证明　假定 AB 不平行于 CD．联结 AC 取它的中点 G 与 E，F 分别相连，那么 $GE \parallel CD$ 且 $GF \parallel AB$(§9 定理 54)．由此可见 EGF 不能是直线(§7 定理 31 推论 3)，于是(§5 定理 9)

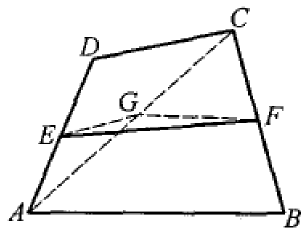


图 304

$$EF < GF + GE$$

但 $GF = \frac{1}{2}AB$ 且 $GE = \frac{1}{2}CD$，则有

$$EF < \frac{1}{2}(AB + CD)$$

这个不等式违背了题设的条件，故非 $AB \parallel CD$ 不可．

(2) 若原定理题断的否定事项不只一面，此时必须将其面面驳倒，才能衬出原来的题断成立．这种较繁的反证法，叫做穷举法．

例题 3　三角形的每个外角大于和它不相邻的任一内角．(§5 定理 6)

题设　在 $\triangle ABC$ 中(图 305)，$\angle ACX$ 是外角．

题断　$\angle ACX > \angle BAC$．

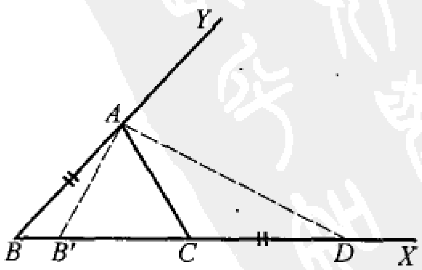


图 305

证明 首先假定

$$\angle ACX = \angle BAC \tag{①}$$

在射线 CX 上存在一点 D,合于 $CD = AB$(公理 Ⅲ$_1$);联结 AD,然后将公理 Ⅲ$_5$ 用于 $\triangle CDA$ 与 $\triangle ABC$,使得

$$\angle CAD = \angle ACB \tag{②}$$

另一方面,若延长 BA 至 Y,则由 ① 得(§5 定理 4)

$$\angle CAY = \angle ACB \tag{③}$$

因为 AD 与 AY 是不同的射线(否则抵触了公理 Ⅰ$_2$),且同在自边缘 AC 伸出的一个半面(点 B 所不在的半面)上,所以 ②,③ 两等式与公理 Ⅲ$_4$ 不容.这就是说 ① 不能成立.

再假定 $\angle ACX < \angle BAC$.此时在边 BC 上便会有一点 B',使得 $\angle ACX = \angle B'AC$.这样一来,以 $\triangle AB'C$ 来看,又出现了外角 $\angle ACX$ 等于不相邻的内角 $\angle B'AC$,根据刚才的证明,这是不可能的.因此 $\angle ACX$ 也不能小于 $\angle BAC$.

$\angle ACX$ 既不能等于也不能小于 $\angle BAC$,那么 $\angle ACX > \angle BAC$ 自然成立了.证完.

例题 4 设三角形有两个角的平分线相等,则这两角的对边必相等.

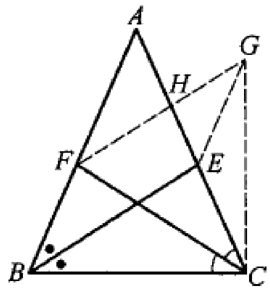


图 306

题设 在 $\triangle ABC$ 中(图 306),BE 平分 $\angle ABC$ 交边 AC 于 E,CF 平分 $\angle ACB$ 交边 AB 于 F,$BE = CF$.

题断 $AB = AC$.

证明 假定 $AB > AC$. 这样, 就有 $\angle ACB > \angle ABC$(§5 定理 7(1)),于是

$$\angle BCF = \angle FCE = \frac{1}{2}\angle ACB > \frac{1}{2}\angle ABC = \angle CBE = \angle EBF \tag{①}$$

在 $\triangle BCF$ 与 $\triangle CBE$ 中,$BC = CB$,$CF = BE$,又由 ① 有 $\angle BCF > \angle CBE$,故知(§5 定理 8(1))

$$BF > CE \tag{②}$$

作 ▱$BEGF$,则(§9 定理 42(1) 和(2))

$$EG = BF \tag{③}$$

$$\angle EBF = \angle FGE \tag{④}$$

且 $FG = BE = FC$.联结 CG,那么(§5 定理 1)

$$\angle FCG = \angle FGC \tag{⑤}$$

由 ① 和 ④,得

$$\angle FCE > \angle FGE \quad ⑥$$

设 FG 交 AC 于 H，则 H 介于 A，E 之间，因而 E 介于 C，H 之间．又易知 H 介于 F，G 之间．由此可见 E 在 $\triangle FCG$ 的内部．基于这个事实，我们可将 ⑤ 减 ⑥，结果为 $\angle ECG < \angle EGC$．于是 $EG < CE$（§5 定理 7(2)）．以 ③ 代入，得

$$BF < CE \quad ⑦$$

现在 ② 和 ⑦ 矛盾，这说明了 $AB > AC$ 的假定为谬．

仿此，$AB < AC$ 亦必为谬．

所以 $AB = AC$ 成立．

Ⅱ．同一法

当欲证某图形具有某种特性而不易直接证明时，使用此法往往便可克服这个困难．此时具体的做法是作出一个具有所说特性的图形，然后证明所作的与题设的原是同一个东西．举例如下：

例题 5　以正方形一边为底向形内作一等腰三角形，若它的底角等于 15°，则将它的顶点与正方形另两个顶点联结时，必构成一个正三角形．

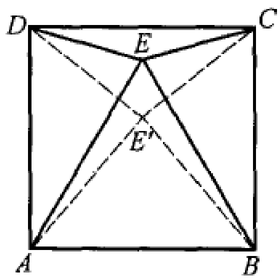


图 307

题设　E 是正方形 $ABCD$ 内部一点（图 307），$\angle ECD = \angle EDC = 15°$．

题断　$\triangle EAB$ 是正三角形．

证明　向正方形 $ABCD$ 形内，作正三角形 $\triangle E'AB$，并联结 $E'C$ 及 $E'D$．此时 $\triangle BCE'$ 显然是一个等腰三角形，它的顶角 $\angle CBE' = 90° - 60° = 30°$（§8 定理 36 推论 6），底角 $\angle BCE' = 90° - \frac{1}{2}\angle CBE' = 90° - 15° = 75°$（§8 定理 36 推论 4）．于是

$$\angle E'CD = 90° - 75° = 15°$$

同理

$$\angle E'DC = 15°$$

由此可见 E' 与 E 实际是同一点（公理 Ⅲ_4，公理 Ⅰ_2 推论 2），那么 $\triangle EAB$ 自然是正三角形无疑了．

习题 7

1. 什么叫做证明？
2. 什么叫做直接证法？其一般过程是怎样的？
3. 什么叫做间接证法？分哪几种？

4. 反证法实际是要证明哪几件事项不相容?这种证法的过程是怎样的?

5. 试用直接证法证明习题 6 第 15 题的(1).

6. 试用直接证法证明 § 31 例题 4.

试用间接证法证明下列各题(7 ~ 14).

7. 相交两圆的两个交点不能同在连心线的一侧.

8. 若四边形中有一对对边中点的联结线等于另一对对边的差的一半,则另一对对边必互相平行.

9. 若等腰三角形内一点对两腰的视角不等,则该点至底边两端的距离亦不等,大角的距离较小.

10. 若 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 有公共边 BC,且具下列条件之一,则点 A' 在 $\triangle ABC$ 的外部:

(1) $\angle BA'C < \angle BAC$;

(2) $A'B + A'C > AB + AC$.

11. 设梯形两底的和等于一腰,则此腰两邻角的平分线必交于另一腰的中点.

12. 以正方形一边为底向内侧作一等腰三角形,若它的底角等于 75°,则将它的顶点与正方形另两个顶点联结时,必构成一个正三角形.

13. 在矩形 $ABCD$ 中,$AB = 2BC$,E 是 CD 边上的一点.若 $\angle CBE = \frac{\pi}{12}$,则 $AB = AE$.

14. 等腰三角形 $\triangle ABC$ 的顶角等于底角的一半,若在腰 AC 上截一段 AD 使等于底边 BC,求证:$\angle ABD = \angle CBD$,且 $BD = BC$.

第三节　综合法与分析法

证题时无论是用直接证法还是间接证法,均需通过思维以寻求证明的理路,这种思维方法按理路的顺逆而有"综合"与"分析"之分.现在分述如下.

§ 32　综合法

思索问题时从假设出发,通过一系列已确立的命题,逐步向前推演,结果或是导出前所未知的命题,或是解决了当前的问题,简言之,即是由因导果,这样的思维方法叫做综合法.例如,欲证定理"若 A,则 D",用综合法思索时,其理路

如图 308 所示(由上往下看).

综合法由因导果,故从 A 下求,观察可以到达 D 的理路.但由 A 所生的果可能不止一个,假设 B, B_1, B_2 都是;而 B, B_1, B_2 又各有其果;设 B 生 C 及 C_1, B_1 生 C_2, B_2 生 C_3 及 C_4;这些 C 中有能生 D 的,有不能生 D 的,设 C 可生 D.思索至此,我们便得到"$A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow D$"这条证明的理路了.

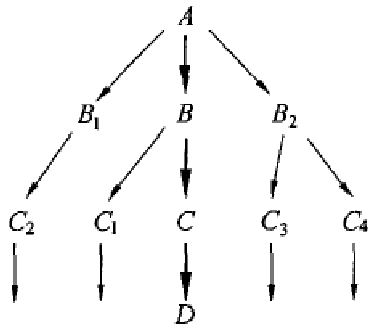


图 308

例题 6　设自平行四边形一对角线的一端至一非邻边的中点连以直线,而自另一端至该边对边的中点也连以直线,则所连两直线必三等分另一对角线.

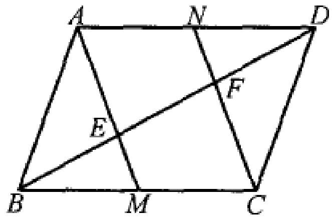


图 309

题设　在 ▱$ABCD$ 中(图 309), M, N 分别是 BC, AD 两边的中点, AM, CN 交 BD 于 E, F.

题断　$BE = EF = FD$.

证题时,若用综合法思索,其理路可表示为图 310(由上往下看):

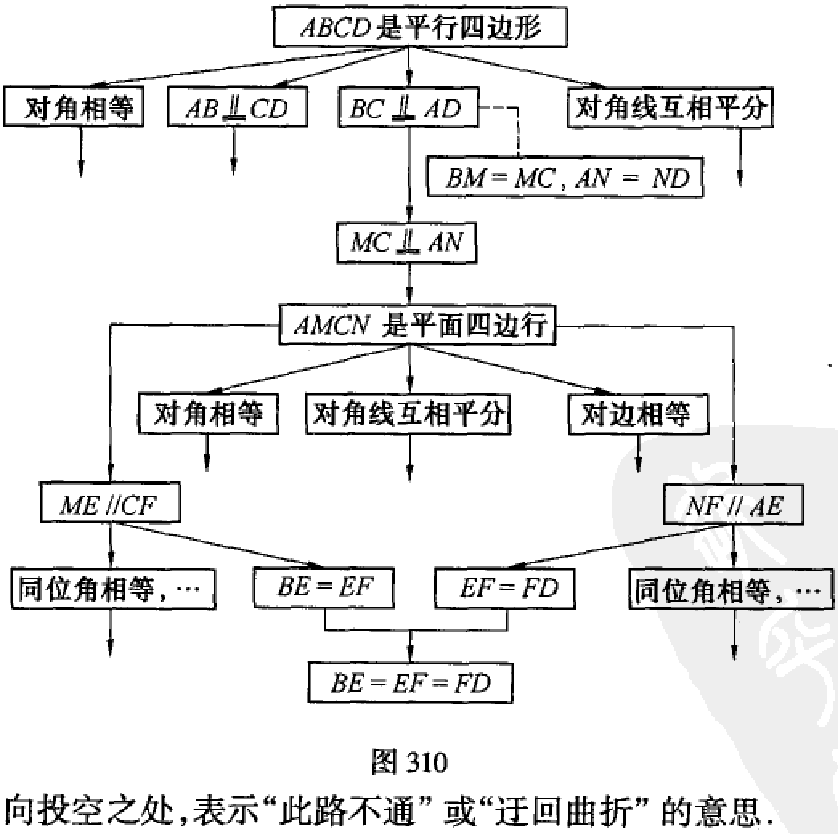


图 310

图中矢向投空之处,表示"此路不通"或"迂回曲折"的意思.

§33 分析法

欲证明一个命题是正确的，思索时也可以由断案向前提回溯．这意思是说，先设想命题的断案成立，然后追究它成立的原因，再就这些原因分别研究，看它们的成立又各需具备什么条件，如此逐步往上逆溯，渐渐达到已知的事实而止；简言之，即是执果索因．这种思维方法叫做分析法．例如，欲证定理“若 A，则 D”，用分析法思索时，其理路如图 311 所示（由下往上看）．

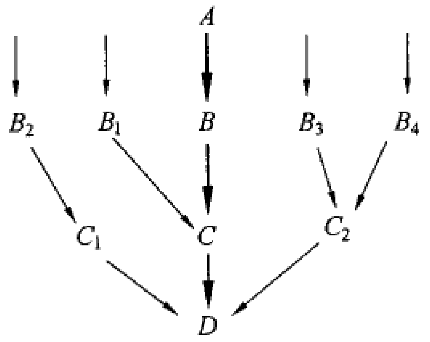


图 311

分析法执果索因，故从 D 上溯，以求其因．试问由什么可以推得 D 呢？假设 C, C_1, C_2 都可．再问什么能生 C？设 B, B_1 均可．什么能生 C_1？设 B_2 可．什么能生 C_2？设 B_3, B_4 均可．这一切原因固然都可以生 D，但究竟哪个是 A 的结果呢？检查之后，发现 B 是．这就是说，由未知的 D 已经上溯到已知的 A，因而我们获得了证明的理路

$$D \Leftarrow C \Leftarrow B \Leftarrow A$$

例题 7　若圆内接四边形的对角线互相垂直，则圆心至任一边的距离等于该边对边的一半．

题设　四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AC \perp BD$，$OE \perp AB$ 于 E．

题断　$OE = \frac{1}{2}CD$．

今示证题时用分析法思索的两种理路如下：

(1) 由 $OE \perp AB$（图 312），知 E 是 AB 的中点（§11 定理 65(1)）；故若作直径 AG，当有 $OE = \frac{1}{2}GB$．于是欲证 $OE = \frac{1}{2}CD$，只需证 $GB = CD$ 便可．但 GB 与 CD 同为 $\odot O$ 的弦，因此可以改证 $\angle BAG = \angle CAD$（§13 定理 87(1)）．设 P 是 AC 与 BD 的交点，则 $\angle APD$ 是直角（题设）．又 $\angle ABG$ 也是直角（§13 定理 83

推论 3). 那么欲证 $\angle BAG = \angle CAD$, 但能证 $\angle AGB = \angle ADP$ 也就成了(§8 定理 36 推论 7). 然而这两角相等是已知定理(§14 定理 97)保证的.

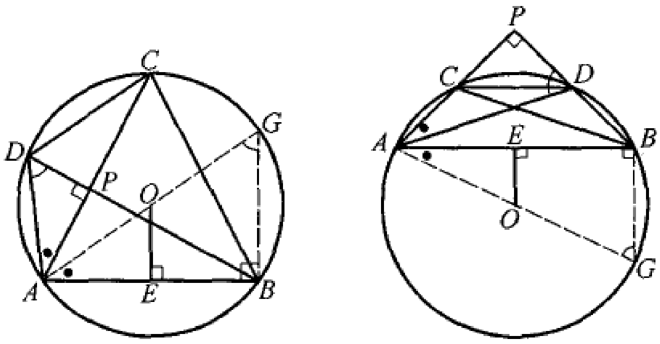


图 312

上述理路可表示为图 313(由下往上看).

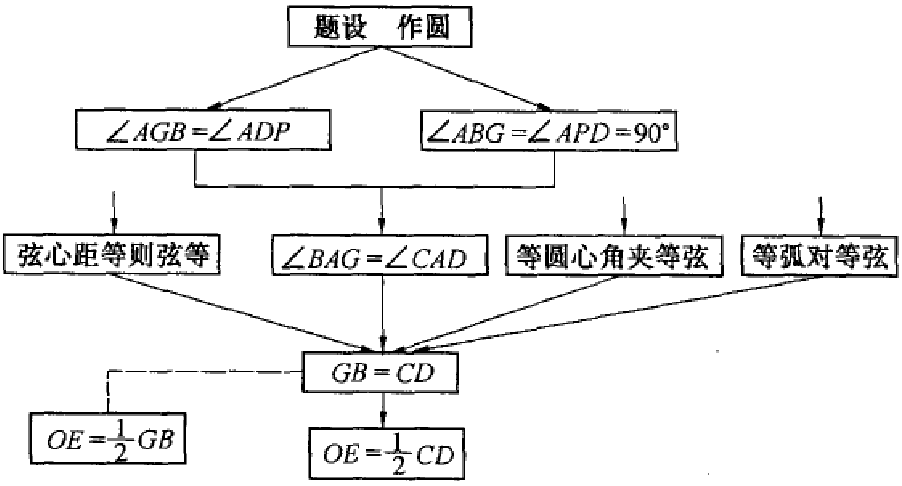


图 313

图中来路不明的箭头,表示"上溯不通"或"多走弯路"的意思.

(2) 引 $OF \perp CD$ 于 F(图 314), 联结 OA 和 OD. 设想 $OE = \frac{1}{2}CD = DF$ 成立, 则由于 $AO = OD$ 且 $\angle OEA = \angle DFO = 90°$, 必然 $Rt\triangle AOE \cong Rt\triangle ODF$(§6 定理 25(5)). 倒过来说, 如果能证这两个直角三角形全等, 问题便可解决. 能证这两个直角三角形全等的方法很多, 但其中除已知斜边 $AO = OD$ 外, 对于 OE 与 DF, AE 与 OF 的关系尚一无所知, 那么只好从 $\angle AOE$ 与 $\angle ODF$(或 $\angle EAO$ 与 $\angle FOD$) 上着想, 即是求证 $\angle AOE = \angle ODF$(§6 定理 25(4)). 因为 $\angle AOE = \angle ADP$(§13 定理 83), 所以又变成要证 $\angle ADP = \angle ODF$. 然而这两角各是 $Rt\triangle ADP$ 与 $Rt\triangle ODF$ 中的角, 欲证它们相等, 只需证

$\angle DAP = \angle DOF$ 便可.至此,问题已非常明白了.

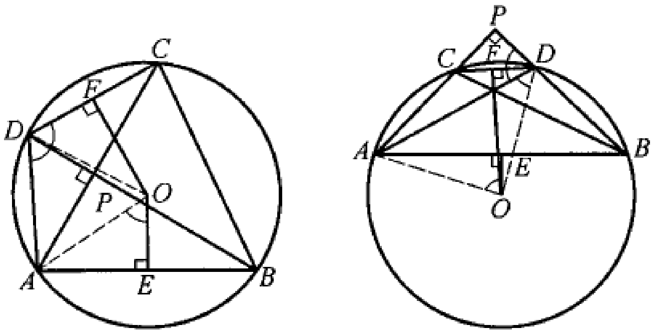


图 314

上述理路可表示为图 315(由下往上看).

图中来路不明的箭头,其意同前.

几何的一切论断,其因由皆出于公理.公理不过 20 条(就希尔伯特公理体系言),而由此繁衍的定理,不知其有多少!可见就因求果,枝歧难穷;执果索因,寻根较易.所以几何证题,在思索上分析法常优于综合法.但是分析法的理路是逆行的,叙述起来措辞不易得当,且有文辞冗长之感,不及综合法理路自然,容易使人得到简明而完善的印象.故在表述方面,分析法不如综合法.

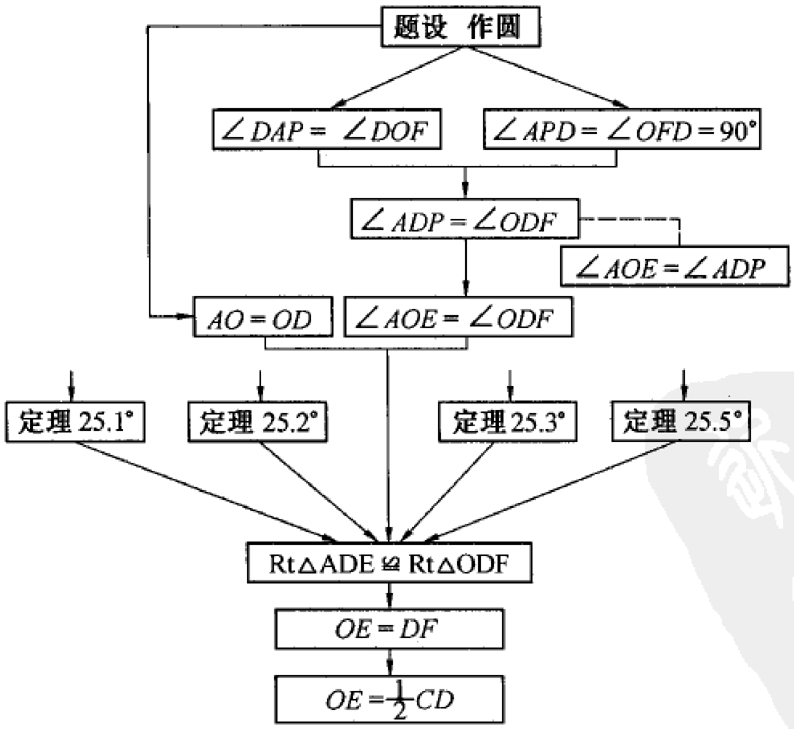


图 315

总的说来，分析法利于思考，综合法宜于表述，两者各有利弊，在解决问题时，最好合并使用．习惯上，对于一个新的问题，多半先用分析法寻求解法①，然后用综合法有条理地表述出来．

注　综合法由因导果，步步追求已知事理的必要条件；分析法执果索因，步步从事寻觅事理成立的充分条件②故就理路言，前者顺而后者逆．

必须注意，分析法并非"逆推"而是"逆求"．例如，证明命题"若 A，则 D"，若谓分析法的理路如下：

"若 D 真则 C 真；若 C 真则 B 真；若 B 真则 A 真；今 A 真，故知 D 真．"

那便是错误的；其正确的理路应该如下所述：

"欲 D 真只需 C 真；欲 C 真只需 B 真；欲 B 真只需 A 真；今 A 真，故 D 必真．"

习题 8

1．什么叫做综合法？试用图解说明．

2．什么叫做分析法？试用图解说明．

3．为什么说分析法利于思考而综合法宜于表述？习惯上，对于一个新的问题，我们是怎样运用这两种方法的？

4．综合法和分析法是属于直接证法吗？为什么？

5．在综合法和分析法里，其每个步骤各是寻求什么条件？

6．假如有人证明命题"若 A，则 D"，其所用分析法的理路如下：

"若 D 真则 C 真；若 C 真则 B 真；若 B 真则 A 真；今 A 真，故知 D 真．"

这是否正确？若谓不正确，其错误安在？然则正确的理路为何？

7．试用分析法叙述 §32 例题 6 的证明步骤．

8．试用综合法叙述 §32 例题 7 的两种证明步骤．

9．试用综合法图解习题 2 第 6 题的证明理路．

10．试用分析法图解 §9 定理 54 的证明理路．

① 这一步可写可不写，但一般说来不可不想，否则解法不易求得．

② 在"$A \Rightarrow B$"中，A 称为 B 的充分条件，B 称为 A 的必要条件．

第四节　演绎法与归纳法

§34　演绎法

大凡一切新的知识,都和已知的旧的知识有关系.什么关系呢?就是从已知的旧知识出发,通过实践、推想、验证,可以获得前所未知的新知识.这样推陈出新的思维过程,叫做推理.

一个推理的过程,分析起来多半具有这样的形式:首先认可一段事理,这段事理要具有一般性,叫做大前提;然后提出一个和大前提有联系的特殊事项,叫做小前提;最末根据这两个前提作出判断,叫做结论.这样的推理过程,称为三段论法.例如:

(1) 中华人民共和国公民必须遵守中华人民共和国宪法;

(2) 我是中华人民共和国公民;

(3) 我必须遵守中华人民共和国宪法.

这个推理过程就是一个三段论法,其中(1)是大前提,(2)是小前提,(3)是结论.

用已知的普遍事理来推断某事理的成立,亦即由一般到特殊的推理,叫做演绎推理或演绎法.证明命题时,演绎法是经常要用的一种重要推理方法,几何学中各定理的证明过程,大多数都是这种推理.

演绎推理通常包含若干步,每步分析起来无不具有三段论法的形式.所以用演绎法证明一个命题,它的过程实际就是一串前后连贯的三段论法.但在具体行事上,为使证明过程的叙述简化,我们常常把各步推理(三段论法)的两个前提略去一个(多半是大前提),甚至仅写下结论.例如,对于命题"设圆中两弦 AB 与 CD 交于点 P(图316),则 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$"的证明,一般可分下列五步(为着解说方便,各步都标注了号码).

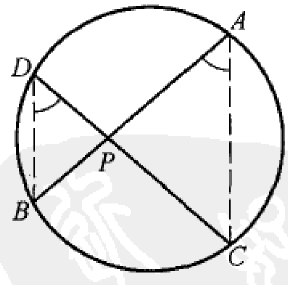


图 316

联结 AC 与 DB,则:

(1) 因 $\angle BAC$ 与 $\angle BDC$ 同是对$\overset{\frown}{BC}$ 的圆周角.(b_1)

故 $\angle BAC = \angle BDC$.(c_1)

(2) 又 $\angle APC = \angle DPB$.(c_2)

(3) 那么 $\triangle PAC \backsim \triangle PDB$.($c_3$)

(4) 由此 $PA : PD = PC : PB$.(c_4)

(5) 所以 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.($c_5$)

其中(1) 略去了大前提(a_1),(2) 略去了大前提(a_2) 和小前提(b_2),(3) 略去了大前提(a_3) 而以(c_1) 与(c_2) 为小前提(b_3),(4) 略去了大前提(a_4) 而以(c_3) 为小前提(b_4),(5) 略去了大前提(a_5) 而以(c_4) 为小前提(b_5). 如果每步推理都写成三段论法的形式,那么将成为:

(1) 在一圆中,同弧所对的圆周角均相等,(a_1)

$\angle BAC$ 与 $\angle BDC$ 同是对$\overset{\frown}{BC}$ 的圆周角,(b_1)

故 $\angle BAC = \angle BDC$.(c_1)

(2) 对顶角必相等,(a_2)

$\angle APC$ 与 $\angle DPB$ 是对顶角,(b_2)

故 $\angle APC = \angle DPB$,(c_2)

(3) 有两对对应角分别相等的两个三角形必彼此相似,(a_3)

在 $\triangle PAC$ 与 $\triangle PDB$ 中:已知 $\angle PAC = \angle PDB$ 且 $\angle APC = \angle DPB$,(b_3)

故 $\triangle PAC \backsim \triangle PDB$,($c_3$)

(4) 两个相似三角形的对应边应该是成比例的,(a_4)

$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$,($b_4$)

故 $PA : PD = PC : PB$.(c_4)

(5) 比例式中,两外项的积与两内项的积必相等,(a_5)

$PA : PD = PC : PB$,(b_5)

故 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.($c_5$)

注 还应指出一点,在上述证明中最先所说的"联结 AC 与 DB",其实详细分析起来也是一个推理的结果. 若把它写成三段论法的形式,便是:

不同两点总可以联结直线,(a_0)

A 与 C,D 与 B 是不同的点,(b_0)

故可以联结 AC 与 DB.(c_0)

不过像这样比较细微的地方,往往视为当然,可以置之勿论,不然过于烦琐反招迂腐之讥.

像这样详细地分析一个证明的推理步骤,对养成谨严的逻辑习惯和发展积极的逻辑思维具有重大的作用. 虽然证题时不必次次如此来做,但是如果能够

经常注意各个推理的逻辑思维方法和彼此间的逻辑关系，无疑地可以减少我们证题时在不知不觉中触犯那些所谓不合逻辑的错误.

演绎法在数学上的推理中，随时随地都要出现，所以我们必须熟练地掌握它.

§35 归纳法

由一些特殊事理的成立而推见普遍事理也成立，亦即由特殊到一般的推理，叫做归纳推理或归纳法.归纳法有下述几种形式.

Ⅰ.普通归纳法

研究事物的规律时，往往不能够把我们要研究的现象按它的一切情形观察完毕，于是不得不从其中一部分的若干个特殊情况作出一般性的结论，这种推理方法叫做普通归纳法.这个方法当然是不够严格的，因此得到的结论并不一定可靠.例如：

铁遇热时膨胀，遇冷时凝缩；

玻璃遇热时膨胀，遇冷时凝缩；

空气遇热时膨胀，遇冷时凝缩；

……

所以一切物质都是热胀冷缩的.

大家都知道，这个结论并不是在所有场合下都是对的，譬如水在4℃以下的温度时它却热缩冷胀.虽然如此，但是在人类的生活过程中，普通归纳法仍不失为一个具有重大作用的推理方法，因为它能够帮助我们去发现事物的规律性，提供研究的线索和指出进行的方向.

在数学上，也常常借用普通归纳法探讨未知的定理.例如，当我们尚未知道三角形的内角和等于二直角时，我们先作出各种各样的三角形，然后用量角器实地去分别量它们的三个角，结果发现每个三角形的三个角之和都极接近于二直角，于是我们不由得兴起“三角形的内角和等于二直角”的假定，这个假定便确定了我们研究的方向.之后经过演绎推理，我们的假定果然给严密地证实了.

所以说，普通归纳法是人类在最初阶段认识真理的一个源泉.

Ⅱ.枚举归纳法

如果对于一种要研究的事理，能够把它可能存在的一切情形都思考遍了，

那么从这一盘推理总结出来的断案,便是正确的.这种推理方法叫做**枚举归纳法**.

枚举归纳法在数学中时常要用到,它可以使我们在考虑问题上养成面面周到的习惯①.

一个定理,假如有因题设事项的本性或相互关系发生变化,而证明的理由亦随着有所不同的话,那么这时就应该使用枚举归纳法去证明它②.具体的做法是分别题设事项各种可能的情形一一加以证明,待各种情形既已证毕,然后总括起来断言题断普遍成立,例如,§15 定理 104 的证明,我们就曾经这样做过.现在我们再举一个例题如下:

例题 8 若四边形一对对边的平方和等于另一对对边的平方和,则两条对角线互相垂直.

题设 在四边形 $ABCD$ 中,$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

题断 $AC \perp BD$.

证明 四边形有凸的、凹的、折的三种,现分这三种情形分别考察.

(1) 设四边形 $ABCD$ 是凸的(图 317).命 AC 与 BD 的交点为 O.如果 AC 不垂直于 BD,则 $\angle AOB$ 或为钝角,或为锐角,为确定起见,不妨假定它是钝角.在此假定下,$\angle COD$ 也是钝角,而 $\angle AOD$ 和 $\angle BOC$ 都是锐角,这样一来,就有(§18 定理 125 推论 1):

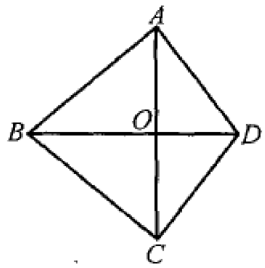


图 317

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 > OA^2 + OB^2 \\ CD^2 > OC^2 + OD^2 \end{array}\right\} \quad ①$$

及

$$\left.\begin{array}{l} AD^2 < OA^2 + OD^2 \\ BC^2 < OB^2 + OC^2 \end{array}\right\} \quad ②$$

由 ① 和 ②,得

$$AB^2 + CD^2 > AD^2 + BC^2$$

这个结果违背了题设的条件,可见假定 AC 不垂直于 BD 是不对的.因此必然 $AC \perp BD$.

---

① 编制数学题目时,用枚举归纳法去审查可以防止出错.

② 用枚举归纳法证题,就手续说是繁多的,为此人们常常设法寻求另外的证法,希望能适用于题设事项的各种可能情形.所以证明某某定理,用不用枚举归纳法并不是绝对的.譬如例题 8,不用枚举归纳法也可以证明,读者不妨一试.

(2) 设四边形 $ABCD$ 是凹的(图 318),且假定 $\angle BCD$ 是优角.这时再想如上证明便行不通了,但可利用上面已证的情形来做论证的基础.

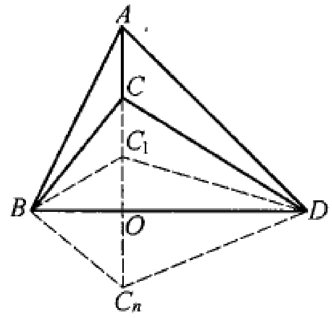


图 318

延长 AC 至 C_1,使 $CC_1 = AC$,并联结 BC_1,C_1D.据阿波罗尼奥斯定理(§20 定理 131),有

$$AD^2 + C_1D^2 = 2(AC^2 + CD^2)$$

$$AB^2 + BC_1^2 = 2(AC^2 + BC^2)$$

前式减后式,得

$$AD^2 - AB^2 + C_1D^2 - BC_1^2 = 2(CD^2 - BC^2)$$

但由假设知 $AD^2 - AB^2 = CD^2 - BC^2$,那么

$$C_1D^2 - BC_1^2 = AD^2 - AB^2$$

即

$$AB^2 + C_1D^2 = AD^2 + BC_1^2$$

这就是说,我们将四边形 ABC_1D 去代替原设的四边形 $ABCD$ 时,题设的条件仍然保持原来的形状.

按假定,直线 AC 必交线段 BD 于 O.若 O 介于 A,C_1 之间,则四边形 ABC_1D 是凸的,此时根据(1)知 $AC_1 \perp BD$,即 $AC \perp BD$.如其不然,可再延长 AC_1 1 倍至 C_2 如此继续下去,据阿基米得公理(公理 V_1),必然得到一点 C_n,使得 O 介于 A,C_n 之间,换句话说,我们总可得到凸四边形 ABC_nD.如上所述,这四边形的四边适合关系

$$AB^2 + C_nD^2 = AD^2 + BC_n^2$$

所以 $AC_n \perp BD$,即 $AC \perp BD$.

(3) 设四边形 $ABCD$ 是折的(图 319).取点 C 关于 BD 的对称点 C',并联结 BC',$C'D$,则四边形 $ABC'D$ 或是凸的[①]或是凹的.因为 $BC' = BC$ 且 $C'D = CD$,故

$$AB^2 + C'D^2 = AD^2 + BC'^2$$

那么根据(1)或(2),可知 $AC' \perp BD$.按 C' 的取法,得知 $CC' \perp BD$,因而 ACC' 应是一直线(§6 定理 20).所以 $AC \perp BD$.

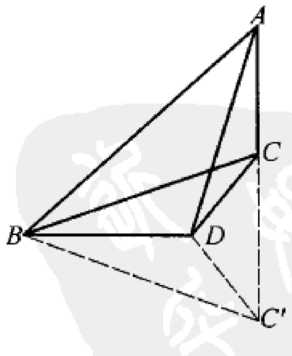


图 319

以上三种情形一一证明了,故得断定本题普遍成立.

① 虽然无是事,不可无是想.

从上面的证法看来，(1) 用了间接证法，(2) 和(3) 却用直接证法．就推理言，每一个都是演绎法，但以整体而论则是归纳法．在思维方面，这里表述出来的是综合法，而于思考阶段里无形中完成的应是分析法．由此可见直接证法与间接证法、综合法与分析法、演绎法与归纳法，一方面彼此无从属关系，一方面又不是孤立存在，在每个命题的证明中，它们(或一部分) 都经常交织地渗透在里面而融合为一整体．

用枚举归纳法，要善于将各种可能情形适当分类，切实注意其不漏不重．重则白费，如在上例第二种情形中，既假定 $\angle BCD$ 为优角证完了，就毋庸再假定其他角是优角另证．不漏尤属重要，漏则容易出错．我们试来看一个例子：①

“设在凸四边形 $ABCD$ 内，$AB > CD$，$BC > DA$，求证：$\angle D > \angle B$．”

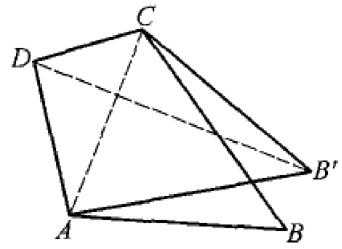


图 320

对于这题，如果我们仅作如下的证明，便急于断定它成立，那就错了．

证明　联结 AC，取一点 B' 使与 B 同在直线 AC 的一侧(图 320)，且 $CB' = AB$，$B'A = BC$．由此 $\triangle ABC \cong \triangle CB'A$，从而 $\angle B = \angle B'$．

联结 $B'D$．在 $\triangle AB'D$ 及 $\triangle CB'D$ 中，因 $B'A = BC > DA$，$CB' = AB > CD$，知

$$\angle ADB' > \angle AB'D \qquad ①$$

$$\angle CDB' > \angle CB'D \qquad ②$$

将 ①，② 左右两端各相加，便得 $\angle D > \angle B'$．所以

$$\angle D > \angle B$$

在这个证明中，默认了 $AB'CD$ 是凸四边形，所以才有那样的结论，但是要知道，B' 非设定的点，它的位置应该随着四边形 $ABCD$ 的形状而变动，因此四边形 $AB'CD$ 的形状所有可能的变化万不能摒于考虑之外．上证恰恰忽略了这点，我们不可不进一步去加以细察．事实上，$AB'CD$ 除可以形成凸四边形外，也可以形成三角形或凹四边形．$AB'CD$ 形成三角形是不难想到的，当 $\angle CAB$ 与 $\angle ACD$ 或 $\angle ACB$ 与 $\angle CAD$ 互补时就会发生这种情形(图 321)．但是这种情形并无害于原题的“题断”．至于 $AB'CD$ 形成凹四边形的情形，以及它对于原题的

① 这是 Arthur Schultze著苏笠夫译《中等学校算学教学法》(商务印书馆出版) 第133页上所载的一个例题，原题无“凸”字，但实有此意，今为明确起见，特增此字．该书对这题所作的证明，其大意与这里所写的一样，只是文字上略有不同．

"题断"会产生什么影响,这问题比较复杂,欲搞清这个问题,就得设计画出一个足供判明是非的图形来.

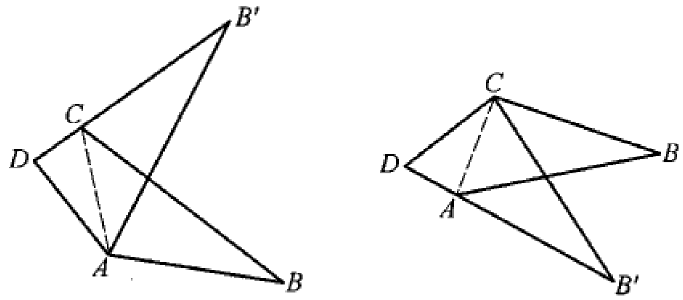


图 321

我们先作等腰三角形 $\triangle AEF$,令顶角 $\angle A \geqslant 90°$(图 322).再引 $AC \perp EF$ 于 C,并以 AE 及 AF 为直径画圆,这两圆必同通过点 C(§13 定理 83 推论 5).自 C 引 $\odot AFC$ 的切线设交 $\odot AEC$ 于 B,又自 A 引 $\odot AEC$ 的切线设交 $\odot AFC$ 于 D'.以 A 为圆心,AD' 为半径画$\overset{\frown}{D'G}$设交 BC 的延长线于 G.最后在图形 $CD'G$ 内(图中阴影部分)任取一点 D 与 A,C 相连,又联结 AB,这样便得到一个四边形 $ABCD$.

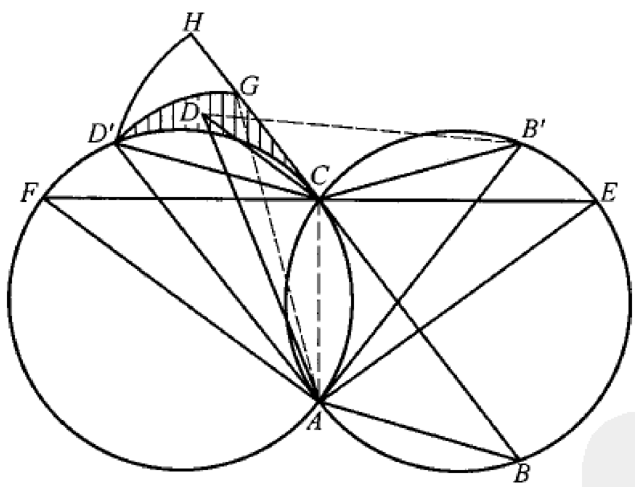


图 322

这个四边形 $ABCD$ 的边角关系是怎样的呢?首先,易知 $\odot AEC$ 与 $\odot AFC$ 关于 AC 的中点对称,因此 $ABCD'$ 必然是平行四边形(§9 定理 49(4)).现在 $\angle ADC < \angle AD'C$(习题 6 第 14 题),$\angle BAD < \angle BAD'$,$\angle BCD < 180°$,所以四边形 $ABCD$ 一定是凸的.其次,由于 $AG = AD'$,$AC = AC$,$\angle CAG < \angle CAD'$,知 $CG < CD'$.故若以 C 为圆心、CD' 为半径画$\overset{\frown}{D'H}$交 BC 的延长线于 H,则 G 必介

于 C,H 之间. 由此可见 D 点居于扇形 $CD'H$ 的内部. 这样一来,就有

$$AB = CD' > CD, BC = D'A > DA$$

这说明了四边形 $ABCD$ 具备原题的题设条件. 可是,在这个四边形中,我们明明看出

$$\angle ADC < \angle AD'C = \angle ABC$$

这就恰和原题的"题断"相反了.

反例的图形既然的确存在,可见那是一个错误的题目. 它的病根在于证明时没有全面地考虑问题,不经审察 $AB'CD$ 各种形状的可能性,便贸贸然将①和②相加而过早地下结论. 不言而喻,加法不适用于 $AB'CD$ 为凹四边形的情形,这从图 322 中看来是非常明白的.

因此,证题时必须面面考虑周到,需要分类归纳时则万不能怕麻烦,怕麻烦便会出错. 上例正好作为我们的前车之鉴.

Ⅲ. 数学归纳法

欲断可数的[1]一群事物具有某种公共性质,势不能一一加以证明,这时便需应用所谓数学归纳原理. 这个原理是这样的:

"把可数的一群事物按着与自然数列对应的顺序排为序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

若 a_1 有性质 P,且 P 在这个序列中有'遗传性',即某项 a_k 如有性质 P,其次项 a_{k+1} 亦必有性质 P,则自 a_1 以下都有性质 P."

凡应用数学归纳原理来证题,这种方法叫做数学归纳法.

用数学归纳法证明某某命题时,必须包括下列三个步骤:

(1) 将研究的对象按着与自然数列对应的顺序排为序列[2];

(2) 证明命题对于序列的首项来说真确;

(3) 假定命题对于序列中任意指定的一项来说真确,由此推出对于次项来说亦真确.

以上三个步骤,(1) 是使用数学归纳法的先决条件;(2) 是归纳的基础;(3) 确定了从该基础出发得以无限推广下去的可能性. 这三步(尤其是后两步)不能忽略任何一步,否则将会陷入错误的境地.

例题 9　设在一有向直线上有任意的 n 个点 $A,B,C,\cdots,F,G,H$(图 323),

① 一个集合的元素若能与自然数列一一对应,我们便说这个集合是可数的.

② 这序列通常在人们心目中早已排好,因此往往不另申明.

则关系式

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}$$

永远成立.

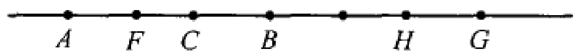


图 323

题设 $A, B, C, \cdots, F, G, H$ 是一有向直线上的任意 n 个点.

题断 $\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}$.

证明 当 $n = 3$①时,本题成立(§ 15 定理 104).

现在假定本题对于 $n-1$ 点 $A, B, C, \cdots, F, G$ 成立

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{FG} = \overline{AG}$$

那么在这等式的两端中同加上 $\overline{GH}$,便得

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AG} + \overline{GH}$$

但 $\overline{AG} + \overline{GH} = \overline{AH}$,所以

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}$$

本题证完.

注 本题的关系式有时也书如

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HA} = 0$$

例题 10 圆上任一点至内接偶边数多边形(不限定是凸的)相间诸边(所在直线)的距离之积,与该点至其余诸边(所在直线)的距离之积相等.

题设 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n}$ 是圆内接 $2n$ 边形,P 是圆上的任一点,$p_1, p_2, \cdots, p_{2n}$ 依次是 P 至 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{2n}A_1$ 的距离.

题断 $p_1p_3\cdots p_{2n-1} = p_2p_4\cdots p_{2n}$.

证明 当 P 是所设多边形的顶点时,本题显然成立.

现在假设 P 不是所设多边形的顶点,先来证明本题对于圆内接四边形来说是真确的.

设 $n = 2$,这时 $A_1A_2A_3A_4$ 是圆内接四边形(图 324(a)).联结 PA_1, PA_2, PA_3, PA_4,并命圆的半径为 r,则(习题 4 第 11 题)

$$2rp_1 = PA_1 \cdot PA_2, \quad 2rp_2 = PA_2 \cdot PA_3$$

---

① 这是把本题所说的 n 与自然数列中的 $n-2$ 对应起来所成序列的首项.注意在具体问题中,不一定要从 $n = 1$ 开始的.

$$2rp_3 = PA_3 \cdot PA_4, \quad 2rp_4 = PA_4 \cdot PA_1$$

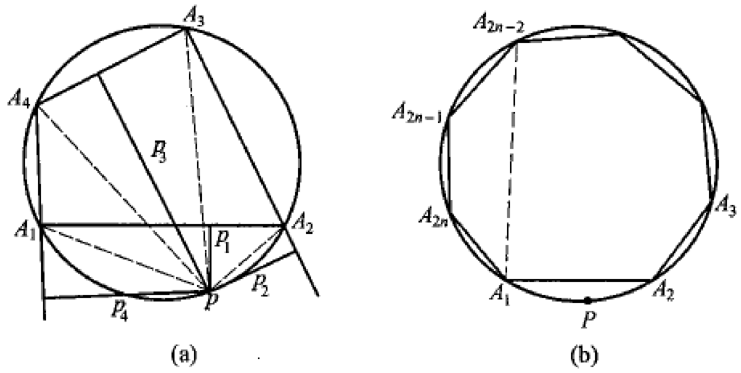


图 324

由此 $$4r^2p_1p_3 = PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3 \cdot PA_4 = 4r^2p_2p_4$$

故 $$p_1p_3 = p_2p_4$$

其次假定本题对于圆内接$(2n-2)$边形来说是真确的，因而推出对于圆内接$2n$边形也是真确的.

在原设的图形中(图 324(b))，联结 A_1A_{2n-2}，则我们得到一个$(2n-2)$边形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n-2}$ 和一个四边形 $A_1A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$. 命 P 至A_1A_{2n-2} 的距离为 p，那么根据假定和刚才已证的事实，有

$$p_1p_3\cdots p_{2n-3} = p_2p_4\cdots p_{2n-4}p$$

$$pp_{2n-1} = p_{2n-2}p_{2n}$$

将这两个等式的左右端各相乘，然后约去公因子 p，便得

$$p_1p_3\cdots p_{2n-1} = p_2p_4\cdots p_{2n}$$

所以本题普遍成立.

习题 9

1. 什么叫做推理？

2. 什么叫做三段论法？它有哪几个组成部分？试举一例说明.

3. 试补足下列两个推理中所略去的话使成三段论法的形式，补足后并指出哪句是大前提、小前提、结论：

(1) 学生必须遵守学生守则，所以遵守学生守则是我的本分.

(2) 这张桌子是公共财产，人人有爱护它的义务.

4. 什么叫做演绎法？它是通过什么形式的推理来进行的？

5. 试先证明 §5 定理 9，然后分析证明过程中每步推理的结构情形.

6. 什么叫做归纳法？它有几种形式？

7. 什么叫做普通归纳法？用它得到的结论一定可靠吗？但为什么又说，它在人类生活中仍不失为一个具有重大作用的推理方法？

8. 什么叫做枚举归纳法？证定理时，在什么情况下要应用到它？当用到它时，要切实注意什么？

9. 什么叫做数学归纳法？用它证题时必须包括哪几个步骤？这些步骤各有什么意义？

试用枚举归纳法证明下列各题(10 ~ 12).

10. 设 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 交于 P,Q 两点，过 Q 任作一直线交两圆于 A 与 B，则 $\angle APB = \angle OPO'$.

11. 设 M 是圆上$\overset{\frown}{PQ}$ 的中点，自 M 引两射线交圆于 A,B 而交直线 PQ 于 C，D，则 A,B,C,D 四点同在一圆上.

12. 在一圆上，设 M,N 各是$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$(劣弧或优弧)的中点，则 AB,AC,MN 三直线交成一个等腰三角形.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于 D，M 是边 BC 的中点. 设 $\angle ABC = 2\angle ACB$，求证：$DM = \frac{1}{2}AB$.

14. 试详细考察如下命题，判断它是否成立：

"在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于 D，M 是边 BC 的中点. 设 $DM = \frac{1}{2}AB$，则 $\angle ABC = 2\angle ACB$."

试用数学归纳法证明下列各题(15 ~ 19).

15. n 边形共有$\frac{1}{2}n(n-3)$ 条对角线.

16. 圆内接偶边数凸多边形相间诸角的和，与其余诸角的和相等.

17. §5 定理 10.

18. §5 定理 11.

19. §8 定理 41.

复习题 2

1. 设以 x 代表命题"若 A，则 B"，试问下列命题中哪些是彼此相同的？

(1) x 的反申命题之逆命题；

(2) x 的对称命题之反申命题；

(3) x 的逆命题之对称命题;

(4) x 的反申命题之对称命题;

(5) x 的逆命题之反申命题;

(6) x 的对称命题之逆命题.

2. 什么叫做必要条件?什么叫做充分条件?必要条件一定是充分条件吗?倒过来说呢?试各举一例说明.

3. 假如有一命题说:"A 的必要且充分之条件是 B",这意味着哪两个命题同时真确?为什么?

4. 如果说:"当且仅当 A 成立的时候,则 B 成立",这话意味着哪两个命题皆真?什么道理?

5. 什么叫做归谬法?试举一例说明.

6. 什么叫做穷举法?试举一例说明.

7. 什么叫做同一法?试举一例说明.

8. 穷举法和枚举归纳法相同吗?为什么?

9. 普通证明 §8 定理 36 和 §13 定理 83 的推理过程,孰为演绎法?孰为归纳法?

10. 直接证法与间接证法、综合法与分析法、演绎法与归纳法是按什么观点区分的?它们之间有从属关系吗?抑或它们是互相对立的?

11. 试证:H 是 $\triangle ABC$ 的垂心的充分条件为 $HA^2+BC^2=HB^2+CA^2=HC^2+AB^2$.

12. 求证:若 P,Q,M,N 四点合于 $PM^2-PN^2=QM^2-QN^2$ 条件,则直线 PQ 与 MN 互相垂直.

13. 在 $\angle XOY$ 的边 OY 上取一点 B,引 $BA\perp OX$ 于 A,又引射线 BD 使同向平行射线 OX.今过 O 作直线交射线 BA,BD 于 C,D,如果 $CD=2OB$,试证:$\angle XOD=\frac{1}{3}\angle XOY$.

14. 甲乙两圆相交于 P,Q.过 P 作一直线交甲于 A,交乙于 B;又过 Q 作一直线交甲于 C,交乙于 D,求证:AC 与 BD 平行或重合.

15. 在上题中,若 C 重合于 A,求证:过 A 所作甲圆的切线平行或重合于 BD.

16. 在第 14 题中,若 $AB\parallel CD$,求证:$AB=CD$.

17. 甲乙两圆相交于 P,Q,过 P 作两直线 x,y 使关于 PQ 对称.设 x,y 交甲于 A,C,交乙于 B,D,求证:$AB=CD$.

18. 两圆相交于 P,Q.在一圆上任取一点 A,联结 AP,AQ 交另一圆于 B,C,试证:弦 BC 的长与点 A 的位置无关而恒为一定.

19. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，M 是边 BC 的中点. 联结中线 AM 并延长交 $\odot HBC$ 于 D，求证：M 是 AD 的中点.

20. 设 M 是直角扇形 OAB 的弦 AB 的中点，C,D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，求证：$MC\parallel OA$ 且 $MD\parallel OB$.

21. 设 A 是 $\odot O$ 上一点. 作 $\angle AOB=60°$；在射线 BO 上截线段 $BC=OA$；过 C 作弦 $DE\parallel AB$，求证：AD,AE 两直线中必有一条平行于 OB.

22. 求证：圆上任一点至内接多边形(不限定是凸的)诸边(所在直线)的距离之积，与该点至过每顶点所作切线的距离之积相等.

23. 自 $\triangle ABC$ 的外接圆上任一点 P 作三弦 PA',PB',PC' 使分别平行于 BC，CA,AB，求证：$\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$.

24. 在上题中，若使所作三弦分别垂直于 BC,CA,AB 则如何?

25. 设 O 是正方形 $ABCD$ 的中心，作 $\odot A(AO)$ 交 AD,AB 于 D_2,B_1，$\odot B(BO)$ 交 BA,BC 于 A_2,C_1，$\odot C(CO)$ 交 CB,CD 于 B_2,D_1，$\odot D(DO)$ 交 DC，DA 于 C_2,A_1，求证：$A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$ 是一个正八边形.

26. M,N 分别是 $\square ABCD$ 的 BC,CD 两边的中点，求证：连线 AM,AN 必将对角线 BD 三等分.

27. 三等分直角扇形 OAB 的 $\overset{\frown}{AB}$ 于 C,D，即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，联结 OC,OD 交弦 AB 于 E,F，求证：$AE=BF=CD$.

28. 设 C,D 是一半圆形的直径 AB 上的两点，且 $AC=BD=\frac{1}{4}AB$，试证：自 C,D 所引 AB 的垂线必将半圆三等分.

29. 设 E,F 是一半圆形的直径 BC 的三等分点. 以 BC 为边在半圆形的外边作正三角形 $\triangle ABC$，求证：射线 AE,AF 必将半圆三等分.

30. 在一圆中，弦 CD 通过弦 AB 的中点 M，弦 DE 平行于 AB，求证：$\triangle ACM\backsim\triangle EAM$ 且 $\triangle BCM\backsim\triangle EBM$.

31. 设 AD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的弦 BC 的高，以 BD,CD 分别为直径作圆交 AB,AC 于 E,F，试证：EF 适为所作两圆的外公切线.

32. 设四边形 $ABCD$ 有内切圆或旁切圆 $\odot O$，求证：$\odot AOB$ 与 $\odot COD$，$\odot AOD$ 与 $\odot BOC$ 分别相切.

33. 以三角形的三条中线为边作一三角形，又以此三角形的三条中线为边作另一三角形，求证：这三角形与原三角形相似.

34. 在一圆中，随便取互相垂直的两弦 AB 与 CD，若 P 是垂足，求证：$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 为一常数.

第四章　证 题 术

本章依照定理的题断将它们分成若干类来讨论定理的证法，借以收触类旁通之效．这属于证题的技巧，故称之为“证题术”．所举例题，大都在证明之前，插入“思索方法”一段，用以说明寻求证法的思维情形，但这不属于证题正文．

第一节　相　等

§36　关于相等的证题术

证题术 1　证两线段或两角相等，最基本的方法是利用全等三角形来证明．如果要证其相等的两线段或两角，无现成的全等三角形以它们为对应部分，可以添设辅助线造成全等三角形．假若它们所属的两个三角形，还不能立刻断定是全等的，可以先证别的三角形全等以补足前两者全等的条件．

例题 11　设 M 是等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 一腰 AC 的中点(图 325)，自顶点 A 引垂直于中线 BM 的直线交底边 BC 于 D，则 $\angle AMB = \angle CMD$．

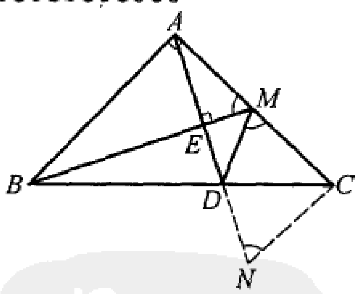


图 325

题设　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，$AB = AC$；M 是边 AC 的中点，AD 垂直于 BM 而交边 BC 于 D．

题断　$\angle AMB = \angle CMD$．

思索方法　就图形看来，$\angle AMB$ 与 $\angle CMD$ 所属的各对三角形(如 $\triangle AMB$ 与 $\triangle CMD$)既不全等，也不相似，故应设法就原有图形用辅助线造成全等三角形．现在设法造一个三角形，使它和 $\triangle AMB$ 全等．因题设有 $AB = AC$，由题设又不难知道 $\angle ABM = \angle CAD$，所以自 C 引垂直于 AC 的直线使交 AD 的延长线于 N，便得到和 $\triangle AMB$ 全等的 $\triangle CNA$．这样一来，所要证明的题断就变而为要证 $\angle CMD = \angle CND$ 了．此时 $\angle CMD$ 与 $\angle CND$ 所属的 $\triangle CMD$ 与 $\triangle CND$ 已经具备全等的条件：边 CD 公用；$CM = AM = CN$；$\angle DCM = \angle DCN = 45°$，于是问题得以解决．

证明 自 C 引垂直于 AC 的直线设交 AD 的延长线于 N. 命 E 是 AD 与 BM 的交点,则在 Rt$\triangle EAM$ 中,$\angle CAN$ 与 $\angle AMB$ 互余. 又在 Rt$\triangle ABM$ 中,$\angle ABM$ 与 $\angle AMB$ 互余. 因而 $\angle ABM = \angle CAN$. 添上题设的 $AB = CA$,可见 Rt$\triangle AMB \cong$ Rt$\triangle CNA$. 于是

$$\angle AMB = \angle CND \quad ①$$

现在 $\triangle CMD$ 与 $\triangle CND$,除公用边 CD 外,据题设和以上的证明有 $CM = AM = CN$;又据题设和作图,有 $\angle DCM = 45°$ 和 $\angle DCN = 90° - 45° = 45°$. 所以 $\triangle CMD$ 与 $\triangle CND$ 全等,从而

$$\angle CMD = \angle CND \quad ②$$

由 ① 和 ②,即得

$$\angle AMB = \angle CMD$$

例题 12 若在 $\triangle ABC$ 的外边作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$(图 326),则 $\triangle ABC$ 的高线 AD 必将线段 FH 平分.

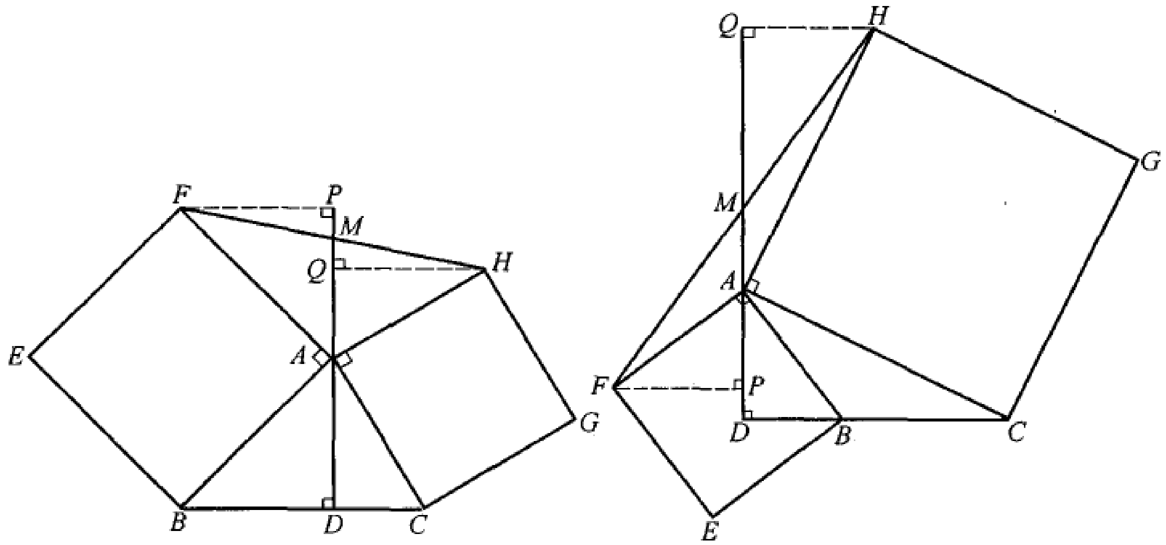


图 326

题设 正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$ 在 $\triangle ABC$ 的外边,$AD \perp BC$ 于 D,延长 DA 交 FH 于 M.

题断 $FM = HM$.

思索方法 原图中有许多直角,可能是解决问题的有利条件. 现在 FM 与 HM 所属的 $\triangle AFM$ 与 $\triangle AHM$ 显然不全等,所以想到引 $FP \perp AM$ 于 P, $HQ \perp AM$ 于 Q,而设法证明 Rt$\triangle FPM$ 与 Rt$\triangle HQM$ 全等. 目前因为这两个三角形缺乏对应边相等的条件,当然尚不能马上利用它们. 希望补足它们全等的条件,必须

另寻途径证明 $FP = HQ$ 或 $MP = MQ$.后式中两线段与图中其他三角形都无关系,那么只可从前式中两线段着想. FP 属于 Rt△AFP,而这个直角三角形和 Rt△BAD 有弦 $AF = BA$ 且 $\angle FAP = 90° - \angle BAD = \angle ABD$,因此它们全等,于是 $FP = AD$.同理,由 Rt△AHQ ≌ Rt△CAD,推得 $HQ = AD$.这样,Rt△FPM 与 Rt△HQM 全等的条件便补足了.

证明　引 $FP \perp AM$ 于 P,$HQ \perp AM$ 于 Q.在 Rt△AFP 与 Rt△BAD 中,$AF = BA$ 且 $\angle FAP = 90° - \angle BAD = \angle ABD$,所以它们全等;于是

$$FP = AD \qquad ①$$

同理,Rt△AHQ ≌ Rt△CAD,从而

$$HQ = AD \qquad ②$$

由 ① 和 ② 知 $FP = HQ$;又 $\angle FMP = \angle HMQ$,可见 Rt△FPM ≌ Rt△HQM.故得

$$FM = HM$$

注　上题若应用下述的证题术2,即在射线 AM 上截一段 $AR = BC$,然后证 $AFRH$ 是平行四边形,也可以达到目的.

证题术 2　证两线段或两角相等,可以斟酌情形,依照适当的定理添设若干线段或角,然后以它们为媒介来达到求证的结果.

例题 13　直线 a 不切于 ⊙O,$OA \perp a$ 于 A(图 327).过点 A 作一割线交 ⊙O 于 B,C,在此两点作 ⊙O 的切线设交 a 于 E,F,则 $AE = AF$.

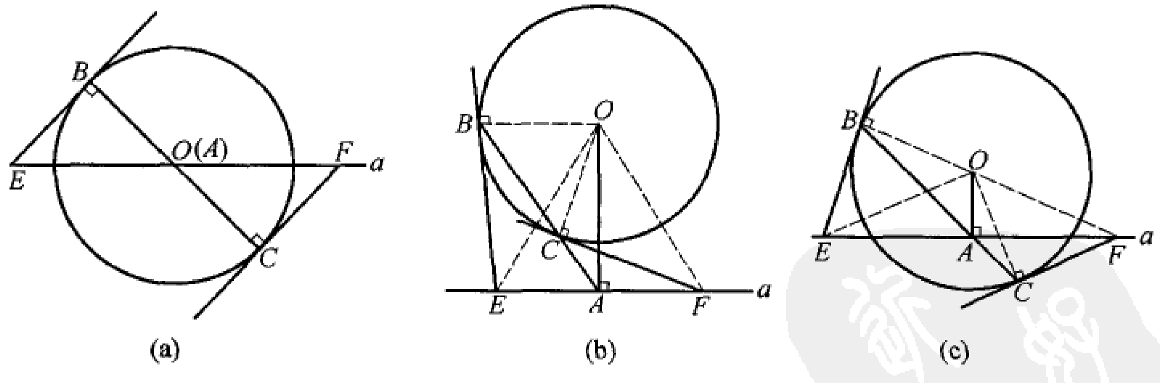


图 327

题设　直线 a 不切于 ⊙O,$OA \perp a$ 于 A;割线 ABC 交 ⊙O 于 B,C,切线 BE,CF 交 a 于 E,F.

题断　$AE = AF$.

思索方法　当 a 通过点 O 时(图 327(a)),$AE = AF$ 显而易见;a 不通过点 O 时(图 327(b)(c)),欲证 $AE = AF$ 成立,只需证 △OEF 等腰,或证 $\angle OEF =$

$\angle OFE$.但这两角又和哪些角有关系呢?按题设,$\angle OAE = \angle OBE = 90^\circ$ 及 $\angle OAF = \angle OCF = 90^\circ$,可见 O,E,A,B 四点及 O,F,A,C 四点各同在一圆上;由此得知 $\angle OEF = \angle OBC$,$\angle OFE = \angle OCB$. 于是问题便转而为求证 $\angle OBC = \angle OCB$ 了,然而这已是十分明白的.

证明 若 a 通过圆心 O,则 A 与 O 重合为一点(图 327(a)).这时极易由 $\text{Rt}\triangle AEB \cong \text{Rt}\triangle AFC$ 推得 $AE = AF$.

现在假定 a 不通过 O 点(图 327(b)(c)).若将 OB,OC,OE,OF 联结,则由 $OB = OC$ 知道

$$\angle OBC = \angle OCB \qquad ①$$

又按题设,$\angle OAE = \angle OBE = 90^\circ$ 及 $\angle OAF = \angle OCF = 90^\circ$(§12定理73(2)),可见 O,E,A,B 四点及 O,F,A,C 四点各同在一圆上(§14 定理 98),因此

$$\angle OEF = \angle OBC$$

$$\angle OFE = \angle OCB \qquad ②$$

那么由 ① 和 ② 推得 $\angle OEF = \angle OFE$;于是 $OE = OF$.故

$$AE = AF$$

例题 14 设 P 是 $\square ABCD$ 内部的一点(图 328),合于 $\angle PAB = \angle PCB$,则 $\angle PBA = \angle PDA$.

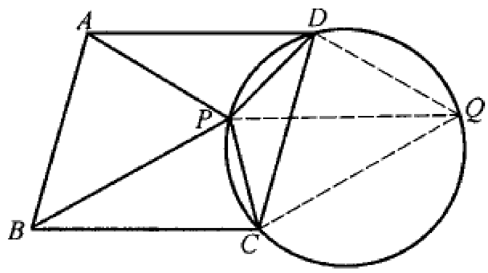


图 328

题设 P 是 $\square ABCD$ 内部的一点,且

$$\angle PAB = \angle PCB \qquad ①$$

题断

$$\angle PBA = \angle PDA \qquad ②$$

思索方法一 本题的难处,是题里说到的四个角,位置处得很分散,一时不易发现它们的关系.欲打破难关,必须设法把它们集中在一个易于联络的图形里面.题中所设的是一个平行四边形和两个相等的角,求证的又是两角相等,而平行线极容易产生相等的角,故不妨试作$\overline{PQ} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{AD}$(当然也有$\overline{PQ} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{BC}$).这无异说,我们已迁 $\triangle ABP$ 至 $\triangle DCQ$.经过这样迁移后,题中所说的四个角便集中到四边形 $PCQD$ 里面去了:

$$\angle PAB = \angle QDC, \angle PBA = \angle QCD$$
$$\angle PCB = \angle QPC, \angle PDA = \angle QPD$$

那么欲证②成立，但证 $\angle QCD = \angle QPD$ 即可，于是问题变成要看 C, D, P, Q 四点是否同在一圆上．然而据①知 $\angle QDC = \angle QPC$，这确定了问题的答案是肯定的．

证明一　按题设有 $\overline{AD} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{BC}$，故若作 $\overline{PQ} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{AD}$，则必 $\overline{PQ} \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{BC}$．这样一来，$ADQP$ 和 $BCQP$ 便都是平行四边形（§9 定理 49(2)）．于是在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle DCQ$ 中，有 $AB = DC, AP = DQ, BP = CQ$，可见这两三角形全等．由此

$$\angle PAB = \angle QDC \quad ③$$
$$\angle PBA = \angle QCD \quad ④$$

另外由于 $AD \parallel PQ \parallel BC$，得知

$$\angle PCB = \angle QPC \quad ⑤$$
$$\angle PDA = \angle QPD \quad ⑥$$

现在看①，③，⑤可得 $\angle QDC = \angle QPC$，故 C, D, P, Q 四点同在一圆上．从而

$$\angle QCD = \angle QPD \quad ⑦$$

至此，由④，⑥，⑦，即可证实②．

思索方法二　设法使题中所说的四个角集中到一个有外接圆的四边形里面去，这样的四边形还可以由点 P 在 $\square ABCD$ 的每边所在直线上的射影来确定．假设 P 在 AB, BC, CD, DA 上的射影是 E, F, G, H（图 329），那么①中两角可以换作 $\angle EHF$ 与 $\angle EGF$，②中两角可以换作 $\angle EFH$ 与 $\angle EGH$．因此用四边形 $EFGH$ 一样得到如前的效果．

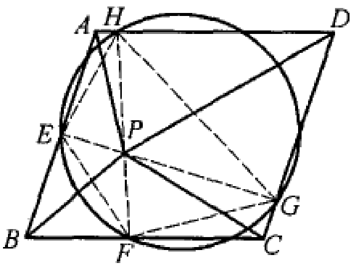


图 329

证明二　过点 P 作 $EG \perp AB, CD$ 于 E, G，又作 $FH \perp BC, DA$ 于 F, H 并联结四边形 $EFGH$．显然，这时 P, H, A, E 四点，P, E, B, F 四点，P, F, C, G 四点，P, G, D, H 四点分别同在一圆上，因此有

$$\left.\begin{array}{l}\angle PAB = \angle EHF \\ \angle PCB = \angle EGF\end{array}\right\} \quad ⑧$$
$$\left.\begin{array}{l}\angle PBA = \angle EFH \\ \angle PDA = \angle EGH\end{array}\right\} \quad ⑨$$

由①和⑧，得 $\angle EHF = \angle EGF$；可见 E, F, G, H 四点同在一圆上．因而

$$\angle EFH = \angle EGH \quad ⑩$$

最后从 ⑨ 和 ⑩,立知 ② 成立.

例题15 设$\odot O$与$\odot O'$的心各在他圆之外(图330),自点O向$\odot O'$引两切线(射线)交$\odot O$于A,B,自点O'向$\odot O$引两切线(射线),交$\odot O'$于A',B',则弦$AB=A'B'$.

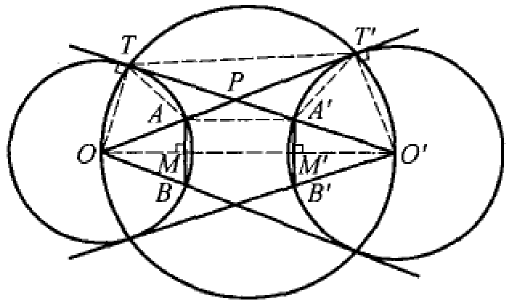


图 330

题设 $AB,A'B'$分别为$\odot O,\odot O'$的弦,射线OA,OB切$\odot O'$,射线$O'A'$,$O'B'$切$\odot O$.

题断 $AB=A'B'$.

思索方法一 显然,本题的图形关于连心线OO'对称,故$AB,A'B'$必被OO'垂直平分于M,M';因此,要证$AB=A'B'$,只需证$AM=A'M'$便可.假定A,A'两点同在连心线OO'的一侧,那么欲证$AM=A'M'$,可以设法证明$AA'\parallel OO'$.设OA切$\odot O'$于T',$O'A'$切$\odot O$于T,则问题转而为求证$\angle T'AA'=\angle T'OO'$(就图330来看).要证这个等式,必须在角的方面寻求条件.根据题设,我们发现$\angle OTO'=\angle OT'O'=90°$,于是$O,O',T,T'$四点同在一圆上(画出这圆来),因此$\angle T'TA'=\angle T'OO'$.所以能证$\angle T'AA'=\angle T'TA'$,问题就得到解决.怎样证这两个角相等呢?这需要看$A,A',T,T'$四点是否同在一圆上,如果是的话那就好了.要考察这件事,应从四边形$AA'T'T$中其他角的关系去着想.它的对角互补证不出来,可看$\angle TAT'$与$\angle TA'T'$是否相等.这两角各是等腰三角形$\triangle OAT$及$\triangle O'A'T'$底角的外角,而这两个等腰三角形的顶角$\angle AOT$与$\angle A'O'T'$已知其相等(由于O,O',T,T'四点同在一圆上),于是$\angle TAT'$与$\angle TA'T'$的相等问题解决了.

证明一 因$OA=OB$且$O'A'=O'B'$,而连心线OO'平分$\angle AOB$及$\angle A'O'B'$(§12,定理74),故必垂直平分AB及$A'B'$,设其垂足为M,M'.今设A,A'两点同在OO'的一侧,OA切$\odot O'$于T',$O'A'$切$\odot O$于T.于是$\angle OTO'=\angle OT'O'=90°$,可见$O,O',T,T'$四点同在一圆上,因而(就图330来看)

$$\angle T'OO'=\angle T'TA' \quad ①$$

$$\angle AOT = \angle A'O'T' \quad ②$$

在等腰三角形 $\triangle OAT$ 与 $\triangle O'A'T'$ 中，由 ② 得知 $\angle TAT' = \angle TA'T'$；这等式确定了 A, A', T, T' 四点同在一圆上，从而

$$\angle T'AA' = \angle T'TA' \quad ③$$

由 ① 和 ③，得 $\angle T'AA' = \angle T'OO'$；那么 $AA' /\!/ OO'$. 由此 $AM = A'M'$（§9 定理 42 推论 3）；于是

$$AB = A'B'$$

注　(1) 当 T' 介于 O 与 A 之间因而 T 介于 O' 与 A' 之间时，但将以上证法略加修改，仍可适用.

(2) 命 OT' 与 $O'T$ 的交点为 P，则由 $\dfrac{\overline{AO}}{PO} = \dfrac{\overline{A'O'}}{PO'}$（利用 $\triangle POT \backsim \triangle PO'T'$），也可证明 $AA' /\!/ OO'$（§16 定理 111(3)）.

思索方法二　一般地说，这问题是在两个不等圆中证明两弦相等，那么关于等圆的一切定理于此自然要失效了. 大凡由许多不等量产生等量，往往是由各量的关系式经过变形而来的，例如，$a : x = x : b$ 可变为 $x = \sqrt{ab}$，$a : b = c : x$ 可变为 $x = \dfrac{bc}{a}$ 等. 因此要证 $AM = A'M'$（沿用图 330），可以设法用两圆的已知量把这两个线段表示出来. 图中 AM 及 $A'M'$ 分别是 $\mathrm{Rt}\triangle OAM$ 及 $\mathrm{Rt}\triangle O'A'M'$ 的一边，而 $\mathrm{Rt}\triangle OAM \backsim \mathrm{Rt}\triangle OO'T'$，$\mathrm{Rt}\triangle O'A'M' \backsim \mathrm{Rt}\triangle O'OT$，这些三角形的各边之中含有两圆的半径及圆心距，所以利用这两对相似三角形很可能解决我们的问题. 我们不妨一试. 如果此路可通，当较前法捷便.

证明二　同前理，连心线 OO' 垂直平分 $AB, A'B'$ 于 M, M'，又 $\angle OT'O' = \angle OTO' = 90°$. 显然，$\mathrm{Rt}\triangle OAM \backsim \mathrm{Rt}\triangle OO'T'$ 且 $\mathrm{Rt}\triangle O'A'M' \backsim \mathrm{Rt}\triangle O'OT$，因而

$$\frac{AM}{O'T'} = \frac{OA}{OO'},\quad \frac{A'M'}{OT} = \frac{O'A'}{O'O}$$

将这两个等式变为

$$AM = \frac{OA \cdot O'T'}{OO'},\quad A'M' = \frac{OT \cdot O'A'}{O'O}$$

后，立见它们的右端相等，于是 $AM = A'M'$. 将这等式的两端加倍，便可以得到我们要证的等式

$$AB = A'B'$$

习题 10

1. 两圆交于 A, B 两点. 在每圆中各作一弦 AC, AD 使切于另一圆，求证：

$\angle ABC = \angle ABD$.

2. 圆中直径 AB 与弦 AC 夹着 $30°$ 的角.过点 C 引切线交 AB 的延长线于 D,求证:$AC = CD$.

3. 设 BC 切 $\odot O$ 于 B,OC 垂直于半径 OA 且交直线 AB 于 D,求证:$BC = CD$.

4. AB 是 $\odot O$ 的弦.过 A,O 两点任作一圆交直线 AB 于 C,交 $\odot O$ 于 D,求证:$BC = CD$.

5. AB 是某圆的弦,在这弦的两方延长线上各取一点 C,D,使 $AC = BD$,然后自 C,D 各向圆引一条切线令分居 AB 的两侧,求证:两切点的连线必平分弦 AB.

6. 过圆上任意一点向固定的两直径作垂线,求证:两垂足的距离为定长.

7. 两圆交于点 P.过点 P 任作两直线交一圆于 A,B,另一圆于 A',B',求证:直线 AB 与 $A'B'$ 有一定的交角.

8. $\odot O$ 与 $\odot O'$ 交于点 P,M 是 OO' 的中点.过点 P 作直线垂直于 PM 且交两圆于 A,A',求证:$PA = PA'$.

9. $\odot O$ 与 $\odot O'$ 交于点 P,M 是 OO' 的中点.过点 P 任作直线交两圆于 A,A',若 Q 是 AA' 的中点,求证:$MP = MQ$.

10. 两圆外切.一外公切线切其中一圆于 A,AB 为此圆的直径,求证:自 B 至另一圆的切线长等于 AB.

11. 以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为弦作一圆交直线 AB,AC 于 E,F,联结 EF 设交 $\odot ABC$ 于 G,H,求证:$AG = AH$.

12. O 是 $\triangle ABC$ 的外心.作 $\odot BOC$ 设交直线 AB,AC 于 E,F,求证:$AE = CE$,$AF = BF$.

13. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的内外平分线交直线 BC 于 E 及 F,求证:过点 A 所作 $\odot ABC$ 的切线必平分 EF 线段.

14. 设 Rt$\triangle ABC$ 的弦 BC 的中垂线交直线 AB,AC 于 E,F,求证:过点 A 所作 $\odot ABC$ 的切线必平分 EF 线段.

15. M 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 BC 的中点.通过 A,M 两点任作一圆交直线 AB 于 B,此圆中的弦 EF 平行于 BC,求证:EF 之长一定.

16. $\triangle ABC$ 中,$\angle A = 90°$,$\angle B$ 的平分线交边 AC 于 E 而交边 BC 的高线于 D.今过点 D 作直线平行于 BC 而交 AC 于 F,求证:$AE = CF$.

17. $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$.在射线 BA 上取点 E,在 AC 的延长线上取点 F,使 $BE = CF$.联结 EF 交 BC 于 D,求证:$DE = DF$.

18. $\triangle ABC$ 中，M 是边 BC 的中点，$\angle A$ 的平分线交边 BC 于 D. 过 A，D，M 三点作圆设交直线 AB，AC 于 E，F，求证：$BE = CF$.

19. 试对上题设计一种避免用比例定理的证法.

20. $ABCD$ 是正方形，直线 $DX \parallel AC$. 设以点 C 为圆心，CA 长为半径画弧交 DX 于 E（两交点任取其一），CE 交 AD 于 F，求证：$AE = AF$.

21. 四边形有一对对边相等，求证：另一对对边中点的连线与该对等边所在直线的交角相等.

22. 求证：若一直线与圆内接四边形一对对边所在直线交成相等的同侧内角，则亦与另一对对边所在直线交成相等的同侧内角.

23. 求证：若圆内接四边形的两条对角线互相垂直，则过其交点所作任一边的垂线必将对边平分.（本题称婆罗摩笈多定理. 婆罗摩笈多(Brahmagupta)是7世纪时的印度数学家.）

24. 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，P 是它的对角线交点. 过点 P 作直线垂直于 PO 交直线 AB，CD 于 E，F，求证：$PE = PF$.（提示：作出 A 关于 PO 的对称点或作出 AB 及 CD 的中点.）

25. AD 是 $\odot ABC$ 的直径，过 D 作切线设交 BC 于 P. 将点 P 与圆心 O 连成直线交 AB，AC 于 M，N，求证：$OM = ON$.（提示：过 B 作直线平行于 MN.）

第二节　和差倍分与代数证法

§37　关于和差倍分的证题术

证题术 3　欲证线段 $a = b \pm c$，可先作一线段 $p = b \pm c$，然后证 $a = p$；或者作一线段 $q = a \mp c$，而证 $b = q$. 角亦仿此.

例题 16　正三角形外接圆上任一点至三顶点的联结线，其长者必等于其余二者的和.

题设　$\triangle ABC$ 是正三角形（图 331），P 是 $\odot ABC$ 的 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点.

题断　$PA = PB + PC$.

思索方法　因 PB 与 PC 不同在一条直线上，要把它们的和与 PA 比较长短很不方便，故可延长 BP 至 D，使 $PD = PC$，然后设法证明 $PA = DB$. 从图上看来，不由得要想到联结 CD 来证 $\triangle PAC$ 与 $\triangle DBC$ 全等. 关于这个问题我们已经

知道 $AC = BC$ 和 $\angle PAC = \angle DBC$ 两个条件,若再添上一个就成了.再添上哪一个条件好呢?当然最好是 $\angle ACP = \angle BCD$.这两个角都含有 $\angle BCP$,所以只需证 $\angle ACB$ 与 $\angle PCD$ 相等便可.然而 $\angle ACB = 60°$,于是问题变成要证 $\triangle PCD$ 是正三角形.想到这一步,但看 $\angle CPD = \angle BAC = 60°$ 就明白了.

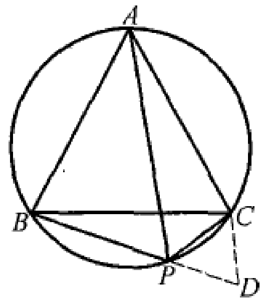


图 331

证明 延长 BP 至 D,使 $PD = PC$,然后联结 CD.由题设可知 $\angle CPD = \angle BAC = 60°$,于是 $\triangle PCD$ 是正三角形(§8 定理 38).因此 $\angle ACB = \angle PCD$,从而 $\angle ACP = \angle BCD$.

在 $\triangle PAC$ 与 $\triangle DBC$ 中,除已证的 $\angle ACP = \angle BCD$ 外,尚有 $AC = BC$ 及 $\angle PAC = \angle DBC$,所以它们是全等三角形.由此即得

$$PA = DB = PB + PD = PB + PC$$

注 证题术 3 所说的各种原则,都可以用于上题,而且加或减的方法不止一种.方法如下:

(1) 延长 PB 至 D,使 $BD = PC$,然后证 $PA = PD$(图 332(a));

(2) 在线段 PA 上截 $PD = PC$,然后证 $PB = DA$(图 332(b));

(3) 在线段 AP 上截 $AD = PC$,然后证 $PB = PD$(图 332(c)).

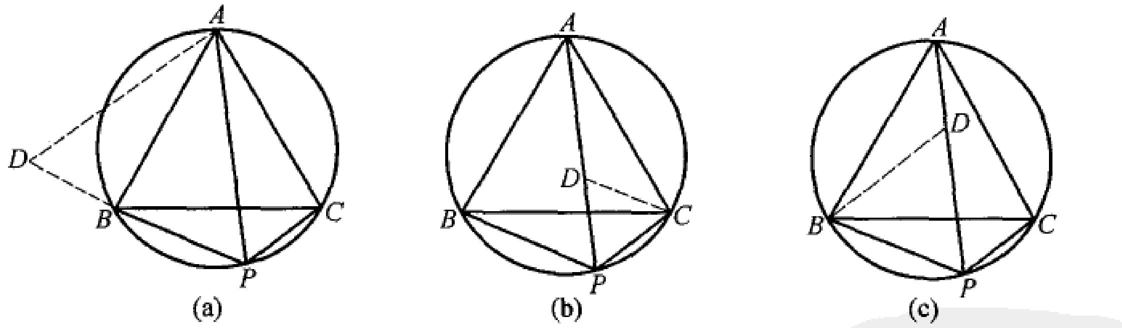


图 332

证题术 4 证一线段为另一线段的 2 倍或一半,往往延长小者至于 2 倍,或另找一线段等于小者的 2 倍,证其与大者相等;不然就平分大者取其一半,或另找一线段等于大者之半,证其与小者相等.角亦仿此.

例题 17 若在 $\triangle ABC$ 的外边作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$(图 333),则线段 FH 等于 $\triangle ABC$ 的中线 AM 的 2 倍.

题设 正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$ 在 $\triangle ABC$ 的外边,M 是边 BC 的中点.

题断 $FH = 2AM$.

思索方法一 延长 AM 至 D,使 $MD = AM$,然后设法证明 $FH = AD$.联结

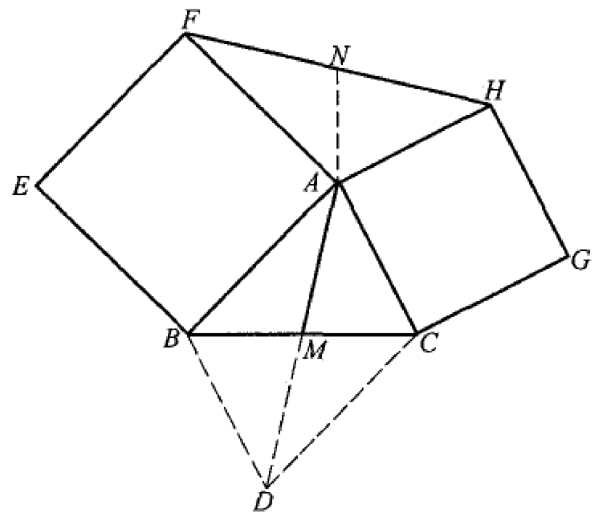


图 333

BD，CD，则 ABDC 是平行四边形．现在 FH，AD 分别是 △AFH，△BAD 的一边，而对于这两三角形，显然 AF = BA，且 AH = BD，如果再知道∠FAH = ∠ABD，那么它们全等的条件便完备了，因而我们的目的也就达到了．然而该两角相等对不对呢？这只需看一看它们和 ∠BAC 的关系立可决定．

证明一 延长 AM 至 D，使 MD = AM．联结 BD，CD，则 ABDC 是平行四边形．由此知 ∠BAC 与 ∠ABD 互补．但按题设，∠BAC 与 ∠FAH 也互补，可见 ∠FAH = ∠ABD．

现在 △AFH 与 △BAD 除有 ∠FAH = ∠ABD 外，显然还有 AF = BA 和 AH = AC = BD，所以它们全等．因此 FH = AD，即

$$FH = 2AM$$

思索方法二 取 FH 线段的中点 N 与 A 联结，试看 △AFN 与 △BAM 是否全等．显而易见的，是这两个三角形有一对对应边 AF 与 BA 相等且垂直，由此启发了我们想到其余两对对应边是否也有垂直的关系，如果是的话，问题便可解决．事实上，根据 §36 的例题 12，知道这个推想是对的．

证明二 命 FH 线段的中点为 N，并联结 AN．根据 §36 的例题 12，知道 AN ⊥ BM 且 FN ⊥ AM．又据题设，AF 与 BA 相等且垂直．这就是说，在 △AFN 与 △BAM 中，三对对应边分别互相垂直而且其中有一对对应边相等，可见它们必然全等（§17 定理 114(6)）．因此 FN = AM．2 倍此式的两端，便得所要证的等式．

例题 18 设 E 是正方形 ABCD 的边 CD 的中点（图 334），F 是 CE 线段的中点，则

$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAF$

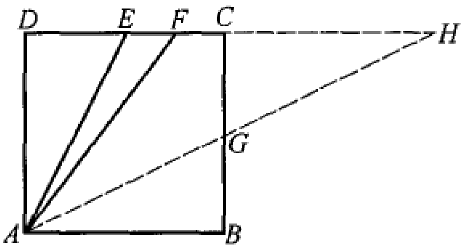


图 334

题设 在正方形 $ABCD$ 上，E 是边 CD 的中点，F 是 CE 线段的中点.

题断 $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAF$.

思索方法 作 $\angle BAF$ 的平分线交边 BC 于 G，则本题无异于求证 $\angle DAE = \angle BAG$.要证实这件事，可从 Rt△ADE 与 Rt△ABG 的全等关系来着想. 它们是否全等呢?视乎 G 是否是边 BC 的中点以为断. 现在研究点 G 在边 BC 上的位置问题，图上已无适当的点线可资联系，不由得延长 AG 抵于 DC 延长线上的点 H，使问题转化为求证 $AB = CH$. 至此我们发觉点 F 的性质还没有用到，所以要把它引进我们目前的问题里去才好. 想念及此，问题又变成要推断 $FH = \frac{5}{4}AB$ 成立. 但是由于 $\angle FAH = \angle FHA$，应该 $FH = FA$，那么看看 FA 是否等于 $\frac{5}{4}AB$. 事实上，这已是十分明显的事，因为 Rt△FDA 明明是一个商高三角形.

证明 作 $\angle BAF$ 的平分线设交直线 BC，DC 于 G，H，则由于 $\angle FAH = \angle BAH = \angle FHA$，知 $FH = FA$. 但按题设，Rt△FDA 应是一个商高三角形，必然 $FA = \frac{5}{4}AB$（§18 定理 124）. 因而

$$CH = FH - FC = \frac{5}{4}AB - \frac{1}{4}AB = AB$$

可见 Rt△$CHG \cong$ Rt△BAG. 由此 $CG = BG$，即 G 是 BC 的中点. 这样一来，自然 Rt△$ADE \cong$ Rt△ABG；因之 $\angle DAE = \angle BAG$. 故得

$$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAF$$

例题 19 三角形任一顶点至垂心的距离，等于外心至对边的距离的 2 倍.

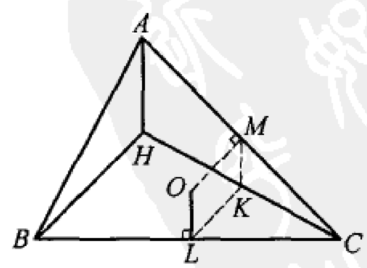


图 335

题设 H 是 △ABC 的垂心，O 是外心，$OL \perp BC$ 于 L（图 335）.

题断 $\overline{AH} = 2\,\overline{OL}$.

思索方法一 本题的题断可以改写成 $\frac{1}{2}\,\overline{AH} =$

$\overline{OL}$,因此先设法找一个适当的线段使等于$\frac{1}{2}\overline{AH}$.这就很自然地联想到 CA,CH 的中点 M,K 的联结线来,因为我们早已熟知$\overline{MK}=\frac{1}{2}\overline{AH}$.于是问题便成为要证$\overline{MK}=\overline{OL}$.这等式若成立,则$\overline{LK}=\overline{OM}$也成立,那么 $OLKM$ 非为平行四边形不可.倒过来说,若能证明 $OLKM$ 是平行四边形,问题即告解决.然而这是容易证明的,我们早已看出四边形 $OLKM$ 的两双对边分别垂直于 BC,CA 了.

证明一 作 $OM\perp CA$ 于 M.题设 O 是$\triangle ABC$ 的外心,所以 L,M 分别是 BC,CA 两边的中点.取 CH 的中点 K,联结 KL,KM,则 $MK\parallel AH$ 且 $LK\parallel BH$.因为 H 是$\triangle ABC$ 的垂心,可见 $OL\parallel AH$ 且 $OM\parallel BH$(§7定理29推论).由此得知 $OLKM$ 是平行四边形.那么

$$\overline{OL}=\overline{MK}=\frac{1}{2}\overline{AH}$$

故

$$\overline{AH}=2\,\overline{OL}$$

思索方法二 要证$\overline{AH}=2\,\overline{OL}$,可设法作一线段使等于$\overline{OL}$的2倍,然后证它等于$\overline{AH}$.要找一个线段等于$\overline{OL}$的2倍,最好有一个三角形以 OL 为中位线,那么它所平行的边可能合于我们的理想.我们已经晓得 L 是边 BC 的中点,而 O 是$\odot ABC$ 任何直径的中点,所以联结 BO 并延长为$\odot ABC$ 的直径 BD 后(图336),便得到$\overline{DC}=2\,\overline{OL}$.不仅如此,同时还产生 $DC\perp BC$ 且 $DA\perp AB$,因而形成$\square AHCD$.至此,证明的途径已属了如指掌.

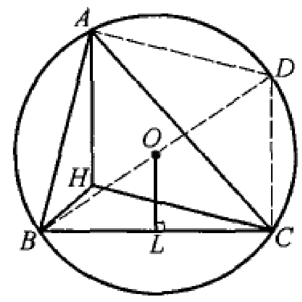


图 336

证明二 作$\triangle ABC$ 外接圆的直径 BD.联结 DC,DA,则 $DC\perp BC$,且 $DA\perp AB$.又题设 H 是$\triangle ABC$ 的垂心,应该 $AH\perp BC$ 且 $CH\perp AB$.于是 $AH\parallel DC$ 且 $CH\parallel DA$,即 $AHCD$ 是平行四边形.所以

$$\overline{AH}=\overline{DC}=2\,\overline{OL}$$

§38 代数证法

证题术5 证题时若涉及的量较多,可列出各量间的关系式(为省事可用单个字母表示各量),然后利用代数方法来推算.

例题20 $\triangle ABC$ 中(图337),设 $AC>AB$.在边 AC 上截 $AD=AB$,则

$\angle CBD = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

题设 在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 AC 上一点，且 $AD = AB$.

题断 $\angle CBD = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

证明 令 $\angle CBD = x, \angle B = p, \angle C = q$，则见

$$x + q = \angle ADB$$
$$p - x = \angle ABD$$

但按题设应有 $\angle ADB = \angle ABD$，故

$$x + q = p - x$$

就 x 解此方程，得

$$x = \frac{1}{2}(p - q)$$

这便是我们所希望的结果.

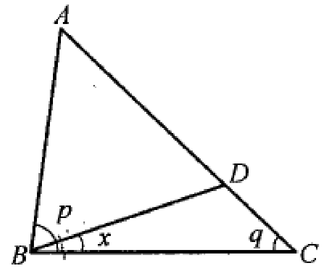


图 337

例题 21 有七个等圆及一个圆环，其中六圆轮回外切，并均外切于第七圆，且又同内切于圆环的内圆①. 若圆环的面积等于这七个圆的面积和，则圆环的内外半径之差等于它们的半径.

题设 六个等圆 $\odot O_1(r), \odot O_2(r), \cdots, \odot O_6(r)$ 轮回外切（图 338），且均外切于 $\odot O(r)$，又同内切于圆环 P 的内圆. 圆环 P 的面积等于七个圆 $\odot O(r), \odot O_1(r), \cdots, \odot O_6(r)$ 的面积和.

题断 圆环 P 的内外半径之差等于 r.

证明 按题设，知圆环 P 的内圆半径为 $3r$（§ 12 定理 79），若设 P 的外半径为 $3r + x$，其中 x 为正数，则 P 的面积等于（§ 24 定理 144）

$$\pi(3r + x)^2 - \pi(3r)^2 = \pi(x^2 + 6rx)$$

而七个等圆的面积和为 $7\pi r^2$，由此依题意得方程

$$\pi(x^2 + 6rx) = 7\pi r^2$$

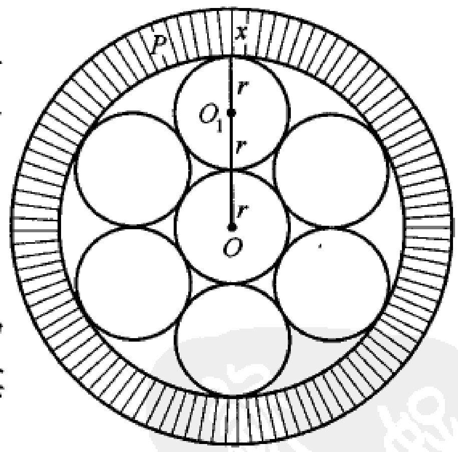


图 338

① 这种图形的存在，可参考习题 3 第 9 题.

约去公因数 π 后，移项并分解因式，方程变为

$$(x-r)(x+7r)=0$$

因为 x 为正数，所以 $x\neq-7r$，那么

$$x=r$$

这就是本题的证明.

例题22 在 ▱$ABCD$ 中(图 339)，若 $AC^2\cdot BD^2=AB^4+AD^4$，则这平行四边形的锐角等于 45°.

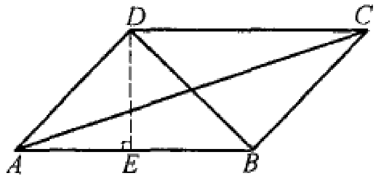


图 339

题设 在 ▱$ABCD$ 中，$\angle A$ 是锐角，且 $AC^2\cdot BD^2=AB^4+AD^4$.

题断 $\angle A=45°$.

证明 令 $AB=a$，$AD=b$，$AC=p$，$BD=q$. 因(§18，定理 126)

$$p^2+q^2=2(a^2+b^2)$$
$$p^2q^2=a^4+b^4$$

故据代数学中的韦达(Viete，1540—1603)定理，知 p^2 和 q^2 分别等于下面方程的两根

$$x^2-2(a^2+b^2)x+a^4+b^4=0$$

解这个方程，得

$$x=a^2+b^2\pm ab\sqrt{2}$$

题设 $\angle A$ 是锐角，因而 $\angle B$ 是钝角，可见 $q<p$，那么

$$q^2=a^2+b^2-ab\sqrt{2} \qquad ①$$

另一方面，作 $DE\perp AB$ 于 E，令 $AE=b'$，则(§18 定理 125)

$$q^2=a^2+b^2-2ab' \qquad ②$$

比较 ① 和 ②，可得 $b\sqrt{2}=2b'$，即 $\frac{AD}{AE}=\sqrt{2}$. 因知

$$\angle A=45°$$

习题 11

1. 试按图 332 所示的三种方法证明 §37 的例题 16.

2. 由任一点向正三角形的三条高线作垂线，求证：这三条垂线中的长者必等于其余二者的和.

3. 求证：正六边形外接圆上任一点至六顶点的联结线，其中两长者的和必等于其余四者的和.

4. 求证：等腰三角形底边上任一点至两腰的距离和等于腰的高.

5. 求证：等腰三角形底边延长线上任一点至两腰(所在直线)的距离差等于腰的高.

6. 求证：正三角形内部任一点至三边的距离和等于这三角形的高.

7. 在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中，顶角 $\angle A = 100°$. 作 $\angle B$ 的平分线交边 AC 于 E，求证：$AE + BE = BC$.

8. P 是 $\angle XAY$ 的平分线上一定点，过 A, P 两点任作一圆.

(1) 若这圆交 $\angle XAY$ 的两边于 B, C，求证：$AB + AC$ 为定长；

(2) 若这圆交 $\angle XAY$ 的一边于 B，而交另一边的反向延长线于 C，求证：$AB - AC$ 为定长.

9. 求证：直角扇形的内切圆半径，等于这扇形的弦与半径之差.

10. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，O 是外心. 若 $\angle A = 60°$ 或 $120°$，求证：$AH = AO$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，F 是 AB 边的中点，E 是在边 AC 上 $\frac{2}{3}$ 处的点(自 A 量起).

 联结 BE 与 CF 交于 O，求证：$OE = \frac{1}{4}BE, OF = \frac{1}{2}CF$.

12. 过 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点作直线平行于 $\angle A$ 的平分线而交直线 AB, AC 于 E, F，求证：$BE = CF = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

13. 在上题中，若所作直线垂直于 $\angle A$ 的平分线，求证：$BE = CF = \frac{1}{2}|AB - AC|$.

14. 四点两两相连成四个三角形，求证：它们的内切圆中任两圆的公切线等于另两圆的公切线，但这些公切线以落在各连线上面的为限.

15. 求证：直角三角形的直角顶点在两锐角平分线上的射影之距离，等于内切圆的半径.

16. 直角三角形的弦高分原形为两个三角形，求证：所得两个三角形与原三角形的内切圆半径和等于该高的长.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，作 $\odot A\Omega B$ 使切于 BC，又作 $\odot A\Omega C$ 使切于 AB，求证：$\angle B\Omega C = \angle A + \angle B$.

18. 求证：三角形顶角的平分线与底边的高所夹的角等于两底角差的一半.

19. 在 $\triangle ABC$ 的 CA 延长线上截 $AD = AB$，求证

$$\angle CBD = 90° + \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$$

角(内角)的差的一半.

21.求证:折四边形一对对角的平分线所交成的角,有一个等于另一对对角的和的一半.

22.AB 是 $\odot O$ 的直径,弦 CD 交半径 OA 于 P.若 $PC = PO$,求证:$\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{BD}$.

23.延长 $\odot O$ 的半径 OA 至 B,使 $AB = OA$.t 是不穿过 A 与 B 之间的一条切线,C 是 B 在 t 上的射影,求证:$\angle ACB = \frac{1}{3}\angle CAO$.

24.两圆切于点 P,一直线交其中一圆于 A,B,交另一圆于 A',B'.

(1)若两圆外切,求证:$\angle APA' + \angle BPB' = 180°$;

(2)若两圆内切,求证:则 $\angle APA' = \angle BPB'$.

25.两圆交于 P,Q 两点,一外公切线切它们于 A,B,求证:$\angle APB + \angle AQB = 180°$.

26.$\odot O$ 与 $\odot O'$ 交于 P,Q 两点:一外公切线切它们于 A,B,求证:$\angle APB$ 与 $\angle AQB$ 两角中,其小者等于 $\frac{1}{2}\angle OPO'$,大者等于 $180° - \frac{1}{2}\angle OPO'$.

27.在矩形 $ABCD$ 中,$AB = 3BC$.设 E,F 是边 CD 的三等分点,即 $CE = EF = FD$,求证:$\angle BAC + \angle BAE + \angle BAF = 90°$.

28.设三角形的底边为 a,高为 h.今有一正方形,它的一边落在三角形底边所在的直线上,另两个顶点分别落在三角形的两腰上,求证:这个正方形的边长等于 $\frac{ah}{a+h}$.

29.求证:正三角形外接圆上任一点至三顶点的距离之平方和等于此正三角形边长平方的2倍.

30.设 P 是正三角形 $\triangle ABC$ 外接圆上的一点.

(1)当 P 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上时,求证:$AB^2 = PA^2 - PB \cdot PC$;

(2)当 P 在 $\overset{\frown}{BAC}$ 上时,求证:$AB^2 = PA^2 + PB \cdot PC$.

31.求证:圆上任一点至内接正 n 边形各顶点的距离之平方和等于半径平方的 $2n$ 倍.

32.求证:正 n 边形所有边与所有对角线的平方和等于外接圆半径平方的 n^2 倍.

第三节 不 等

§ 39 关于不等的证题术

证题术 6 证两线段或两角不等，以斟酌情形应用关于不等的已知定理，必要时须设法造成适于利用已知定理的条件.

例题 23 设三角形的一边不大于另一边的一半，则其对角小于另一边对角的一半.

题设 在 $\triangle ABC$ 中(图 340)，$AB \leqslant \frac{1}{2}AC$.

题断 $\angle ACB < \frac{1}{2}\angle ABC$ ①

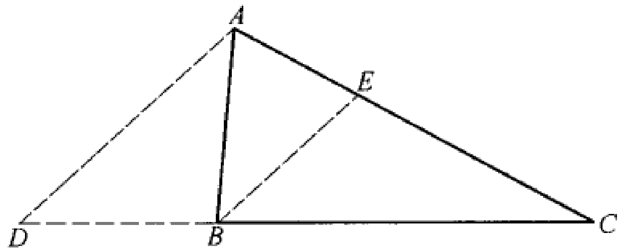


图 340

思索方法 要证 ① 成立，最好先作一个角使它等于 $\angle ABC$ 的一半，然后拿它和 $\angle ACB$ 比较. 最易想到的，是作 $\angle ABC$ 的平分线 BE(交 AC 于 E)，而从 EB 与 EC 的不等关系来解决这问题. 可是在目前的情况下，EB 与 EC 孰长孰短尚难分晓，所以这条路可能很曲折. 现在的难处是 EB 虽然与 BC 造成$\frac{1}{2}\angle ABC$ 的角，但它与题设条件 $AB \leqslant \frac{1}{2}AC$ 却看不出有什么关系. 为了克服这个困难，我们对 EB 应取其所长，去其所短；这就是说，要设法改变 EB 的位置，一方面使它仍与 BC 造成$\frac{1}{2}\angle ABC$ 的角，一方面使点 E 处于对我们最有利的地位. 希望点 E 与AB，AC 发生连带的关系，比较理想的位置莫过于使它和点 A 重合. 当点 E 移到点A 的位置时，假定点 B 变为点D(仍在直线 BC 上，且保持 $AD \parallel EB$). 这样一来，EB 与EC 的不等关系，便可以换作 AD 与AC 的不等关系了，因为它们显然是成比例的. 在这个新的情况下，AC 是已知条件中的一个角色，而 AD 与

AB 的关系也不难找到线索.事实上,由于 $\angle BDA = \angle CBE = \angle ABE = \angle BAD$,得知 $AB = BD$,于是从 $\triangle ABD$ 晓得 $AD < 2AB$;再想到题设的 $AB \leqslant \frac{1}{2}AC$,便马上推得 $AD < AC$.到此证法本来想通了,但是回头系统地整理一下,发觉我们明白了 $BD = AB$ 之后,便有了确定点 D 的直接方法,于是 BE 实没有添设的必要.所以虽然 BE 的启发作用可取,然而为了证法简洁,在证明中大可把它摒弃不用.

证明 延长 CB 至 D,使 $BD = AB$,因而 $\angle ADB = \angle BAD$.由此 $\angle ABC = 2\angle ADB$,即

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ABC \tag{②}$$

在 $\triangle ABD$ 中,$AB + BD > AD$,即 $AD < 2AB$.但按题设,应有 $2AB \leqslant AC$,可见 $AD < AC$.那么在 $\triangle ADC$ 中,便该

$$\angle ACB < \angle ADB \tag{③}$$

最后将 ② 代入 ③,即得 ①.

例题 24 等腰三角形 $\triangle ABC$ 与非等腰三角形 $\triangle A'BC$ 同在公共底边 BC 的一侧且周长相等(图341).设边 AC 与边 $A'B$ 交于点 O,则 $OA > OA'$.

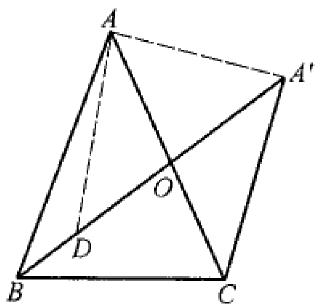


图 341

题设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 同在 BC 的一侧,$AB = AC$,$AB + AC = A'B + A'C$,O 是边 AC 与边 $A'B$ 的交点.

题断 $OA > OA'$.

思索方法 要证 $OA > OA'$,可联结 AA',而证 $\angle OA'A > \angle OAA'$.这当然不能从 $\triangle OAA'$ 本身求得解决,还须别寻途径.我们看到 $\angle OA'A$ 及 $\angle OAA'$ 分别是 $\triangle A'AB$ 及 $\triangle AA'C$ 的一角,那么最好能知道这两个三角形里夹这两角的边对应相等而第三边不等.可惜的是,AA' 虽然是这两个三角形的公共边,但 $A'B$ 与 AC 并不相等,为了弥补这个缺陷,我们就得创造条件,在射线 $A'B$ 上截取线段 $A'D$ 使其等于 AC①,联结 AD,然后改看 $\triangle A'AD$ 的边 AD 是否大于 $\triangle AA'C$ 的边 $A'C$.AD 的长短,当然同点 D 的位置有关,这不可不先加考虑.因为点 O 既在边 $A'B$ 上又在边 AC 上,所以 $\angle A'CB > \angle ACB = \angle ABC > \angle A'BC$,于是 $A'B > A'C$.从而 $A'B > \frac{1}{2}(A'B + A'C) = \frac{1}{2}(AB +$

① 也可以在射线 AC 上截取等于 $A'B$ 的线段,这情形留给读者考究.

$AC)=AC$,这就断定了点 D 在边 $A'B$ 上.那么 $AB=DB+A'C$,即 $AB-DB=A'C$.然而在 $\triangle ABD$ 中,$AD>AB-BD$.至此,AD 是否大于 $A'C$ 的问题解决了.

证明 由题设可知 $\angle A'CB>\angle ACB=\angle ABC>\angle A'BC$,于是 $A'B>A'C$.由此 $A'B>\frac{1}{2}(A'B+A'C)=\frac{1}{2}(AB+AC)=AC$.所以在边 $A'B$ 上必有一点 D,使得 $A'D=AC$.这样一来,很容易推得 $AB=DB+A'C$,即

$$AB-DB=A'C \quad ①$$

联结 AD,则在 $\triangle ABD$ 中,有

$$AD>AB-DB \quad ②$$

以①代入②,便是 $AD>A'C$;从而在 $\triangle A'AD$ 与 $\triangle AA'C$ 中,$\angle OA'A>\angle OAA'$.再从 $\triangle OAA'$ 来看,便得

$$OA>OA'$$

证题术 7 若所欲比较大小的线段或角,在原位置不易观察,可把它们迁移到适当的位置然后比较.

例题 25 若等腰三角形内一点对两腰的视角不等,则该点至底边两端的距离亦不等,近大角的距离较小.

题设 在 $\triangle ABC$ 中(图 342),$AB=AC$.P 是形内一点,合于 $\angle APB>\angle APC$.

题断 $PB<PC$ ①

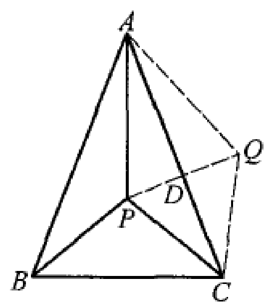


图 342

思索方法 要证①成立,就原图形来看,似乎有两条路径:一条是证 $\angle PCB<\angle PBC$,或证 $\angle PCA>\angle PBA$,在假设条件 $\angle APB>\angle APC$ 之下,自然希望 $\angle PAC<\angle PAB$,可是这点希望却和①矛盾;另一条路是证 $\angle PAB<\angle PAC$,已知 $\angle APB>\angle APC$,如果知道 $\angle PBA>\angle PCA$ 就好了,于是转而希望 $\angle PBC<\angle PCB$,然而这希望也和①矛盾.既然这两条路都不通,就得设法改造原来的图形,以适应当前的要求.本来比较两线段的长短,最好莫过于它们有一端重合,现在 PB 与 PC 已有一公共端点 P,仍然不免困难,其中原因或许是端点重合得不恰当.那么我们何妨试把一个线段(譬如 PB)迁移一下,使另外的端点重合看看呢?当然,迁移的时候,必须兼顾原来的条件,使它们更能发挥作用.现在我们把 $\triangle ABP$ 迁移到图中 $\triangle ACQ$ 的位置,因而把 BP 带到 CQ,这样做是符合我们刚才所提的原则的.在这个新的局面下,问题则变而为求证 $QC<PC$.这可以联结 PQ,看一看 $\angle CPQ$ 是否小于 $\angle CQP$.到了这一步,由于 $\angle APC<\angle APB=\angle AQC$ 且

$\angle APQ = \angle AQP$,个中道理就完全揭开了.

证明　题设 $AB = AC$,故可在 $\triangle ABC$ 的外边作 $\triangle ACQ$ 使其全等于 $\triangle ABP$.联结线段 PQ.题设 P 是 $\triangle ABC$ 内部的点,可见射线 AC 在 $\angle PAQ$ 的内部,因而必与线段 PQ 相交,命交点为 D.由于

$$\angle APC + \angle AQC = \angle APC + \angle APB > 180°$$

故 $\angle APC$ 与 $\angle AQC$ 中至少有一个为钝角;从而 $AC > AP = AQ$.又 $\angle ADP$ 与 $\angle ADQ$ 中至少有一个不是锐角,那么 $AP = AQ > AD$.于是 $AC > AD$.这说明了四边形 $APCQ$ 一定是凸的.

由作图和题设,知

$$\angle APC < \angle AQC \quad ②$$

$$\angle APQ = \angle AQP \quad ③$$

从 ② 减去 ③,得 $\angle CPQ < \angle CQP$.所以

$$QC < PC \quad ④$$

以 PB 代换 ④ 中的 QC,那便是 ①.

注　上题曾列于习题 7 第 9 题,并声明用间接证法证明它.现在所讲的是直接证法,实较间接证法为难.第一难在点 Q 不易想到,其次是确定四边形 $APCQ$ 的形式,而后者最易忽略.

证题术 8　欲证线段 $a > b$,可作一线段 $p < a$,而证 $b \leqslant p$;或者作一线段 $q > b$,而证 $a \geqslant q$.角亦仿此.

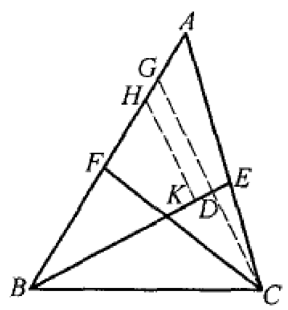


图 343

例题 26　三角形中,小角的平分线较大角的平分线长.

题设　在 $\triangle ABC$ 中(图 343),$\angle B < \angle C$,$\angle B$ 的平分线交 AC 于 E,$\angle C$ 的平分线交 AB 于 F.

题断　$BE > CF$.

思索方法一　既然 $\angle B < \angle C$,那么 $\angle ABE < \angle ACF$;因此可在后者的内部作 $\angle FCG = \angle ABE$,设其边 CG 交 BE 线段于 D,交边 AB 于 G.我们可以把期待的题断试改为 BD 不小于 CF.这两个线段各是 $\triangle GBD$ 与 $\triangle GCF$ 的一边,而这两个三角形显然相似(有两对对应角相等),并且刚好以它们为对应边,所以打算知道 BD 不小于 CF,可以转而察看其他对应边有无相仿的关系.我们发觉这两个三角形另一对对应边 GB 与 GC 恰好又是 $\triangle GBC$ 的两边,它们的不等关系取决于 $\angle GCB$ 与 $\angle GBC$ 的不等关系;然而这早已暗伏在题设与作图之中了.

若欲避免利用比例,还可以在线段 BG 上截取 $BH = CG$,再自 H 引线平行

于 GD 而交 BD 于 K,然后应用全等三角形证明 $BK = CF$.

证明一　由题设可以知道 $\angle ABE < \angle ACF$,因此在线段 AF 上有一点 G,使得 $\angle FCG = \angle ABE$.这时显然 $\angle GCB > \angle GBC$,于是 $GB > GC$.故可在线段 BG 上截取 $BH = CG$.自 H 引线平行于 GC 而交 BE 于 K,则在 $\triangle HBK$ 与 $\triangle GCF$ 中,$BH = CG$,$\angle HBK = \angle GCF$,$\angle BHK = \angle CGF$,所以这两个三角形全等.由此 $BK = CF$,但 $BE > BK$,故 $BE > CF$.

思索方法二　前法作得点 D 之后,已见 B, C, D, F 四点同在一圆上(图 344),而 BD 与 CF 正是这圆的两弦.我们盼望知道 BD 不小于 CF,可以用它们所对的圆周角 $\angle BCD$ 与 $\angle CBF$ 的大小关系来判断.但是这两角的大小关系是我们早已知道的.

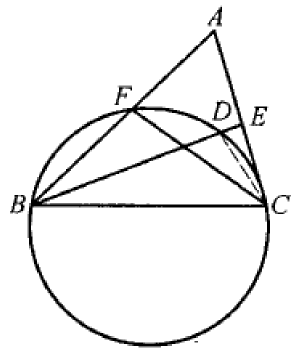


图 344

证明二　通过 B, C, F 三点作一圆设交 BE 于 D,则 $\angle FCD = \angle FBD$.由题设得知 $\angle FBD < \angle FCE$,所以点 D 必落在线段 BE 上,即

$$BE > BD \qquad ①$$

又在所作圆中,$\angle BCD > \angle CBF$,而且

$$\angle BCD = \angle BCF + \angle FCD = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) < 90°$$

故(§13 定理 87(2))

$$BD > CF$$

由 ① 和 ②,立知题断成立.

注　在同圆或等圆中,欲从圆周角的大小关系来决定其所夹弦的大小关系,必须切实注意 §13 定理 87 和 88 所列的条件.

证题术 9　若所证的不等式含有两个以上的量,而从原式不易下手,可将原式变形(例如,移项或改乘为除等),然后证明.

例题 27　任何三角形中,大边与它的高之和不小于小边与它的高之和.

题设　在 $\triangle ABC$ 中(图 345),$AB > AC$,$BE \perp AC$ 于 E,$CF \perp AB$ 于 F.

题断　$$AB + CF \geqslant AC + BE \qquad ①$$

思索方法一　式(1)的两端各有两项,其中已知 $AB > AC$,固然还可以因此知道 $CF < BE$(§17 定理 117),但是将这两个不等式左右各相加,并不敢断定 ① 成立.这说明从原式推测证法,便遇到技术上的障碍,于是不得不别寻途径.如果我们把 ① 变形为

$$AB - AC \geqslant BE - CF \qquad ②$$

PDG

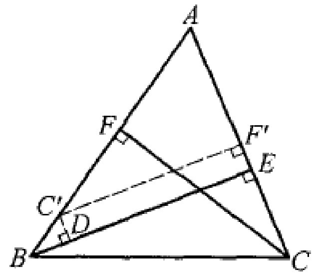


图 345

并且进一步在边 AB 上取 $AC' = AC$，在线段 BE 上取 $DE = CF$，使 ② 换成更简单的形式

$$BC \geqslant BD$$

那么就把问题转移到 $\triangle BC'D$ 的两边上去了. 欲从这个三角形来解决问题，需要追求 $\angle BDC'$ 与 $\angle BC'D$ 的大小关系. 由于 $AC' = AC$，不难知道 C' 到 AC 的距离 $C'F$ 等于 $CF = DE$；因此 $C'DEF'$ 一般是矩形. 从这件事实，会发现 $\angle BDC'$ 是直角，于是 $\angle BDC' > \angle BC'D$.

证明一 在边 AB 上截取线段 $AC' = AC$，并作 $C'F' \perp AC$ 于 F'，那么 $\text{Rt}\triangle AC'F \cong \text{Rt}\triangle ACF$；从而 $C'F' = CF$. 若再作 $C'D \perp BE$ 于 D，则 $DE = C'F' = CF$.

当 $\angle BAC = 90°$ 时，E 重合于 A，因而 D 重合于 C'；若 $\angle BAC \neq 90°$，则 C' 异于 D. 由此可见 $BC' \geqslant BD$，即 $AB - AC' \geqslant BE - DE$，或 $AB - AC \geqslant BE - CF$. 将这最后的不等式移项，就是要证的不等式 ①.

思索方法二 不论 $\triangle ABC$ 是什么样的三角形，永远 $AB \cdot CF = AC \cdot BE$；这可以写成比例式 $AB : BE = AC : CF$. 根据题设和比例性质可以知道 AB 不小于这比例式中的其余三个线段. 现在这问题就是要在 $AB > AC$ 因而 $BE > CF$ 的条件下，求证该比例式的两外项之和不小于两内项之和. 这是一个代数问题，可用比例式的性质去解.

证明二 不论 $\triangle ABC$ 的形式如何，总是 $AB \cdot CF = AC \cdot BE$，或

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF} \qquad ③$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AB - AC}{BE - CF} \qquad ④$$

题设 $AB > AC$，故由 ③ 知 $BE > CF$；那么式 ④ 右端的分子分母都是正值. 这样一来，由于 $AB \geqslant BE$，可见 $AB - AC \geqslant BE - CF$. 所以 ① 成立.

习题 12

1. 试用 §39 的例题 26 证明 §31 的例题 4.

2. 梯形 $ABCD$ 中，AB 为大底. 若 $AD > BC$，求证：$\angle A < \angle B$.

3. 在凸四边形 $ABCD$ 中，边 AB 最长，边 CD 最短，求证：$\angle A < \angle C$ 且 $\angle B < \angle D$.

4. 在$\triangle ABC$中，设E,F各是AB,AC两边上的点，且$BE=CF$，求证：$EF<BC$.

5. 设M是等腰三角形$\triangle ABC$底边BC的中点，P是$\triangle ABM$内部的任意点，求证：$\angle APB>\angle APC$.

6. $\triangle ABC$中，M是边BC的中点．若$\angle A\leqq 90°$，求证：$\angle MAB\geqq\angle B$且$\angle MAC\geqq\angle C$.

7. $\triangle ABC$中，$\angle A>\angle B>\angle C$．若$\angle B\leqq 60°$，求证：$\angle A-\angle B\geqq\angle B-\angle C$.

8. 求证：直角三角形的弦与它的高之和大于勾与股的和.

9. 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，设$\angle A=\angle A'\geqslant 90°$，$BC=B'C'$，$AB>A'B'$，求证：$AC<A'C'$.

10. 求证：三角形中较长的边的中线较短，逆命题亦真.

11. 求证：三角形三中线的和介于周长与周长的$\frac{3}{4}$之间.

12. 求证：三角形中较大的边距重心较近，逆命题亦真.

13. 求证：三角形中较大的边的高较短，逆命题亦真.（限定不用比例定理证明.）

14. 求证：三角形中较大的角的顶点距垂心较近，逆命题亦真.

15. 求证：三角形任一角的平分线小于两夹边的和的一半.

16. O是$\triangle ABC$的外心，I是内心．若$AB>BC>CA$，求证：$\angle OAI$大于$\angle OBI$及$\angle OCI$.

17. I是$\triangle ABC$的内心，直线AI,BI,CI分别交BC,CA,AB于D,E,F．若$\angle C>\angle A>\angle B$，求证：线段$ID$大于$IE$及$IF$.

18. 求证：三角形内任意点至三边（所在直线）的距离和，介于最长与最短高线之间.

19. 设$\triangle ABC$是正三角形，P是任意点，求证：$PA\leqslant PB+PC$.

20. 设$\triangle ABC$的$\angle A\geqslant 120°$，P是任意点，求证：$PA+PB+PC\geqslant AB+AC$.

21. 设三角形的各角均小于120°，若一点对于三边的视角均相等，求证：这点至三顶点的距离和小于其他点至三顶点的距离和，且前者的平方不大于三边的平方和.

22. 求证：钝角或直角三角形中，任一内接三角形的半周大于最大边的高.（若一个三角形的三顶点分别落在另一个三角形的三边上，则前者叫做后者的**内接三角形**.）

23. 求证：锐角三角形中，所有内接三角形以垂三角形的周长最短.

24. 求证：锐角三角形的内接正方形中，立于较大边上的面积较小.（一个正方形的顶点若都落在一个三角形的周界上，则叫做这个三角形的内接正方形. 看这正方形的一边落在三角形的哪一边上，我们便说正方形立于三角形的哪边上.）

第四节　垂直与平行

§ 40　关于垂直的证题术

证题术 10　证两条直线互相垂直或一角是直角，可斟酌题设情形设法应用适当的定理（例如，§ 6 定理 27，§ 8 定理 40，§ 13 定理 83 推论 3 等）.

例题 28　同时有外接圆和内切圆的四边形中，对边上的切点连线必互相垂直.

题设　四边形 $ABCD$ 同时有外接圆和内切圆（图 346），E,F,G,H 各是 AB，BC,CD,DA 四边与内切圆的切点.

题断　$EG \perp FH$.

思索方法　凡有外接圆的四边形非折即凸，而有内切圆的四边形不外凹凸两种，由此可见，$ABCD$ 必是凸四边形. 今设 EG 与 FH 两线段交于 P（这在凸四边形中永远是可能的），而试证 $\angle EPF = 90°$. 所设的两个圆，提醒我们应当用圆周角推算 $\angle EPF$ 的大小，因而想到联结 EF. 借 $\triangle PEF$，转而想到 $\angle PFE$ 与 $\angle PEF$ 是否互余. 利用内切圆知道这两角分别等于弦切角 $\angle AHE$ 及 $\angle OGF$，而后两者各是等腰三角形 $\triangle AHE$ 及 $\triangle CGF$ 的底角. 因为等腰三角形的底角是与顶角的一半互余的，那么希望那两个等腰三角形的顶角互补才好. 这就让我们联想到外接圆上去. 从外接圆来看，显然 $\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，我们的希望实现了.

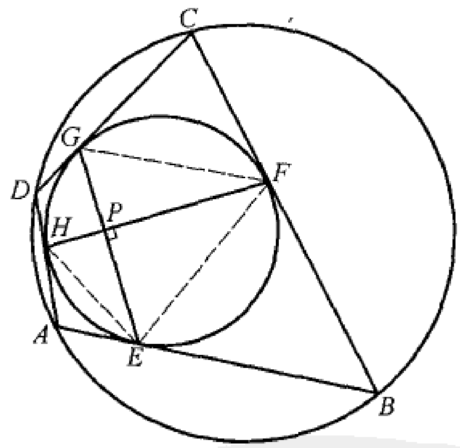


图 346

证明　题设四边形 $ABCD$ 同时有外接圆和内切圆，那么这四边形必然是凸的. 因此 EG 与 FH 一定相交，命交点为 P. 联结 EF,EH,FG，则见（§ 13 定理

90)

$$\angle PFE = \angle AHE, \angle PEF = \angle CGF$$

今因 $AH = AE, CG = CF$,知

$$\angle AHE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A, \angle CGF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C.$$

又
$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

故得

$$\angle PFE + \angle PEF = \angle AHE + \angle CGF = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) =$$
$$180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

由此可见 $\angle EPF = 90^\circ$,即 $EG \perp FH$.

例题 29 ▱$ABCD$ 非矩形和菱形(图 347).引 $CE \perp AB$ 于 B, $CF \perp AD$ 于 F,联结 EF 设交 BD 于 P,则 $\angle ACP = 90^\circ$.

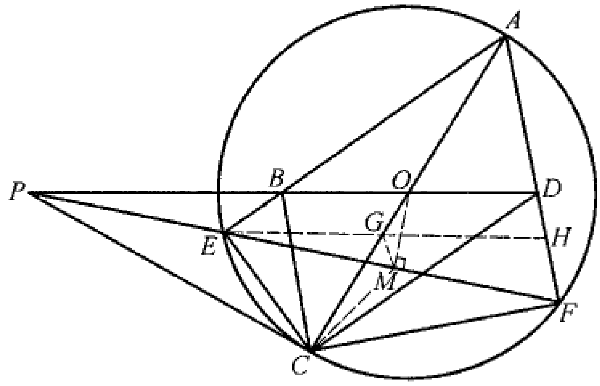


图 347

题设 $ABCD$ 是平行四边形但非矩形和菱形, E, F 是 C 在 AB, AD 上的射影, P 是 EF 与 BD 的交点.

题断 $\angle ACP = 90^\circ$.

思索方法 由题设知道 AC 与 BD 互相平分于点 O,也很容易知道 E, F 两点同在直径为 AC 的圆上. EF 既是 $\odot O$ 的弦,假设它的中点是 M,那么 $\angle OMP = 90^\circ$.因此欲证 $\angle ACP = 90^\circ$,但证 O, P, C, M 四点同在一圆上即可.这是我们面临着的一个技术问题,也是解决问题的重要关头,我们不能不殚精竭虑以求之.回想一下, O 是 BD 的中点这个性质尚未发生作用,为着使它和点 M 的关系密切起来,我们要把 BD 的位置移动令通过点 E(但仍保持原来的方向),设命这时所得直线交 AC, AD 于 G, H.这样一来,便晓得 G 是 EH 的中点;从

而连线 GM 平行于 HF.在这件事里,我们发觉 $\angle EMG = \angle EFH = \angle ECG$(就图 347 来看),于是得知 E,C,M,G 四点同在一圆上.这结果同我们面临的问题有无线索可通呢?由于 $OP \mathbin{/\!/} GE$,有 $\angle OPM = \angle GEM$;联结 CM,又有 $\angle OCM = \angle GEM$.这两条线索联系了 $\angle OPM$ 与 $\angle OCM$ 的关系,因而解决问题的关键得以打开.

证明　$ABCD$ 既是平行四边形,它的对角线 AC 与 BD 必互相平分于点 O(§9 定理 42(3)).因 $\angle AEC = \angle AFC = 90°$,故 E,F 两点同在直径为 AC 的圆上.引 $OM \perp EF$,则垂足 M 是 EF 的中点.过 E 引一直线平行于 BD 而交 AC,AD 于 G,H,那么(§17 定理 118)

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = -1$$

因而 G 是 EH 的中点.联结 GM,于是 $GM \mathbin{/\!/} HF$,由此(就图 347 来看)

$$\angle EMG = \angle EFH = \angle ECG$$

按此式得知 E,C,M,G 四点同在一圆上,从而

$$\angle OCM = \angle GEM = \angle OPM$$

由此式可见 O,P,C,M 四点同在一圆上;所以

$$\angle ACP = \angle OMP = 90°$$

证题术 11　证两直线互相垂直,可在其中一线上取 P,Q 两点,在另一线上取 M,N 两点,而证 $PM^2 - PN^2 = QM^2 - QN^2$(参看复习题 2 第 12 题).

例题 30　设四边形无外接圆,而两对对边的中垂线相交,则这两交点的连线垂直于两对角线中点的连线.

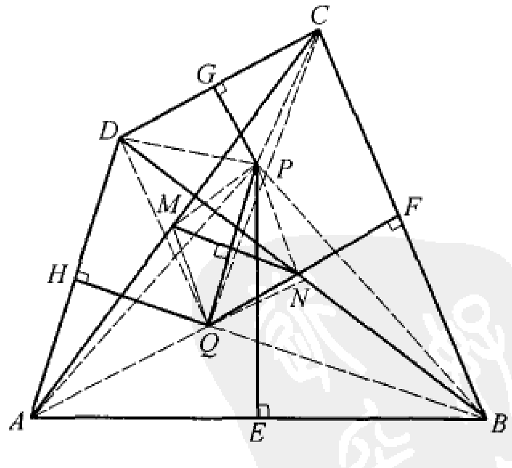


图 348

题设　四边形 $ABCD$ 无外接圆(图 348),P 是对边 AB 与 CD 的中垂线交点,Q 是对边 AD 与 BC 的中垂线交点,M,N 各是对角线 AC,BD 的中点.

题断　$PQ \perp MN$.

证明　把 P 及 Q 分别与 A,B,C,D,M,N 联结起来,则由 $\triangle PAC,\triangle PBD,\triangle QAC,\triangle QBD$,得下列关系式(§20 定理 132)

$$PM^2 = \frac{1}{2}(PA^2 + PC^2) - \frac{1}{4}AC^2 \qquad ①$$

$$PN^2 = \frac{1}{2}(PB^2 + PD^2) - \frac{1}{4}BD^2 \quad ②$$

$$QM^2 = \frac{1}{2}(QA^2 + QC^2) - \frac{1}{4}AC^2 \quad ③$$

$$QN^2 = \frac{1}{2}(QB^2 + QD^2) - \frac{1}{4}BD^2 \quad ④$$

因 $PA = PB$ 且 $PC = PD$, $QA = QD$ 且 $QC = QB$,故将 ① 减 ②,③ 减 ④,得

$$PM^2 - PN^2 = \frac{1}{4}(BD^2 - AC^2) \quad ⑤$$

$$QM^2 - QN^2 = \frac{1}{4}(BD^2 - AC^2) \quad ⑥$$

由 ⑤ 和 ⑥,知

$$PM^2 - PN^2 = QM^2 - QN^2$$

所以

$$PQ \perp MN$$

§ 41　关于平行的证题术

证题术 12　证两条直线互相平行,可按具体情况设法应用适当的定理(例如,§7 定理 29, §9 定理 54, §16 定理 111 等).

例题 31　自三角形的一个顶点向其他两角的平分线作垂线,则两垂足的连线平行于该顶点的对边.

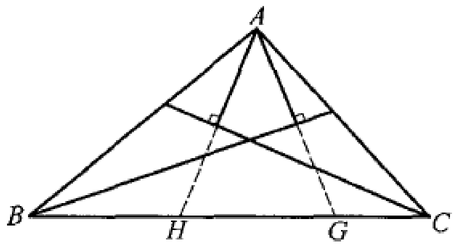


图 349

题设　在 $\triangle ABC$ 中(图 349), BE, CF 分别是 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的平分线,而 $AE \perp BE$, $AF \perp CF$.

题断　$EF \parallel BC$.

思索方法　问题涉及了角的平分线和这种线的垂线,这就会使我们联想到 §27 末例的逆命题(1)来,因而悟及 AE, AF 需要延长. 当延长 AE, AF 交 BC 于 G, H 后,那么问题便变得非常简单了(应用 §9 定理 54).

证明　延长 AE, AF 交 BC 于 G, H. 由题设条件,得知 $\triangle BAG$ 及 $\triangle CAH$ 都是等腰三角形,因而 E, F 各是 AG, AH 的中点. 可见 $EF \parallel GH$,即 $EF \parallel BC$.

例题 32　自圆外一点 A 引切线,切点为 B(图 350),过 AB 的中点 M 作割线交圆于 C, D,联结 AC, AD 又交圆于 E, F,则 $AB \parallel EF$.

题设　切线 AB 切圆于 B, M 是 AB 的中点,割线 MCD 交圆于 C, D, AC, AD

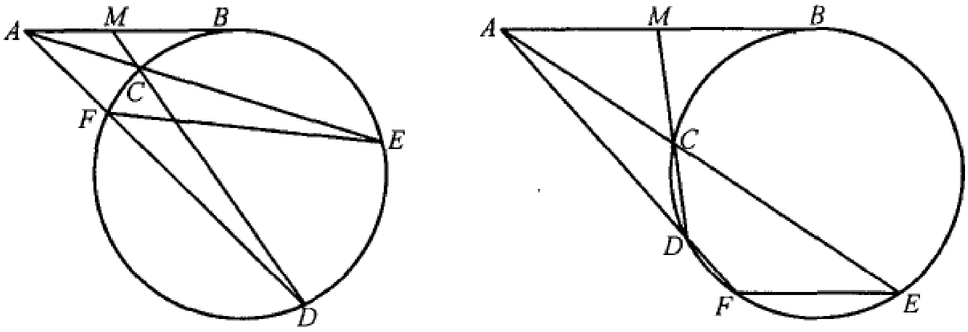


图 350

又交圆于 E,F.

题断　$AB /\!/ EF$.

思索方法　要证 $AB /\!/ EF$，但证 $\angle CAB = \angle CEF$ 即可．然而 $\angle CEF = \angle CDA$，故可改证 $\angle CAB = \angle CDA$．因而问题变成要证 AB 切于 $\triangle ACD$ 的外接圆．这将取决于 $\overline{MA}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ 是否成立．因为 $MA = MB$，所以又转而看 $\overline{MB}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ 真确与否．这是能从题设立刻断定的．

证明　由题设推得（§ 19 定理 127）

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$$

故 AB 必是 $\triangle ACD$ 外接圆的切线（§ 19 定理 130）．由此

$$\angle CAB = \angle CDA = \angle CEF$$

那么 $AB /\!/ EF$.

例题 33　A,B,C 是直线 l 上的三点；A',B',C' 是直线 l' 上的三点（图 351）．若 $AB' /\!/ A'B$ 且 $AC' /\!/ A'C$，则 $BC' /\!/ B'C$.

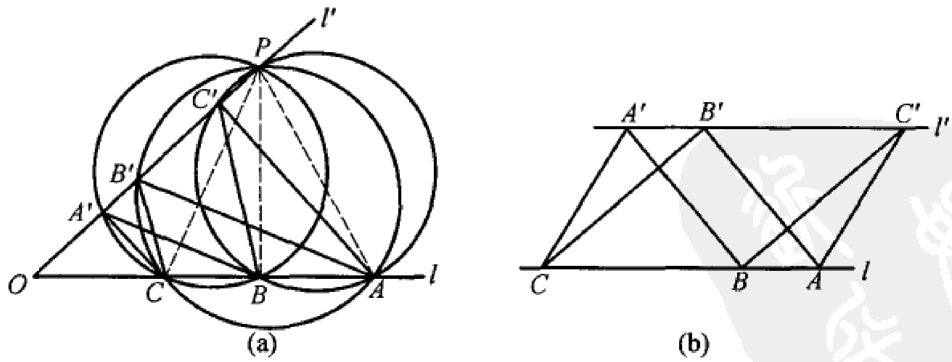


图 351

题设　A,B,C 三点及 A',B',C' 三点分别在直线 l 及 l' 上；$AB' /\!/ A'B$ 且 $AC' /\!/ A'C$.

题断　$BC' /\!/ B'C$.

思索方法一 已知 $AB' \parallel A'B$ 及 $AC' \parallel A'C$，两对直线分别和 l 都作成一些相等的角；现在应该设法从这些相等的角推证 BC'，$B'C$ 也和 l 作成相等的角. 但是在已知的及未知的等角之间，找不到直接关系，因此必须用别的角来做媒介. 圆与角的关系甚多，我们不妨试添辅助圆. 当然要利用已知点（三点）决定辅助圆，并且要它和已知直线有密切的联系. 譬如 A'，B，C 三点，它们彼此的连线都是题中原有的，我们可以通过这三点作一圆试试看. 假定这圆与 l' 的第二交点是 P（可能与 A' 重合，或是 B'，C' 两点之一），再把 P 和 A，B，C 三点联结起来. 这时我们见到（就图 351(a) 来看）

$$\angle B'PC = \angle A'BC = \angle B'AC \qquad ①$$

$$\angle C'PB = 180^\circ - \angle A'CB = \angle C'AB \qquad ②$$

① 和 ② 确定了 $\odot B'CA$ 和 $\odot C'AB$ 都通过点 P. 目下我们的希望是 $\angle C'BC$ 与 $\angle B'CB$ 互补，然而这个关系是可以借 $\angle C'PA$ 的居间作用（利用刚才的两个圆）找到的.

证明一 通过 A'，B，C 三点作一圆设交 l' 于 P，联结 PA，PB，PC. 由题设和作图，有（就图 351(a) 来看）

$$\angle B'PC = \angle A'BC = \angle B'AC$$

$$\angle C'PB = 180^\circ - \angle A'CB = \angle C'AB$$

可见 $\odot B'CA$ 和 $\odot C'AB$ 同通过点 P. 因此

$$\angle C'BC + \angle B'CB = \angle C'PA + \angle B'CB = 180^\circ$$

所以 $BC' \parallel B'C$.

注 此证虽迂回曲折，但其妙在不用比例.

思索方法二 若 $l \parallel l'$（图 351(b)），则本题极易证明，毋庸多加思索. 今假定 l 与 l' 相交于点 O（图 351(a)）. 所设的两双平行线，一定在 l，l' 上截出一些成比例的线段. 我们利用比例式的变形，或可觉得证明的路线.

证明二 首先假定 $l \parallel l'$（图 351(b)）. 由题设 $AB' \parallel A'B$ 且 $AC' \parallel A'C$，知

$$\overline{AB} = \overline{B'A'} \qquad ③$$

$$\overline{CA} = \overline{A'C'} \qquad ④$$

将 ③ 与 ④ 相加，得 $\overline{CB} = \overline{B'C'}$；因此 $BCB'C'$ 是平行四边形. 故 $BC' \parallel B'C$.

其次假定 l 与 l' 相交于点 O（图 351(a)）. 这时因 $AB' \parallel A'B$ 且 $AC' \parallel A'C$，应有（§16 定理 110）

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \qquad ⑤$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}} \qquad ⑥$$

将⑤和⑥相乘,得$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}}$,因知 $BC' \parallel B'C$(§16定理111(2)).

习题13

1. 求证:三角形的外心与三顶点的连线分别垂直于垂三角形的三边.

2. 设 H 是等腰三角形 $\triangle ABC$ 的垂心,D 是底边 BC 的中点,K 是 AH 的中点,E 是 BH 与 AC 的交点.引 $EF \perp BC$ 于 F,延长 AD 至 G,使 $DG = EF$,求证:$\angle GBK = 90°$.

3. 设 D 是等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点.过 C,D 两点但不过点 A 任作一圆交直线 AC 于 E,联结 BE 交此圆于 F,求证:$AF \perp BE$.

4. 设 D 是等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点,P 是直线 BC 上的任一点.引 $PE \perp AB$ 于 E,$PF \perp AC$ 于 F,求证:DE 与 DF 相等且垂直.

5. 设 $ABCD$ 是正方形,P 是直线 BD 上的任一点.引 $PE \perp BC$ 于 E,$PF \perp CD$ 于 F,求证:AP 与 EF 相等且垂直.

6. 在 $\triangle ABC$ 的外边作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$,求证:BH 与 CF 相等且垂直.

7. 在上题中,作出 ▱$FAHD$,求证:AD 与 BC 相等且垂直.

8. 仍承前题,设 M,N 分别是 BC,FH 的中点,P,Q 分别是所作两个正方形的中心,求证:$MPNQ$ 是一个正方形.

9. 以一简单四边形的每边为一边向外侧各作正方形,求证:相对二形的中心联结线与分别二形的中心联结线相等且垂直.

10. 以一三角形的每边为一边向外边分别作正方形,求证:三角形的顶点至立于对边上那个正方形的中心的联结线,与另外二正方形中心的联结线相等且垂直.

11. 设 BE,CF 同是 $\triangle ABC$ 的高.在射线 BE 上截 $BP = AC$,在射线 CF 上截 $CQ = AB$,求证:AP 与 AQ 相等且垂直.

12. 设 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外切于 P,一条外公切线分别切 $\odot O$,$\odot O'$ 于 M,N.今过 P 任作一直线分别交 $\odot O$,$\odot O'$ 于 A,B,求证:$AM \perp BN$.

13. 作一圆内接四边形每对对边所在直线的交角的平分线,求证:所作四线交成一个矩形.

14. 求证:圆上四点两两连成四个三角形,它们的内心是一个矩形的顶点.

15. 在四边形 $ABCD$ 中,设 $AD \neq BC$.今内外分边 AB 于 E,F,又内外分边

OD 于 G,H,使$\frac{EA}{EB}=\frac{FA}{FB}=\frac{GD}{GC}=\frac{HD}{HC}=\frac{AD}{BC}$,求证:$EG\perp FH$.

16. 自三角形的一个高线足引线垂直于另两条高线,求证:两垂足的连线平行于另两个高线足的连线.

17. 设切线 AB,AC 切圆于 B,C,割线 AEF 交圆于 E,F,弦 BD 平分弦 EF,求证:$CD\parallel EF$.

18. P 是 $\odot ABC$ 上一点,PA',PB',PC' 是分别平行于 BC,CA,AB 的三弦,求证:$AA'\parallel BB'\parallel CC'$.

19. 在 $\triangle ABC$ 中,边 BC 的中垂线交直线 AB 于 D,自 A,C 所作 $\odot ABC$ 的切线交于 E,求证:$DE\parallel BC$.

20. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的平分线交边 BC 于 D,自 A 所引 $\odot ABC$ 的切线与自 D 所引 AB 的平行线交于 E,求证:$ADCE$ 是一个等腰梯形.

21. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的平分线交边 BC 于 D.今过 A 作一圆切 BC 于 D 而交 AB,AC 于 E,F,求证:$EF\parallel BC$.

22. 以 $\triangle ABC$ 的边 AB,AC 为底向外侧各作等腰三角形 $\triangle EAB,\triangle FAC$,又以边 BC 为底向内侧作等腰三角形 $\triangle DBC$.若所作等腰三角形均彼此相似,求证:A,E,D,F 是一个平行四边形的顶点或同在一直线上.

23. 四边形 $ABCD$ 内接于一圆,作这圆的弦 AE 及 BF,若 $AE\parallel BD$ 且 $BF\parallel AC$,求证:$EF\parallel CD$.

24. $ABCD$ 是圆内接四边形.过 A,B 两点任作一圆设交直线 AD,BC,AC,BD 于 E,F,G,H,求证:$CD\parallel EF\parallel GH$.

25. 承上题,设 BE 与 AC,AF 与 BD,BG 与 AD,AH 与 BC 交于 E',F',G',H',求证:$CD\parallel E'F'\parallel G'H'$.

26. 过 $\square ABCD$ 的对顶点 A,C 任作一圆设交直线 AB,BC,CD,DA 于 E,F,G,H,求证:$EF\parallel GH$.

27. $ABCD$ 是平行四边形.过直线 AC 上任一点 P 随意作两条直线,设一条交直线 AB,CD 于 E,G,另一条交直线 BC,DA 于 F,H,求证:$EH\parallel FG$.

28. $ABCD$ 是平行四边形.设 $EF\parallel AB$,AE 与 BF,DE 与 CF 交于 G,H,求证:$GH\parallel AD$.

第五节 共线点

§42 关于共线点的证题术

同在一条直线上的许多点叫做共线点,或者说这些点共线.

证题术 13 证 X,Y,Z 三点共线,可以适当地选一条通过点 X 的直线 PXQ,并联结 XY,XZ①.

(1) 当 Y,Z 两点分别在 PQ 的两侧时(图 352(a)),则证 $\angle QXY=\angle PXZ$ 或 $\angle PXY+\angle PXZ=180°$;

(2) 当 Y,Z 两点同在 PQ 的一侧时(图 352(b)),则证 $\angle PXY=\angle PXZ$.

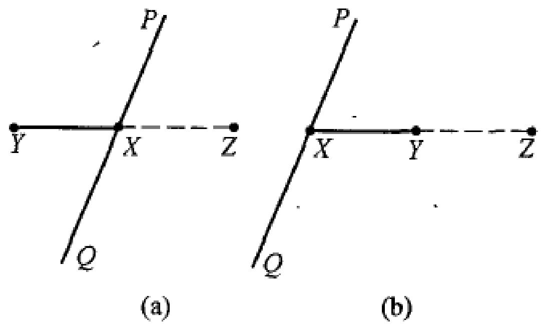


图 352

例题 34 三角形外接圆上任一点在三边所在直线上的射影共线.

这条直线叫做该点对于该三角形的西姆森线. 19 世纪时,通常认为这是西姆森(Simson,1687—1768 年)发现的直线,因此有这样的命名. 后经玛开(Mackay)考据,才知道原来是华莱士(Wallace,1768—1843)于 1797 年首先发现的,所以归美于西姆森,实出于误传. 但因通称既久,故今仍用这个习惯的名称.

题设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上的任一点(图 353),X,Y,Z 是点 P 在直线 BC,CA,AB 上的射影.

题断 X,Y,Z 三点共线.

思索方法 假定 P 与 A 分在 BC 的两侧. 现在我们审辨 Y,Z 两点对于直线 PX 所处的相互位置. 按题设,知道 P,X,Y,C 四点及 P,X,Z,B 四点各同在一圆上,因此

$$\angle XPY=\angle ACB,\angle XPZ=\angle ABC$$

又因 P,Y,Z,A 四点同在一圆上,知

$$\angle YPZ=180°-\angle BAC=\angle ACB+\angle ABC$$

① 连线时注意不使 XY,XZ 显然合一,以免在论证中途误认其为一线. 这在印刷品中不易办到,读者练习时不妨画成不同的颜色,或一实一虚,或方向微差,如此可防混淆.

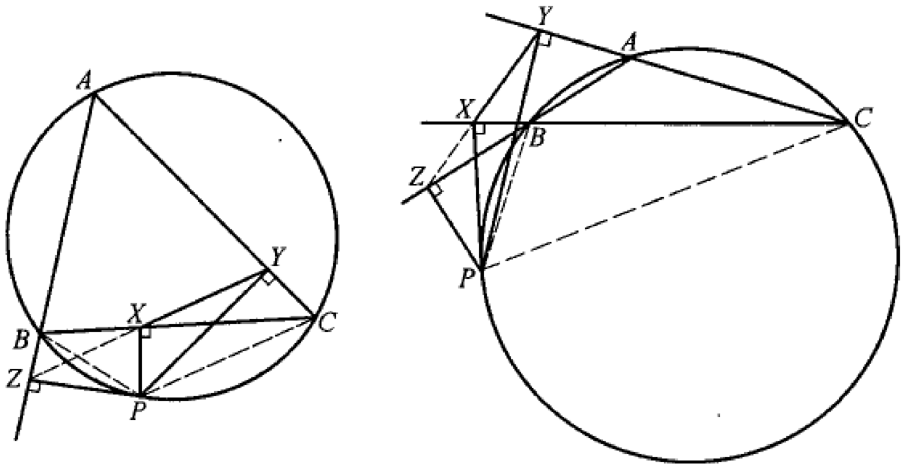


图 353

所以$\angle XPY+\angle XPZ=\angle YPZ$.这说明射线 PX 落在$\angle YPZ$之内,因而 Y,Z 两点必然分居于 PX 直线的两侧.

目前要证 X,Y,Z 三点共线,可联结 XY 与 XZ,而设法证明 $\angle PXY$ 与
 $\angle PXZ$ 互补.这需要从题设条件寻觅居间的角使它们联系起来.联结 PC 与 PB,则见$\angle PCA$ 是$\angle PXY$ 的补角,$\angle PBA$ 是$\angle PXZ$ 的补角;这样一来,问题转而为要证$\angle PCA$ 与$\angle PBA$ 互补了.然而这是显然的.

证明 为着叙述确定起见,不妨假定 P 与 A 分在 BC 的两侧,因为如此假定并不使证明失去一般性.在这个假定下,从上面的讨论,我们已经知道 Y,Z 两点分居于 PX 直线的两侧.

联结 XY,XZ,PC,PB,则因 P,X,Y,C 四点及 P,X,Z,B 四点各同在一圆上,得知

$$\angle PXY=180^\circ-\angle PCA,\angle PXZ=180^\circ-\angle PBA$$

但$\angle PCA+\angle PBA=180^\circ$,可见

$$\angle PXY+\angle PXZ=360^\circ-180^\circ=180^\circ$$

这式子说明 X,Y,Z 三点是共线的.

证题术 14 证诸点共线,可以借助于某些特殊点线的唯一性.

例题 35 三角形的外心、重心、垂心三者共线.

这直线叫做三角形的欧拉线.欧拉(Euler,1707—1783)是瑞士的数学家,俄国的彼得堡科学院院士,著作极多..

题设 O,G,H 各是$\triangle ABC$ 的外心,重心,垂心(图 354).

题断 O,G,H 三点共线.

思索方法　三角形的重心在中线上的位置是很特殊的，它位于每条中线的$\frac{2}{3}$处(自顶点量起). 试问中线上位置如此的点是否唯一? 如此一想，马上就晓得问题该怎样证了.

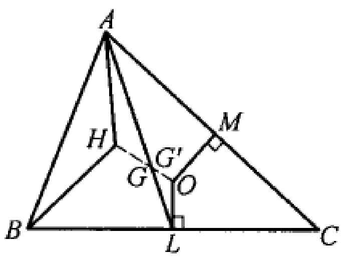


图 354

证明　设 L 是边 BC 的中点. 联结 HO 假定交中线 AL 于 G'. 因 $AH \parallel LO$，故 $\triangle G'AH \backsim \triangle G'LO$(§17 定理 114(5)). 由此

$$\frac{\overline{G'A}}{\overline{G'L}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{LO}} \qquad ①$$

但$\overline{AH} = 2\overline{OL}$(§37 例题 19)，亦即

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{LO}} = -2 \qquad ②$$

以②代入①，得$\frac{\overline{G'A}}{\overline{G'L}} = -2$，这表示 G' 是$\triangle ABC$ 的重心(§10 定理 62). 可见 G' 必与 G 重合. 故 O, G, H 三点共线.

例题 36　三角形一角的顶点在其他两角内外平分线上的射影是共线的四点.

题设　在$\triangle ABC$ 中(图 355)，BE, CF 分别是$\angle ABC, \angle ACB$ 的平分线，BG, CH 分别是外角$\angle ABX, \angle ACY$ 的平分线，且 $AE \perp BE, AF \perp CF, AG \perp BG, AH \perp CH$.

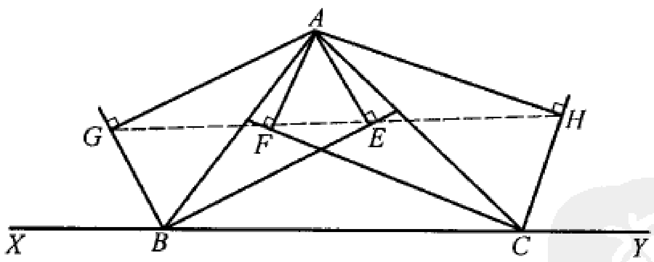


图 355

题断　E, F, G, H 四点共线.

思索方法　联结 EF，我们已经证过 $EF \parallel BC$. 按题设，知道 $AEBG$ 及 $AFCH$ 都是矩形，如果我们能够证明它们的对角线 EG 及 FH 都平行于 BC，那么问题就解决了. 根据已知的条件，这是轻而易举的.

证明　联结 EF, EG, FH. 按题设，已经晓得 $EF \parallel BC$(§41 例题 31). 显然，$AEBG$ 及 $AFCH$ 都是矩形(§6 定理 17)；由此

$$\angle BEG = \angle EBA = \angle EBC, \angle CFH = \angle FCA = \angle FCB$$

可见 EG 与 FH 都平行于 BC.那么 E,F,G,H 四点共线(§7 定理 31).

例题 37 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心(图 356),P 是任一点.过 H 引 PA,PB,PC 的垂线依次与 BC,CA,AB 相交,则三交点共线.

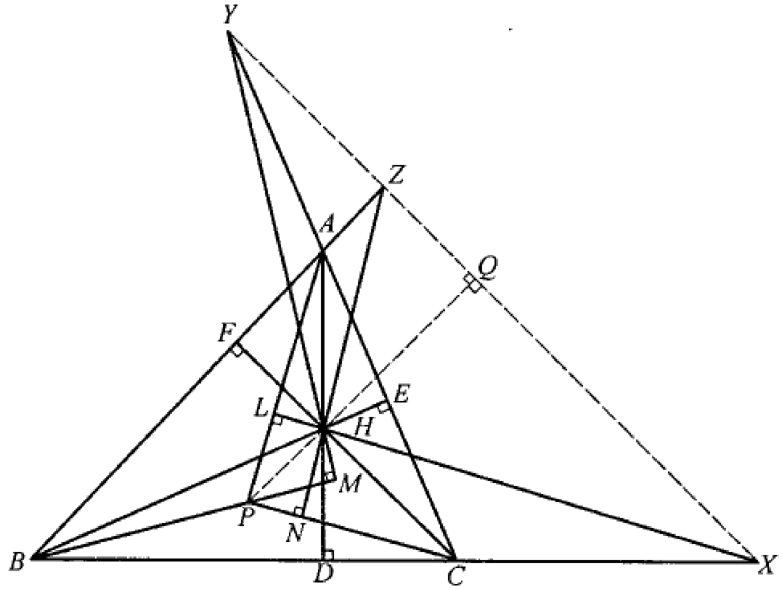


图 356

题设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,P 是任一点,HL 垂直 PA 于 L 而交 BC 于 X,HM 垂直 PB 于 M 而交 CA 于 Y,HN 垂直 PC 于 N 而交 AB 于 Z.

题断 X,Y,Z 三点共线.

思索方法 H 既是 $\triangle ABC$ 的垂心,若命三高线的足依次为 D,E,F,则应有

$$\overline{HA}\cdot\overline{HD} = \overline{HB}\cdot\overline{HE} = \overline{HC}\cdot\overline{HF} = p$$

的关系.这是垂心的一个特征,可能是解决问题的关键所在.本题有许多垂线,是不是可以把这个关系扩充到其他垂线上去呢?譬如看 LX 吧,由于 A,D,L,X 四点同在一圆上,那么就有

$$\overline{HL}\cdot\overline{HX} = \overline{HA}\cdot\overline{HD} = p$$

了.又从 MY,NZ 来看,同理也有

$$\overline{HM}\cdot\overline{HY} = \overline{HN}\cdot\overline{HZ} = p$$

此外还应不要忘掉点 P 是本题里的一个重要角色.为着引导它也参与以上的关系,很自然地提起我们悟到在连线 PH 上取一点 Q,使合于

$$\overline{HP}\cdot\overline{HQ} = p$$

这样，Q 便是一个确定的点.现在把$\overline{HL}\cdot\overline{HX}=p$ 和$\overline{HP}\cdot\overline{HQ}=p$ 合起来看，得知 L,X,P,Q 四点同在一圆上，从而发现了 $XQ\perp PQ$ 这个关系.再仿此想到 $YQ\perp PQ$ 和 $ZQ\perp PQ$，那么打开关键的钥匙就被我们找着了.

证明 命$\triangle ABC$ 的BC,CA,AB 上的高线足为D,E,F，则(§19 定理 128)

$$\overline{HA}\cdot\overline{HD}=\overline{HB}\cdot\overline{HE}=\overline{HC}\cdot\overline{HF}=p$$

按题设知 A,D,L,X 四点同在一圆上，因而

$$\overline{HL}\cdot\overline{HX}=\overline{HA}\cdot\overline{HD}=p$$

同理

$$\overline{HM}\cdot\overline{HY}=\overline{HN}\cdot\overline{HZ}=p$$

连 PH 直线，在它上面取一点 Q，使合于

$$\overline{HP}\cdot\overline{HQ}=p$$

那么 L,X,P,Q 四点同在一圆上(§19 定理 129).由此

$$\angle PQX=\angle PLX=90°$$

亦即 $XQ\perp PQ$.仿此可证 YQ,ZQ 同垂直于PQ.

所以 X,Y,Z 三点共线(§6 定理 18).

§43 梅涅劳斯定理

梅涅劳斯(Menelaus)是约公元 1 世纪时的希腊数学家兼天文学家，著有几何学及三角学书籍.下面所述的定理是他首先发现的，对共线点问题很有用处.但这定理后来被人们遗忘了，直到 1678 年才由意大利数学家兼水力工程师塞瓦(Ceva)重新发现，当时塞瓦把它和自己发现的定理(见 §46)一并刊行流传于世.

定理 147 (梅涅劳斯定理)设 X,Y,Z 分别是$\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点(图 357)，则它们共线的必要且充分的条件为

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1 \qquad ①$$

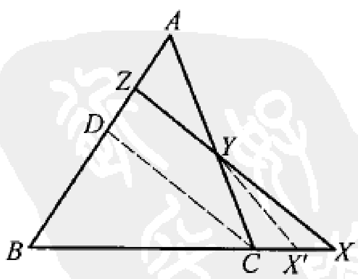


图 357

证明 首先，假定 X,Y,Z 三点共线，过点 C 作直线 XYZ 的平行线设交AB 于D，则

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}},\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\frac{\overline{ZD}}{\overline{ZA}}$$

故

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = 1$$

其次,假定 ① 成立.因$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \neq 1$(§15 定理 106),从而$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \neq \frac{\overline{YA}}{\overline{YC}}$,故连线 ZY 必与 BC 相交,命交点为 X'.根据上面的证明,应有

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'C}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = 1 \qquad ②$$

以 ② 和 ① 比较,得

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'C}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}$$

可见 X' 与 X 必须重合(§15 定理 105).这就证明了 X,Y,Z 三点是共线的.

证题术 15 证三点共线,若用以前各法不易奏效的,可用梅涅劳斯定理来证明.

例题 38 设两三角形的对应顶点连线交于一点,则对应边(所在直线)的交点共线.

这定理是"射影几何学"的重要定理之一,为法人德扎格(Desargues,1591—1661)所发现,故称德扎格定理.一说欧几里得早已知道这定理.

题设 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中(图 358),AA',BB',CC' 三线交于一点 O,BC 与 $B'C'$,CA 与 $C'A'$,AB 与 $A'B'$ 各交于 X,Y,Z.

题断 X,Y,Z 三点共线.

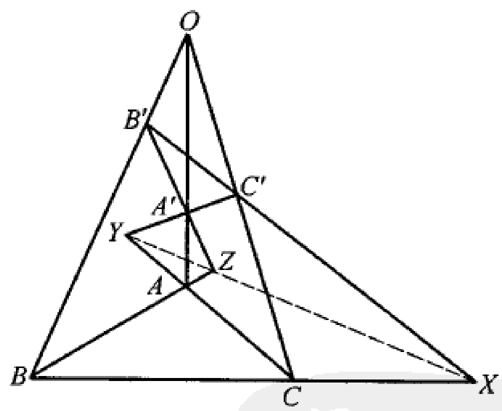


图 358

思索方法 就 $\triangle ABC$ 来看,X,Y,Z 恰是它的三边或延长线上的点,而题设条件只涉及点同直线的位置关系,其他如角度关系、长度关系等则一无所知,故本题宜用梅涅劳斯定理证明.要应用梅涅劳斯定理,自应寻求 BC,CA,AB 各被 X,Y,Z 所分的分比的关系.这自然不能从 $\triangle ABC$ 本身获得,所以必须另行设法.我们转来看 $\triangle OBC$,$\triangle OCA$,$\triangle OAB$ 这三个三角形,$XC'B'$,$YA'C'$,$ZA'B'$ 恰好各是它们的截线,因此根据梅涅劳斯定理,可能把所要寻求的分比关系从这些三角形推算出来.

证明 把梅涅劳斯定理用于 $\triangle OBC$,$\triangle OCA$,$\triangle OAB$,得

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'O}}\cdot\frac{\overline{B'O}}{\overline{B'B}}=1$$

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{A'A}}{\overline{AO}}\cdot\frac{\overline{C'O}}{\overline{C'C}}=1$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{B'B}}{\overline{BO}}\cdot\frac{\overline{A'O}}{\overline{A'A}}=1$$

将此三式连乘，约去分母子的公因子，便得

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1$$

所以就 $\triangle ABC$ 来看，知 X,Y,Z 三点共线.

推论 设两三角形的对应边(所在直线)交点共线，则对应顶点的连线交于一点或互相平行.

事实上，这很容易从图 358 看出来. 在这图中，假定 X,Y,Z 三点共线. 若 AA',BB',CC' 三线中有两线(例如，BB' 与 CC')相交于点 O，则我们可看 $\triangle BB'Z$ 与 $\triangle CC'Y$，由于它们的对应顶点连线 $BC,B'C',ZY$ 交于一点 X，所以它们的对应边交点 A,A',O 应共线，即 AA' 通过点 O. 如果 $BB'\parallel CC'$，那么 AA' 一定也和它们平行；因为假若 AA',BB',CC' 之一线相交，则一如上法知另一线必通过它们的交点，但这是和 $BB'\parallel CC'$ 矛盾的.

具有上述条件的两个三角形，我们说它们是**透视的**或**配景的**；它们的对应顶点连线的交点叫做**透视中心**或**配景中心**，对应边(所在直线)交点所在的直线叫做**透视轴**或**配景轴**. 为普遍起见，有时两三角形有透视中心而无透视轴，或有透视轴而无透视中心，或虽无透视轴但对应顶点的连线互相平行，或虽无透视中心但对应边分别平行，我们仍说它们是透视的(参看习题 14 第 24 题).

习题 14

1. 自圆上一点引三弦，并以它们为直径画圆，求证：所画三圆的其他三交点共线.(萨蒙定理).

2. 求证：三角形一边上的高线足在另两边及另两高线上的射影凡四点共线.

3. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，H 是垂心. 若在直线 BC 上有两点 P,Q，合于 $\frac{\overline{DP}}{\overline{DQ}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$，求证：$P$ 在 AC,CH 上的射影及 Q 在 AB,BH 上的射影凡四点共线.

4. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，H 是垂心. 若在直线 AD 上有两点 P,Q，合于 $\dfrac{\overline{DP}}{\overline{DQ}}=\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$，求证：$P$ 在 AB,BH 上的射影及 Q 在 AC,CH 上的射影凡四点共线.

5. 设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，E,F 分别是 AB,AC 上的切点；又作 $BG\perp CI$ 于 G，$CH\perp BI$ 于 H，求证：E,F,G,H 四点共线.

6. 在上题中，若 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆则如何？

7. 四边形有一角是直角且两对角线相等，求证：该四边形对边的中垂线交点与该直角的顶点共线.

8. 在圆内接四边形中，自每边两端所引邻接边的垂线相交，求证：所得四交点与四边形的对角线交点及外接圆心共线.（提示：应用习题 10 第 24 题.）

9. 求证：圆上四点两两连成四个三角形，它们的内心、旁心合计十六点分配在八条直线上，每线上四点，而这八线是两组互相垂直的平行线，每组含四线.（富赫曼定理）

10. 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，且 $AC\perp BD$，求证：$\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCD$，$\triangle ODA$ 的垂心共线.（提示：这线通过 AC 与 BD 的交点.）

11. 求证：圆内接四边形一对对边（所在直线）交角的平分线，与另一对对边（所在直线）交角的平分线分别垂直①，两垂足与两对角线的中点组成调和点列.

12. 自四边形的对角线交点引线平行于每边而与对边（所在直线）相交，求证：四交点共线.

13. 在四边形 $ABCD$ 中，A',C' 是 AC 上的两点，B',D' 是 BD 上的两点. $A'B'\parallel AB$，$B'C'\parallel BC$，$C'D'\parallel CD$，求证：$D'A'\parallel DA$，且 $A'B'$ 与 CD，$B'C'$ 与 DA，$C'D'$ 与 AB，$D'A'$ 与 BC 的交点共线.

14. P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 或延长线上一点，X 是 AP 上一点. 若有 Y,Z 两点，使得 $\triangle XCP$ 与 $\triangle YAC$，$\triangle XBP$ 与 $\triangle ZAB$ 分别镜像相似，求证：X,Y,Z 三点共线.

15. P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 或其延长线上一点. 若有 X,Y,Z 三点，使得 $\triangle XBP$ 与 $\triangle YAC$，$\triangle XCP$ 与 $\triangle ZAB$ 分别真正相似，求证：这三点共线，且 $\dfrac{\overline{XY}}{\overline{XZ}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$.（提示：作 $\triangle YAC$ 及 $\triangle ZAB$ 的外接圆.）

① 参看习题 13 第 13 题.

16. M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点.向三角形的内侧引 $MX \perp BC$,向外侧引 $BY \perp AB$, $CZ \perp AC$,使 $MX : BY : CZ = \frac{1}{2}BC : AB : AC$,求证:$X,Y,Z$ 三点共线,且 X 是 YZ 的中点.

17. 如图 359,$ABCD$,$PQRS$,$DQEF$,$CSGH$ 都是正方形,点 P 在 AB 上,且 $PR \perp AB$,$PR = \frac{1}{2}AB$,求证:E,R,G 三点共线,且 R 是 EG 的中点.

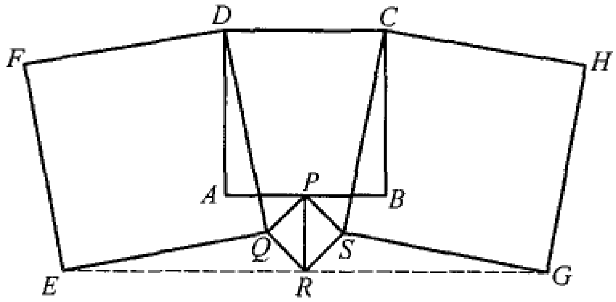


图 359

18. 求证:圆内接六边形三对对边(所在直线)的交点共线.(提示:应用第 15 题.)(这条直线叫做该六边形的帕斯卡线.本题还可以推广到圆锥曲线的情形,系法国数学家帕斯卡(Pascal,1623—1662)于 1639 年所发现,他那时年仅 16 岁.)

19. 一直线截 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 或其延长线于 X,Y,Z,试证:这三点的等截点 X',Y',Z' 共线(在三角形任一边所在直线上设有两点与此边的中点等距,则称这两点互为等截点).

20. 求证:三角形的外角平分线分别与对边(所在直线)的交点共线.

21. 求证:三角形两角的平分线及第三角的外角平分线分别与对边(所在直线)的交点共线.

22. 求证:过三角形的顶点所作外接圆的切线分别与对边(所在直线)的交点共线.(这条直线叫做三角形的勒穆瓦纳(Lemoine)线.)

23. 求证:完全四边形的三条对角线的中点共线.(四条直线两两相交于六点,这个图形叫做完全四边形.一完全四边形有四边和六顶点,不共边的两顶点称为对顶点,其连线称为对角线,凡三线;三对角线交成的三角形,称为对角三角形.本题所得直线叫做完全四边形的牛顿线,为英国数学家兼物理学家牛顿(Newton,1643—1727)所发现.)

24. 试就 §43 例题 38 及推论的各种特殊情形分别证明.

(1) 设两三角形的对应顶点连线交于一点或互相平行:

① 三对对应边(所在直线)均相交,则三交点共线;

② 若有一对对应边平行,余两对对应边(所在直线)相交,则两交点的连线平行于前一对对应边;

③ 若有两对对应边各平行,则第三双对应边也平行.

(2) 设两三角形有一对对应边平行,余两对对应边(所在直线)相交,且两交点的连线平行于前一对对应边,则对应顶点的连线交于一点或互相平行.

(3) 设两三角形的三对对应边分别平行,则对应顶点的连线交于一点或互相平行.

25. 将一点与正三角形的顶点相连,求证:三联结线的中垂线分别与对边(所在直线)的交点共线.

26. 求证:若两三角形从两方面看来是透视的,则从第三方面看来也是透视的.具体地说,即设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle B'C'A'$,$\triangle ABC$ 与 $\triangle C'A'B'$ 各是透视的,那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 也是透视的.

27. 一六边形相间各顶点分在两直线上,求证:它的三对对边(所在直线)的交点共线.(帕波斯定理)

28. 给定 $\triangle ABC$ 及两点 O,O',联结 AO,AO' 交 BC 于 X,X',BO,BO' 交 CA 于 Y,Y',CO,CO' 交 AB 于 Z,Z'.设 YZ' 与 $Y'Z$ 交于 P,ZX' 与 $Z'X$ 交于 Q,XY' 与 $X'Y$ 交于 R,求证:O,O',P,Q,R 五点共线.

20. 在四边形 $ABCD$ 中,O 是 AC 与 BD 的交点.一直线交 AB,BC,CD,DA 于 E,F,G,H,联结 EO,FO,GO,HO,设依次交 CD,DA,AB,BC 于 E',F',G',H',求证:这四交点共线.

30. 在四边形 $ABCD$ 中,A',C' 是 AC 上的两点,B',D' 是 BD 上的两点.若 $A'B'$ 与 AB,$B'C'$ 与 BC,$C'D'$ 与 CD 的交点共线,求证:$D'A'$ 与 DA 的交点也在此线上,且 $A'B'$ 与 CD,$B'C'$ 与 DA,$C'D'$ 与 AB,$D'A'$ 与 BC 的交点共线.

第六节　共 点 线

§44　关于共点线的证题术

交于一点的许多直线叫做共点线,或者说这些直线共点.

证题术 16　证三线共点,可先确定其中两线的交点,然后在第三线上取两点证其与该交点共线;换句话说,即是把共点线问题化为共线点问题.

例题 39　若在 $\triangle ABC$ 的外边作正三角形 $\triangle BCA'$，$\triangle CAB'$，$\triangle ABC'$(图 360)，则 AA'，BB'，CC' 三线共点.

这点叫做 $\triangle ABC$ 的正等角中心，是三角形的巧合点之一，早在希腊时代已被发现. 公元 17 世纪时，法国数学家费马(Fermat，1601—1665) 曾提出一问题征解，问题是"求一点，使与定三角形三顶点的距离和为极小". 当三角形的三个角均小于 120° 的时候(图 360(b)) 问题的解答正是三角形的正等角中心(参看习题 12 第 21 题). 因此各角均小于 120° 的三角形，它的正等角中心又有费马点之称.

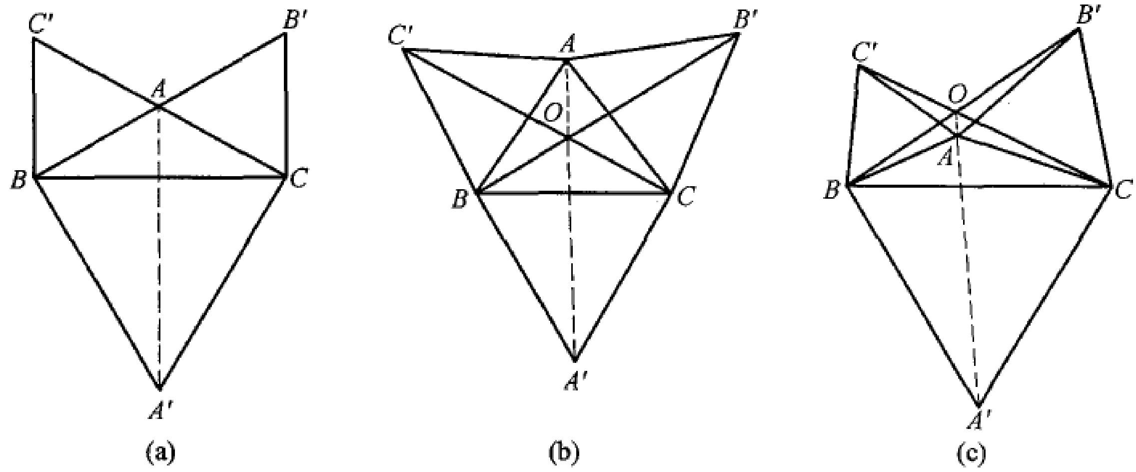


图 360

题设　在 $\triangle ABC$ 的外边作正三角形 $\triangle BCA'$，$\triangle CAB'$，$\triangle ABC'$.

题断　AA'，BB'，CC' 三线共点.

思索方法　在 AA'，BB'，CC' 三线中，如果其中两线的交点是 $\triangle ABC$ 的顶点之一(当 $\triangle ABC$ 有一角等于 120° 时)，则问题已显而易见. 现在假定 BB' 与 CC' 的交点是 O，联结 OA 和 OA'. 由题设，易知 $\triangle ABB'$ 与 $\triangle AC'C$ 全等，因而 A 与 BB'，$C'C$ 等距. 那么 OA 是 $\angle B'OC'$ 或 $\angle BOC$ 的平分线(就图 360 来看). 于是若能证 OA' 是 $\angle BOC$ 的平分线，问题便解决了. 为要考究这一着，我们想到图形中有许多 60° 的角，应该设法利用它们. 从上述两个全等三角形的对应角相等这个关系看来，我们马上发觉 $\angle COB' = \angle CAB' = 60°$，由此可见 O，B，A'，C 四点同在一圆上，这就证实了我们刚才的希望没有落空.

证明　分三种情形证明如下：

(1) 假定 $\triangle ABC$ 有一角(例如，$\angle A$) 等于 120°(图 360(a)). 这时 BAB' 与 CAC' 显然都是直线，因而 AA'，BB'，CC' 三线交于点 A 是十分明白的.

(2) 假定 $\triangle ABC$ 各角均小于 120°(图 360(b)). 这时 BB'，CC' 两线显然交于

$\triangle ABC$ 内部一点 O,联结 OA 和 OA'.由题设,$AB = AC'$,$AB' = AC$,且

$$\angle BAB' = \angle BAC + \angle CAB' = \angle BAC + \angle C'AB = \angle C'AC$$

故
$$\triangle ABB' \cong \triangle AC'C$$

由此得知 A 与 BB',$C'C$ 等距,那么 OA 是 $\angle B'OC'$ 的平分线.

在全等三角形 $\triangle ABB'$ 与 $\triangle AC'C$ 中,有 $\angle AB'O = \angle ACO$.因此 A,B',C,O 四点同在一圆上,从而 $\angle COB' = \angle CAB' = 60°$.但据题设,$\angle CA'B = 60°$,可见四边形 $OBA'C$ 有外接圆.这样一来,由 $A'B = A'C$,便知 OA' 是 $\angle BOC$ 的平分线.

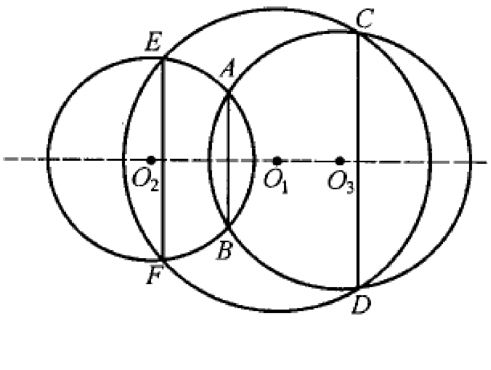
以上的结果,证明了 A,O,A' 三点是共线的(§5 定理 16).这就是说,AA',BB',CC' 三线交于点 O.

(3) 假定 $\triangle ABC$ 有一角(例如,$\angle A$)大于 120°(图 360(c)).这时 BB',CC' 两线将交于 $\triangle ABC$ 外部一点 O(O,A 同在 BC 的一侧),联结 OA 和 OA'.仿上面的步骤,可以证明 $\triangle ABB'$ 与 $\triangle AC'C$ 全等及四边形 $OBA'C$ 有外接圆,因此 OA,OA' 同为 $\angle BOC$ 的平分线.于是 OA 和 OA' 必然合而为一(§5 定理 15),所以题断成立.

证题术 17 证三线共点,可先证其中两线交于某点,然后将此点与第三线上一点相连,而证其与第三线重合.

例题 40 三圆两两相交,所得三公弦(所在直线)或共点或互相平行.

题设 AB 是 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 的公弦,CD 是 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$ 的公弦,EF 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公弦(图 361).



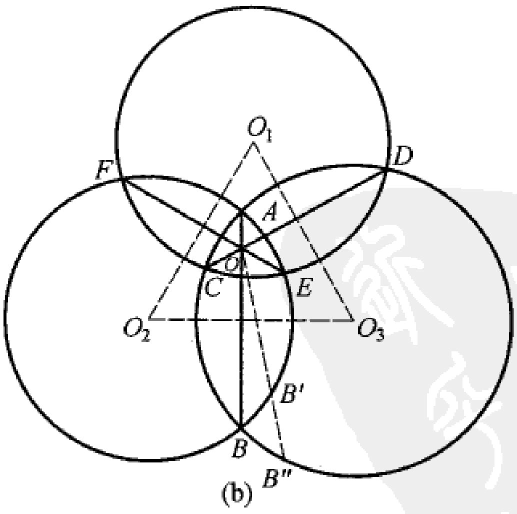


图 361

题断 AB,CD,EF 三线共点或互相平行.

思索方法　三圆心的位置不外共线与不共线两种情形. 本题题断在前者简单易晓;在后者目前尚无适当定理可据,唯有圆幂定理(§19 定理 127) 似乎可用,不妨一试.

证明　三圆心的相互位置,不外两种情形:

第一,O_1,O_2,O_3 三点共线(图 361(a)). 这时 AB,CD,EF 都垂直于连心线 $O_1O_2O_3$(§12 定理 77),所以 $AB // CD // EF$.

第二,O_1,O_2,O_3 三点不共线(图 361(b)). 因 CD,EF 各垂直于相交的连心线 O_1O_3,O_1O_2,故 CD 与 EF 必相交于一点 O(§7 定理 32 推论 2). 联结直线 AO 设交 $\odot O_2$,$\odot O_3$ 于 B',B'',则

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB'}=\overline{OE}\cdot\overline{OF}=\overline{OC}\cdot\overline{OD}=\overline{OA}\cdot\overline{OB''}$$

于是

$$\overline{OB'}=\overline{OB''}$$

这个等式表示 B' 与 B'' 应该重合,因而它们实际就是点 B. 也就是说,AB 要通过点 O.

推论　(戴比斯定理) 三角形的每边所在直线上有一对点①,若每两对点同在一圆上,则三对点(六点) 都在一圆上.

这因为假如所说三圆不合而为一,则根据上题,三角形的三条边就得共点或互相平行,但这明明不可能,所以三圆非合一不可.

这个定理对于"共圆点" 问题(见 §47) 颇有用处.

证题术 18　证诸线共点,有时可借助于某些特殊点线的唯一性.

例题 41　四边形中,每对对边的中点连线及两对角线的中点连线共点.

题设　在四边形 $ABCD$ 中(图 362),E,F,G,H 分别是四边 AB,BC,CD,DA 的中点,I,J 分别是两对角线 AC,BD 的中点.

题断　EG,FH,IJ 三线共点.

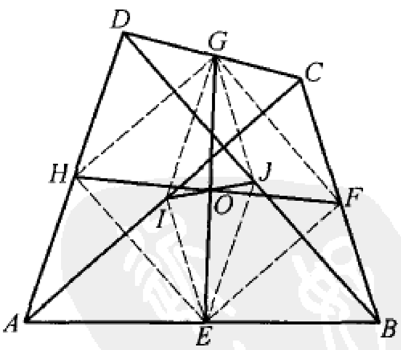


图 362

思索方法　对于四边形各边中点的性质,我们最熟习的莫过于它们恰是一个平行四边形的顶点这个事实. 根据这个特性,我们马上知道 EG 与 FH 两线段互相平分. 因为线段的中点是唯一的,所以若 EG 与 IJ 两线段也互相平分那就好了. 然而这只要从四边形 $ABCD$ 去看便立即可知道.

① 每边所在直线上的一对点可以重合,但此时定理中所说的圆应与该线切于重合的点.

证明 联结四边形 $EFGH$，我们早已知道这是一个平行四边形（习题 2 第 15 题），因此 EG 与 FH 两线段互相平分于一点 O. 再从四边形 $ABDC$ 来看，若把 $EJGI$ 联结起来，也是一个平行四边形，所以 EG 与 IJ 两线段也互相平分. 但是一个线段只有一个中心（§5 定理 14），那么 IJ 一定通过点 O.

§45 等角共轭点

我们先述一个在共点线问题上颇为重要的定理.

定理 148 给定 $\triangle ABC$（图 363）. 设直线 $x \perp BC$ 于 X，$y \perp CA$ 于 Y，$z \perp AB$ 于 Z，则 x,y,z 三线共点的必要且充分的条件为

$$XB^2 - XC^2 + YC^2 - YA^2 + ZA^2 - ZB^2 = 0 \quad ①$$

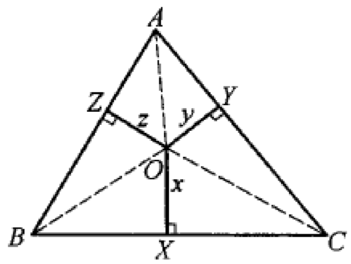


图 363

证明 先假定 x,y,z 三线交于一点 O，联结 OA，OB，OC，则有（习题 4 第 16 题）

$$XB^2 - XC^2 = OB^2 - OC^2$$
$$YC^2 - YA^2 = OC^2 - OA^2$$
$$ZA^2 - ZB^2 = OA^2 - OB^2$$

将这三个等式两端各加起来，结果便得到 ①.

次假定 ① 成立. 按题设，y 与 z 两线必相交，命交点为 O. 联结 OA，OB，OC，则

$$\left.\begin{aligned} YC^2 - YA^2 &= OC^2 - OA^2 \\ ZA^2 - ZB^2 &= OA^2 - OB^2 \end{aligned}\right\} \quad ②$$

以 ② 代入 ①，并移项，得

$$XB^2 - XC^2 = OB^2 - OC^2$$

这式表示连线 XO 要垂直于 BC（复习题 2 第 12 题）；因此 XO 应与 x 重合，即 x 线通过点 O.

证题术 19 证共点线问题，可设法化为已知的共点线问题.

给定一个角 $\angle AOB$，假定 OC 是它的平分线（图 364）. 过点 O 作两直线 OX 与 OY，如果它们关于 OC 对称，那么我们叫这样的两直线做 $\angle AOB$ 的**等角线**[①]，有时也说它们关于 $\angle AOB$ 互为等角线. 显然，一个角的两边（所在直线）是本角

---

① 因 OX，OY 分别与 $\angle AOB$ 的两边成等角，故有这个名称.

的等角线;一角的平分线是重合的等角线,因而又叫做自等角线;一角的邻补角的平分线也是自等角线.

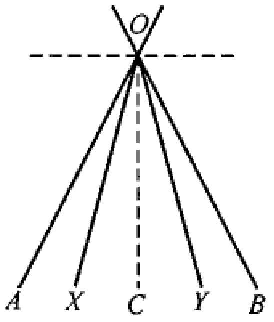


图 364

对于一个多边形而言,它的每个角的等角线,我们也把它们叫做多边形的等角线.在三角形中,我们最熟习的等角线,是自一顶点所作外接圆的直径(所在直线)与对边的高线,这看图 365 自明.一角的任何两条等角线,我们总可以把它们化成如图 365 的样子,然后借这个熟习的图形来研究它们间的关系.

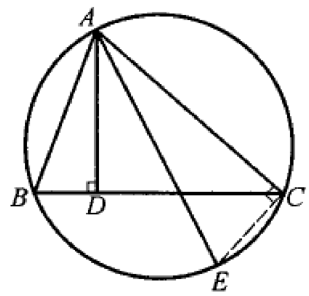


图 365

例题 42　任取一点与一三角形各顶点相连,则三连线的等角线共点或互相平行.

题设　$\triangle ABC$ 是给定的三角形(图 366),P 是任一点,x,y,z 各是 AP,BP,CP 的等角线.

题断　x,y,z 三线共点或互相平行.

思索方法　现在的问题是如何由共点的三线推证另外三线共点或互相平行,因此两者的关系必须设法表出.刚才说过,欲寻求等角线间的关系,可以先化成如图 365 的图形,然后研究.这个启示提醒我们要作 $PX\perp BC,PY\perp CA,PZ\perp AB$.命垂足分别为 X,Y,Z,并联结 YZ,ZX,XY.这样一来,AP 便是 $\triangle AYZ$ 的外接圆的直径,因而 $x\perp YZ$;同理 $y\perp ZX,z\perp XY$.明了这种关系后,我们就可借助于定理 148 来判断 x,y,z 三线是否合乎题断所说的了.

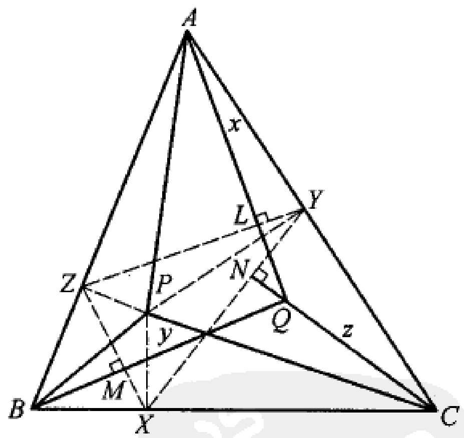


图 366

证明　作 $PX\perp BC$ 于 X,$PY\perp CA$ 于 Y,$PZ\perp AB$ 于 Z,并联结 YZ,ZX,XY.显然,AP 是 $\triangle AYZ$ 的外接圆的直径,而题设 x 是 AP 的等角线,可见 $x\perp YZ$.同理,$y\perp ZX$;$z\perp XY$.命三垂足分别为 L,M,N,则有

$$LY^2-LZ^2=YZ^2-ZA^2$$
$$MZ^2-MX^2=ZB^2-XB^2$$
$$NX^2-NY^2=XC^2-YC^2$$

据定理 148,知这三式右端的总和等于零,于是

$$LY^2 - LZ^2 + MZ^2 - MX^2 + NX^2 - NY^2 = 0 \qquad ①$$

但是 X,Y,Z 三点或共线(参看 §42 例题34)或否.如果 X,Y,Z 共线,那么 $x \parallel y \parallel z$.若 X,Y,Z 不共线,则由 ① 即知 x,y,z 三线交于一点 Q.证完.

给定了 $\triangle ABC$,如果有一点 P 使得 AP,BP,CP 的等角线交于一点 Q(当然 AQ,BQ,CQ 的等角线要会于点 P),那么这样的 P,Q 两点叫做 $\triangle ABC$ 的等角共轭点,有时也说它们关于 $\triangle ABC$ 互为等角共轭点.譬如,三角形的外心与垂心就是等角共轭点;内心是重合的等角共轭点,因而叫做自等角共轭点;三个旁心也都是自等角共轭点.应该注意,对于一个三角形而言:① 外接圆上除三个顶点外,其余所有点均无等角共轭点和它们相配;② 每个顶点可有无限多个等角共轭点,即对边所在直线上的所有点;③ 每边及延长线上的所有点同以对顶点为它们的等角共轭点;④ 除以上所说的点外,每一点都有唯一的等角共轭点和它配成点偶.

三角形每条中线的等角线,叫做陪位中线或类似中线;三条陪位中线的交点,即重心的等角共轭点,叫做陪位重心或类似重心(图 367).陪位重心在"三角形几何学"上有很多有趣的性质.

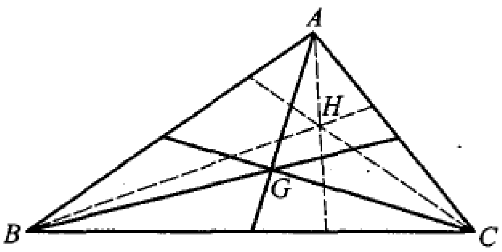


图 367

和陪位中线有密切关系的另一概念,是"逆平行线".给定 $\triangle ABC$(图 368),在直线 AC,AB 上各取一点 B',C',若 $\triangle AB'C'$ 镜像相似于 $\triangle ABC$,亦即 B,C,B',C' 四点同在一圆上,则 $B'C'$ 线叫做 BC 边的逆平行线①.逆平行线这个概念,是对于一个给定的三角形说的,所以如果随便说甲线是乙线的逆平行线,那就毫无意义了.和中线等仿佛,我们对于逆平行线也有两种理解:有时理解它是直线,有时又理解它是线段(两端点落在三角形两边所在的直线上).

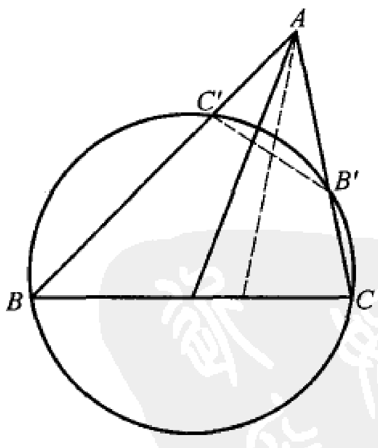


图 368

下述命题描述了三角形的陪位中线与逆平行线的相互关系,这是显而易见的.

定理 149 在一个三角形中(图 368):

① 为普遍起见,我们把过 A 而切于 $\odot ABC$ 的直线也默认为是边 BC 的逆平行线.

(1) 同边的逆平行线互相平行;

(2) 过一顶点而平分对边的逆平行线的直线是陪位中线;

(3) 某边的逆平行线被这边的陪位中线平分;

(4) 凡端点落在两边所在直线上的线段,若被第三边的陪位中线平分,则它必是第三边的逆平行线.

关于等角共轭点的概念,也可以推广于多边形.对于一个多边形来说,假若一点 P 与各顶点连线的等角线交于一点 Q,则这样的 P,Q 两点仍有等角共轭点之称.不过任意的多边形未必有等角共轭点这种点偶存在.

在"近世初等几何学"上,等角共轭点是重要研究资料之一.

§46　塞瓦定理

和梅涅劳斯定理(§43 定理 147)在共线点问题上的用途一样,塞瓦定理对于解决共点线问题的效力也很大.

定理 150　(塞瓦定理)设 X,Y,Z 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点(图 369),则 AX,BY,CZ 三线共点或互相平行的必要且充分的条件为

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-1 \qquad ①$$

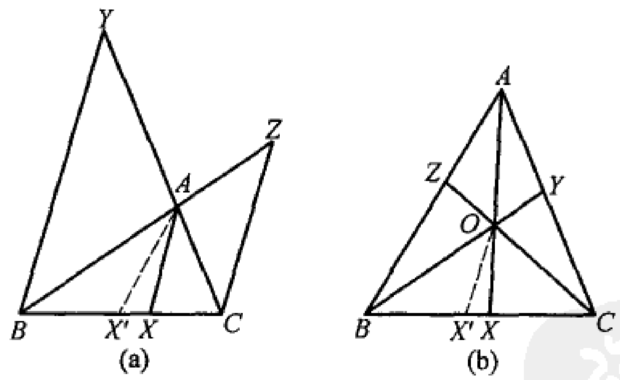


图 369

证明　(1) 先假定 $AX \mathbin{/\!/} BY \mathbin{/\!/} CZ$(图 369(a)).这时显然

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BX}},\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=\frac{\overline{CX}}{\overline{CB}}$$

故

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{BX}}\cdot\frac{\overline{CX}}{\overline{CB}}=-1$$

再假定 AX, BY, CZ 三线交于一点 O(图 369(b)).因为 BOY 是 $\triangle AXC$ 的截线,所以据梅涅劳斯定理得

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{OA}}{\overline{OX}}=1 \qquad ②$$

又 COZ 是 $\triangle ABX$ 的截线,同样得

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CX}}\cdot\frac{\overline{OX}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1 \qquad ③$$

②,③ 相乘,并注意有向线段的符号,化简后即是 ①.

(2) 假定 ① 成立.这时若 $BY /\!/ CZ$,可作 AX' 平行于它们而交 BC 于 X'(图 369(a));若 BY 与 CZ 交于一点 O,可联结直线 AO,它与 BC 必有交点,设为 X'(图 369(b)).后者情形中,点 X' 所以存在,是因为如果 $AO /\!/ BC$(图 370),那么$\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AO}}$且$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{BC}}$,以之代入 ①,必致$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=1$,但这是不可能的.这样一来,根据上面的证明,应有

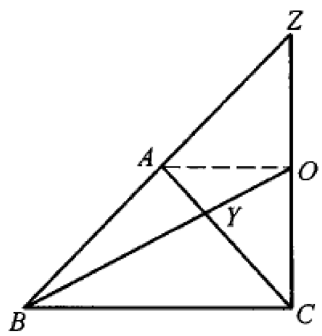


图 370

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'C}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1 \qquad ④$$

以 ④ 和 ① 比较,得

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'C}}=\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}$$

可见 X' 与 X 必须重合.这就证明了 AX, BY, CZ 三线共点或互相平行.

证题术 20 证三线共点,若用以前各法不易奏效时,可用塞瓦定理来证明.

例题 43 一圆交 $\triangle ABC$ 的每边或其延长线于两点①,假设直线 BC, CA, AB 上的交点分别是 X 与 X', Y 与 Y', Z 与 Z'(图 371);若 AX, BY, CZ 三线共点,则 AX', BY', CZ' 三线共点或互相平行.

题设 X 与 X', Y 与 Y', Z 与 Z' 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 或其延长线上的一对点而且同在一圆上,又 AX, BY, CZ 三线共点.

题断 AX', BY', CZ' 三线共点或互相平行.

思索方法 已知的是三条共点线,求证的是三条线共点或互相平行,所以

---

① 每对点可以重合.

最好能由前者的必要条件推得后者的充分条件.题设中还有一个条件是 X, X', Y, Y', Z, Z' 六点同在一圆上,我们希望这个条件能起桥梁作用,圆幂定理便是一个现成的有用工具.

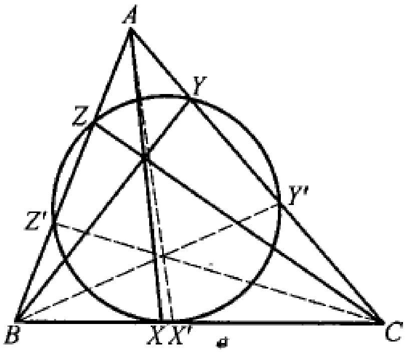


图 371

证明　题设 AX, BY, CZ 三线共点,故据塞瓦定理,得

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1 \qquad ①$$

又因 X, X', Y, Y', Z, Z' 六点同在一圆上,知

$$\overline{AY} \cdot \overline{AY'} = \overline{AZ} \cdot \overline{AZ'}$$
$$\overline{BZ} \cdot \overline{BZ'} = \overline{BX} \cdot \overline{BX'}$$
$$\overline{CX} \cdot \overline{CX'} = \overline{CY} \cdot \overline{CY'}$$

把它们改写为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\overline{Y'A}}{\overline{Z'A}} &= \frac{\overline{ZA}}{\overline{YA}} \\ \frac{\overline{Z'B}}{\overline{X'B}} &= \frac{\overline{XB}}{\overline{ZB}} \\ \frac{\overline{X'C}}{\overline{Y'C}} &= \frac{\overline{YC}}{\overline{XC}} \end{aligned}\right\} \qquad ②$$

将 ② 的三个式子左右各连乘,结果右端所得与 ① 的左端相同,所以

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Z'A}} \cdot \frac{\overline{Z'B}}{\overline{X'B}} \cdot \frac{\overline{X'C}}{\overline{Y'C}} = -1$$

取此式两端的倒数,并改写做

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'C}} \cdot \frac{\overline{Y'C}}{\overline{Y'A}} \cdot \frac{\overline{Z'A}}{\overline{Z'B}} = -1$$

便知 AX', BY', CZ' 三线共点或互相平行了.

习 题 15

1. 在 §44 例题 39 中,假定 $\triangle ABC$ 非正三角形,而所作三个正三角形是向 $\triangle ABC$ 内侧作的,求证:AA', BB', CC' 三线仍然共点.这点叫做 $\triangle ABC$ 的**负等角中心**.

2. 求证:若一平行四边形的顶点分别落在另一平行四边形每边所在直线上,则两平行四边形必共一中心.

3. 设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,M, N 分别是 GB, GC 的中点.延长 AC 至 E,使

$CE=\frac{1}{2}AC$,又延长 AB 至 F,使 $BF=\frac{1}{2}AB$,求证:AG,ME,NF 三线共点.

4. 在 $\triangle ABC$ 中,直径为 BC 的圆交 AB,AC 于 E,F,求证:自这两点所引该圆的切线与边 BC 的高线共点.

5. 已知一圆 $\odot ABC$ 及不在这圆上的一点 P,联结 AP,BP,CP 交已知圆于 A',B',C',在此圆内作三弦 $A'X,B'Y,C'Z$ 使分别平行于 BC,CA,AB,求证:AX,BY,CZ 三线共点.

6. 将某点在一三角形每角的内外平分线上的射影相连,求证:三连线共点或互相平行.

7. 一点 P 在 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 所在直线上的射影为 X,Y,Z,设过这三点可作一圆,而这圆又交 BC,CA,AB 于 X',Y',Z',求证:过此三点依次所作 BC,CA,AB 的垂线必共点.

8. 以一三角形的每边为一边向外边各作正方形,将三角形的顶点与立于对边上那个正方形的中心相连,求证:这三连线共点.

9. 在 $\triangle ABC$ 的外边作正方形 $ABEF$ 及 $ACGH$,并引 $AD\perp BC$,求证:

(1) BH,CF,EG 三线共点;

(2) AD,BG,CE 三线共点.(提示:延长 DA 至 K,使 $AK=BC$.)

10. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,又一直线 l 交 BC,CA,AB 于 X,Y,Z,求证:过 A,B,C,H 各向 HX,HY,HZ,l 所作的垂线共点.

11. 设自 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 各引一直线使交于一点而分别交 BC,CA,AB 于 A',B',C',求证:$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的对应边的中点连线共点.

12. 在一四边形中,若有一对对角的平分线与一对角线共点,则另一对角的平分线与另一对角线亦共点.

13. AB 是某圆的直径,$AA',BB',A'B'$ 都是这圆的切线,C 是 $A'B'$ 上的切点.设 $CD\perp AB$,求证:CD,AB',BA' 三线共点.

14. $\triangle ABC$ 中,设边 BC 在 $\angle A$ 的外角平分线上的射影为 $B'C'$,求证:BC',CB' 与 $\angle A$ 的平分线共点.

15. 设 X,Y,Z 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点,求证:$\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 并重心的必要且充分的条件为 $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}$.

16. 设 X,Y,Z 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 上的点,合于 $\frac{XB}{XC}=\frac{AB^2}{AC^2}$;$\frac{YC}{YA}=\frac{BC^2}{BA^2}$;$\frac{ZA}{ZB}=\frac{CA^2}{CB^2}$,求证:$AX,BY,CZ$ 三线交于 $\triangle ABC$ 的陪位重心.(提示:

过 C 作 BC 边的逆平行线.)

17.在 $\triangle ABC$ 的外边作正方形 $BCPP'$，$CAQQ'$，$ABRR'$，设 QQ' 与 RR' 与 PP'，PP' 与 QQ' 的交点分别为 X，Y，Z，求证：AX，BY，CZ 三线交于 $\triangle ABC$ 的陪位重心.(提示：应用 §36 例题 12.)(按这个法子以求三角形的陪位重心，称为格雷贝(Grebe，1804 – 1874)作图法.)

18.求证：过三角形的顶点作外接圆的切线设交成一三角形，则这三角形与原三角形是透视的，而且透视中心是原三角形的陪位重心.(提示：过原三角形的顶点分别作对边的平行线.)

19.自三角形的顶点向一直线作垂线，求证：由各垂足分别至对边所作的垂线共点.

20.有两三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，自 A，B，C 分别向 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$ 所作的垂线共点，求证：自 A'，B'，C' 分别向 BC，CA，AB 所作的垂线亦共点.

21.点 P 在 $\triangle ABC$ 三边 BC，CA，AB 所在直线上的射影为 X，Y，Z，求证：自 YZ，ZX，XY 的中点分别向 BC，CA，AB 所作的垂线共点.

22.将一点 P 与 $\triangle ABC$ 的顶点相连，设 $\angle BPC$，$\angle CPA$，$\angle APB$ 的平分线分别交 BC，CA，AB 于 X，Y，Z，求证：AX，BY，CZ 三线共点.

23.在 $\triangle ABC$ 中，X 与 X'，Y 与 Y'，Z 与 Z' 分别是 BC，CA，AB 上的等截点.设 AX，BY，CZ 三线交于一点 P，求证：AX'，BY'，CZ' 三线或交于一点 P' 或互相平行.(当 P 与 P' 存在时，我们把它们叫做 $\triangle ABC$ 的等截共轭点，有时也说它们关于 $\triangle ABC$ 互为等截共轭点.)

24.设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆，它切 BC，CA，AB 于 X，Y，Z，求证：AX，BY，CZ 三线共点.(这样的点共四点，称为 $\triangle ABC$ 的热尔岗(Gergonne，1771—1859)点.这四点的等截共轭点是存在的，它们叫做 $\triangle ABC$ 的纳格尔(Nagel，1821—1903)点.三角形的每个纳格尔点与任一顶点的连线，都分别通过一个热尔岗点(参看复习题 1 第 13 题).)

25.设自 $\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 各引一直线使交于一点而交 BC，CA，AB 于 X，Y，Z，求证：线段 AX 与 BC，BY 与 CA，CZ 与 AB 的中点连线共点或互相平行.

26.设 X 与 X'，Y 与 Y'，Z 与 Z' 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC，CA，AB 或其延长线上的点，A'，B'，C' 分别是 YZ 与 $Y'Z'$，ZX 与 $Z'X'$，XY 与 $X'Y'$ 的交点，求证：若 AX，BY，CZ 三线共点，则 $A'X'$，$B'Z'$，$C'Z'$ 三线共点或互相平行.

27.将一点 P 与正三角形 $\triangle ABC$ 的顶点相连，求证：$\triangle PBC$，$\triangle PCA$，$\triangle PAB$ 的欧拉线共点或互相平行.

第七节　共圆点

§ 47　关于共圆点的证题术

同在一个圆上的许多点叫做共圆点，或者说这些点共圆.

证题术 21　证若干点共圆时，如果发现其中某两点的联结线应是一条直径，便设法证其他点对这线段的视角均为直角.

例题 44　三角形三边的中点，三高线的足，垂心与顶点联结线的中点，凡九点共圆.

这圆叫做三角形的九点圆，19 世纪初叶被人们发现后，百年间对它的研究很盛.

题设　在 $\triangle ABC$ 中（图 372），H 是垂心，L,M,N 分别是 BC,CA,AB 三边的中点，D,E,F 分别是这三边上的高线足，P,Q,R 分别是 HA,HB,HC 三线段的中点.

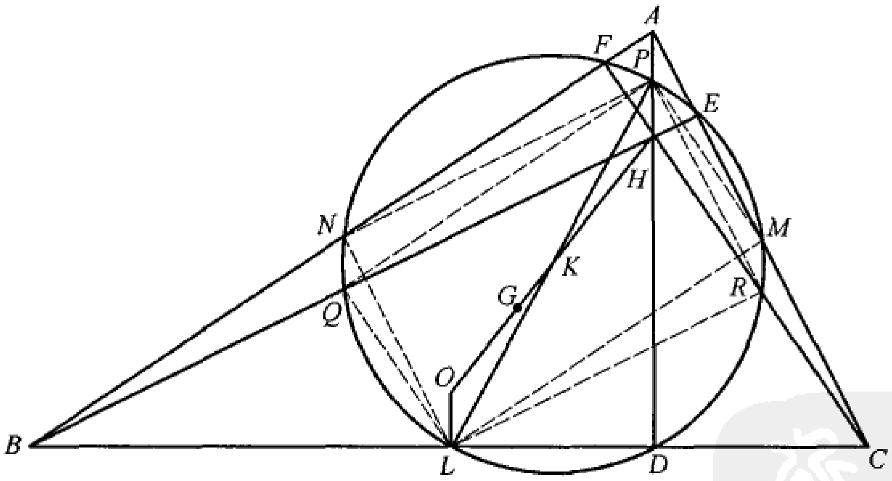


图 372

题断　L,M,N,D,E,F,P,Q,R 九点共圆.

思索方法　按题设知 $\angle LDP$ 是直角. 若题断中所说的九点果然共圆，则 LP 应是此圆的直径，而其他各点对这线段的视角都该是直角. 因此目前的问题在于观察这些角是否的确如此. 题设中有许多线段的中点，根据三角形的中位线定理（§ 9 定理 54），可以产生若干对平行线，同时题设中又有垂线，从而不难

寻觅出直角来.

证明　联结 LM, MP,因 L, M, P 分别是 BC, CA, AH 的中点,故 $LM \parallel BA$ 且 $MP \parallel CH$. 但 $BA \perp CH$,那么 $\angle LMP = 90°$. 同理 $\angle LNP = \angle LQP = \angle LRP = 90°$. 所以 L, M, N, P, Q, R 六点共圆,由于 $\angle LDP$ 明明是直角,可见该圆必然通过点 D. 不难知道,$\angle MLQ$ 与 $\angle NLR$ 都是直角,而 $\angle MEQ$ 与 $\angle NFR$ 又都是现成的直角,因而 E, F 两点也同在刚才所说的圆上.

推论 1　三角形的九点圆半径等于外接圆半径的一半.

推论 2　三角形的九点圆心在欧拉线上.

推论 3　三角形的外心、九点圆心、重心、垂心成调和点列. 具体地说,设 O, G, K, H 是外心,重心,九点圆心,垂心(图 372),则

$$\overline{OG} : \overline{GK} : \overline{KH} = 2 : 1 : 3$$

证题术 22　证诸点共圆,可先证其中四点共圆,然后证其余各点均在这圆上.

例题 45　在两对角线互相垂直的四边形中,过对角线交点向每边作垂线,得四垂足,并假定每垂线又与对边相交,得四交点,则所得八点共圆.

题设　在四边形 $ABCD$ 中(图 373), AC 垂直 BD 于 P, PE 垂直 AB 于 E 而交 CD 于 E', PF 垂直 BC 于 F 而交 DA 于 F', PG 垂直 CD 于 G 而交 AB 于 G', PH 垂直 DA 于 H 而交 BC 于 H'.

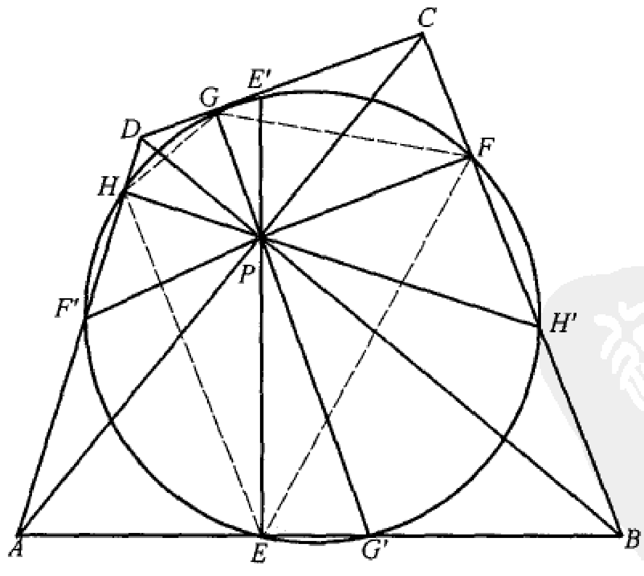


图 373

题断　E, E', F, F', G, G', H, H' 八点共圆.

思索方法 $AC \perp BD$ 是题中最重要的条件，而 E,F,G,H 四点与两对角线的交点 P 关系较密切(有许多直角足供利用)，所以可先设法证明该四点共圆. 为达到这个目的. 我们将那四个点连成四边形 $EFGH$，然后观察 $\angle EFG$ 与 $\angle EHG$ 是否互补(就图 373 来看). 由垂直的关系，知 $\angle PFE = \angle PBE$，$\angle PFG = \angle PCG$，$\angle PHE = \angle PAE$，$\angle PHG = \angle PDG$；于是问题在于这四式右端的四个角之和是否等于二直角了. 但是这显然已被 $AC \perp BD$ 的假设所肯定，那么我们的第一步设计便有了着落. 第一步完成了，第二步就得来设法证明 E',F',G',H' 四点都落在四边形 $EFGH$ 的外接圆上. 譬如看点 G' 吧，我们试问 $\angle EG'G$ 与 $\angle EFG$ 等不等？显而易见，$\angle EG'G = \angle PBE + \angle BPG'$，于是转而要问 $\angle BPG'$ 与 $\angle PFG$ 等不等？可是，$\angle DPG$ 与 $\angle BPG'$ 是对顶角，而根据题设，显见 $\angle DPG$ 等于 $\angle PCG$，于是问题解决了. 其余自可举一反三.

证明 联结四边形 $EFGH$. 按题设，知道 P,E,B,F 四点共圆等，由此(就图 373 来看)

$$\left.\begin{aligned}\angle PFE &= \angle PBE\\ \angle PFG &= \angle PCG\\ \angle PHE &= \angle PAE\\ \angle PHG &= \angle PDG\end{aligned}\right\} \qquad ①$$

由于 $AC \perp BD$，可见 ① 中四式右端的四个角之和等于二直角；因而 $\angle EFG + \angle EHG = 180°$，这关系式肯定了四边形 $EFGH$ 有外接圆.

其次，易知下列关系式成立

$$\angle EG'G = \angle PBE + \angle BPG' \qquad ②$$

$$\angle BPG' = \angle DPG = \angle PCG \qquad ③$$

比较 ①,②,③，得

$$\angle EG'G = \angle PFE + \angle PFG = \angle EFG$$

那么点 G' 在 $\odot EFG$ 上，即在四边形 $EFGH$ 的外接圆上. 同理，H',E',F' 三点亦然.

以上是就 $ABCD$ 为凸四边形的情形而证的，建议读者补绘凹四边形和折四边形的图形分别考察，看看证明过程有无需要更改的地方.

注 当四边形 $ABCD$ 的顶点组成垂心组时，则 E',F',G',H' 四点不存在，而 E,F,G,H 四点共线. 参看习题 14 第 2 题.

证题术 23 证若干点共圆，可分别证其中某些点共圆，然后判断这些圆实际是一个圆.

例题 46 如果一个多边形有等角共轭点，那么这双等角共轭点在各边(所

在直线）上的射影必共圆.

题设 P 与 P' 是多边形 $ABC\cdots H$ 的等角共轭点（图 374），它们在 AB，BC，$\cdots$，HA 上的射影分别是 K 与 K'，L 与 L'，$\cdots$，N 与 N'.

题断 $K,K',L,L',\cdots,N,N'$ 诸点共圆.

思索方法 若题中所说的那些点的确共圆，则圆心必须同时落在 KK'，LL'，$\cdots$，NN' 的中垂线上，而这些中垂线显然都通过 PP' 的中点 O，可见圆心非 O 莫属. 圆心位置确定了以后，能证明每两邻边上的四点共圆，问题即可解决，因为这些圆既然同心，且又轮回地有公共点，它们自应合而为一.

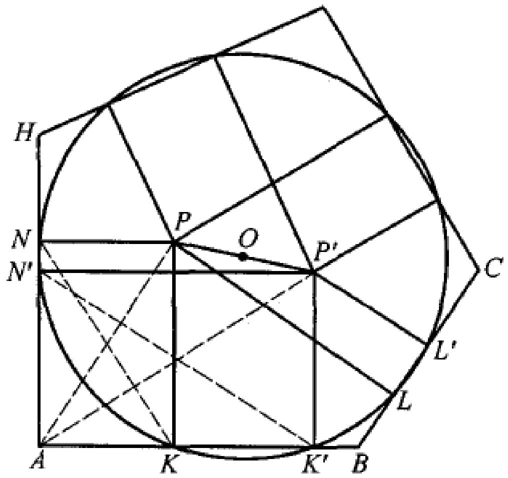


图 374

证明 联结 $AP,AP',NK,N'K'$. 按题设，知 A,P,N,K 四点共圆，因而（就图 374 来看）

$$\angle ANK = \angle APK = 90^\circ - \angle PAK \qquad ①$$

又由 A,P',N',K' 四点共圆，得

$$\angle AK'N' = \angle AP'N' = 90^\circ - \angle P'AN' \qquad ②$$

根据等角共轭点的定义，有

$$\angle PAK = \angle P'AN'$$

可见 ① 和 ② 的末端相等，于是

$$\angle ANK = \angle AK'N'$$

看这式子，即知 N,N',K,K' 四点共圆. 这圆的中心应是 NN'，KK' 的中垂线（图中未画）的交点，但这两中垂线显然交于 PP' 的中点 O（§9 定理 53 推论 1），那么 O 当是该圆的中心了.

仿上方法，一样可证 K,K',L,L' 四点共圆，而且圆心也是 PP' 的中点 O，其余类推.

以上所得诸圆，既同心，又轮回地有公共点，自必合而为一.

推论 1 若两点在一个多边形各边（所在直线）上的射影共圆，则它们必是这多边形的等角共轭点.

推论 2 若一点在一个多边形各边（所在直线）上的射影共圆，则该点的等角共轭点（关于这多边形而言）必定存在.

证题术 24　证若干点共圆,可证各点都距某定点等远.

例题 47　过三角形的陪位重心所作三边的逆平行线的六个端点共圆.

这圆叫做三角形的第二勒穆瓦纳(Lemoine,1840—1912)圆;或因它在三边上所截的弦与对角的余弦成比例(这道理留给读者证明,见复习题 3 第 79 题),故又有余弦圆之称.

题设　K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心(图 375),通过 K 的 YZ', ZX', XY' 分别是三边 BC, CA, AB 的逆平行线.

题断　X, X', Y, Y', Z, Z' 六点圆.

思索方法　K 既是 $\triangle ABC$ 的陪位重心,AK, BK, CK 便是陪位中线,因而 K 必是各边逆平行线 YZ', ZX', XY' 的公共中点. 由此看来,我们的问题就转而要证 $KX = KX' = KY = KY' = KZ = KZ'$. 怎样证明这六条线段相等呢?我们一眼就看到这六条线段分成三对,各与一边似乎都构成等腰三角形①,若是真的话,问题便解决了. 譬如看 $\triangle KXX'$ 吧,由逆平行线的定义,$\angle KXX'$ 与 $\angle KX'X$ 都等于 $\angle A$,因知 $\triangle KXX'$ 的确等腰.

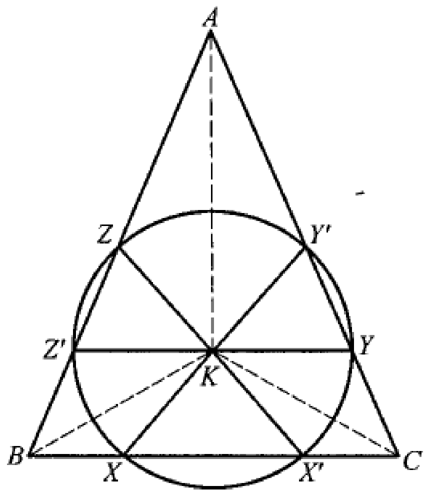


图 375

证明　因为 XY', ZX' 分别是 AB, CA 的逆平行线,所以

$$\angle KXX' = \angle A = \angle KX'X$$

由此

$$\left.\begin{aligned} KX &= KX' \\ KY &= KY' \\ KZ &= KZ' \end{aligned}\right\} \qquad ①$$

又 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心,AK, BK, CK 三连线便是陪位中线,因而(§45 定理 149(3))

$$\left.\begin{aligned} KY &= KZ' \\ KZ &= KX' \\ KX &= KY' \end{aligned}\right\} \qquad ②$$

比较 ① 和 ②,得

$$KX = KX' = KY = KY' = KZ = KZ'$$

① 因此建议读者凡画图务求精确,如此可借图形的直观帮助思考.

可见，X, X', Y, Y', Z, Z' 六点共圆.

证题术 25 证若干点共圆，有时径用已知的共圆点定理.

例题 48 过三角形的陪位重心所作三边的平行线与周界的六个交点共圆.

这圆叫做三角形的第一勒穆瓦纳圆；或因它在三边上所截的弦与三边的立方成比例（这道理留给读者证明，见复习题 3 第 78 题），故又有三乘比圆之称.

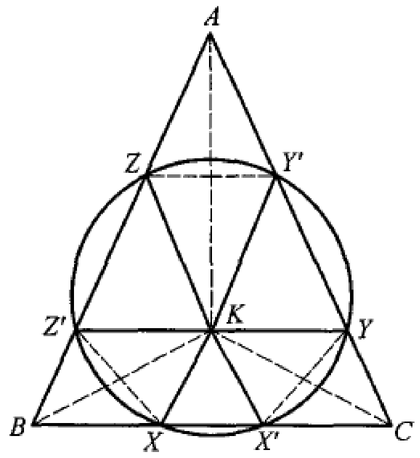


图 376

题设 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心（图 376），过 K 所引 BC, CA, AB 的平行线各交其他两边于 Y 与 Z'，Z 与 X'，X 与 Y'.

题断 X, X', Y, Y', Z, Z' 六点共圆.

思索方法 由题设 $Z'Y \parallel BC$，$X'Z \parallel CA$，$Y'X \parallel AB$ 着想，要证题断成立，但能证 $Y'Z, Z'X, X'Y$ 三联结线分别是 BC, CA, AB 三边的逆平行线就行了. 因 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心，故 AK, BK, CK 即是陪位中线；于是欲问 $Y'Z, Z'X, X'Y$ 是否分别是 BC, CA, AB 的逆平行线，就得问它们是否分别被 AK, BK, CK 平分. 然而根据题设，这问题的答案是肯定的.

证明 由题设知 $AY'KZ$ 是平行四边形，故 AK 连线平分 $Y'Z$ 线段；但 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心，即 AK 是陪位中线，可见 $Y'Z$ 是 BC 边的逆平行线（§45 定理 149(4)）. 由此

$$\angle AY'Z = \angle ABC = \angle ZZ'Y$$

所以 Y, Y', Z, Z' 四点共圆. 同理，Z, Z', X, X' 四点及 X, X', Y, Y' 四点亦然. 这样一来，应用已知的定理（§44 例题 40 推论），便知本题题断成立.

习题 16

1. 设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，P 是这三角形的外接圆上任一点，联结 PG 并延长至 Q，使 $GQ = \frac{1}{2}PG$，求证：点 Q 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 是边 BC 的高，M, N 分别是 CA, AB 两边的中点. 今有直线 l 通过点 A；命 BC 在 l 上的射影为 $B'C'$. 联结 $B'N$ 与 $C'M$ 设交于 P，求证：B'，

C', D, P 四点共圆，且圆心 O 与 P 点同在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.

3. 有四圆轮回相外切，求证：四个切点共圆.

4. 两圆交于 P, Q 两点，过 Q 任作一直线交两圆于 A, B，自这两点各引所在圆的切线设交于 C，求证：A, B, C, P 四点共圆.

5. 求证：若两直线交圆内接四边形的一对对边（所在直线）于共圆点，则亦必交另一对对边（所在直线）于共圆点.

6. AB, CD 是一圆的两弦，联结 AC 与 BD 设交于 P，求证：$\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的外心及垂心凡四点共圆.

7. 求证：圆上四点两两连成四个三角形，它们的垂心共圆，而且这圆与原圆一般大小.

8. 求证：无内切圆的四边形中，每边两邻角的平分线的交点凡四点共圆.

9. 求证：凸四边形各外角的平分线顺次相交，所得四交点共圆.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，O 是外心，并设边 AB 的中垂线交直线 AC 于 E，边 AC 的中垂线交直线 AB 于 F，求证：B, C, E, F, O 五点共圆.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，作 AB, AC 两边的逆平行线 AX, AX' 而交 BC 于 X, X'，又作 $X'Y$ 平行于 BA 而交 AC 于 Y, XZ 平行于 CA 而交 AB 于 Z，求证：A, X, X', Y, Z 五点共圆.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，A' 是 BC 上的任一点，过 A' 分别作 AB, AC 两边的逆平行线分别交 AC, AB 于 B', C'. 今在 BC, CA, AB 上分别取一点. P, Q, R，使合于 $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{QB'}}{\overline{QC}}=\frac{\overline{RB}}{\overline{RC'}}$，求证：$A$, A', P, Q, R 五点共圆.

13. P 是四边形 $ABCD$ 的对角线交点，设 $\odot PAB$ 与 $\odot PCD$ 交于 Q, $\odot PAD$ 与 $\odot PBC$ 交于 R，求证：P, Q, R 三点与 AC, BD 的中点凡五点共圆.

14. 三圆 c_1, c_2, c_3 交于点 O，而 c_2 与 c_3, c_3 与 c_1, c_1 与 c_2 另外的交点 A, B, C 不共线. 过点 O 任作一直线交 c_1, c_2, c_3 于 X, Y, Z，联结 BZ 与 CY, CX 与 AZ, AY 与 BX 分别交于 A', B', C'，求证：A, A', B, B', C, C' 六点共圆.

15. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心，E, F 是 I 关于 AB, AC 的对称点，D 是 BE 与 CF 的交点. 今过 I 作两直线使与 IA 构成 $30°$ 的角，求证：所作两直线与 AB, AC 的交点连同 D, E, F 凡七点共圆.

16. 由一已知点向一三角形各边引垂线，以每垂足为起点在所在边（视为直线）上截两线段，使均等于该垂足与已知点的等角共轭点之距离，求证：则六截点共圆.

17. 一三角形每边（所在直线）上有一对点，这些点与对顶点的联结线均等

长,求证:六条联结线的中点共圆.

18. 在每三角形中,求证:下列十二点共圆:

(1) 在第 16 题中当已知点是三角形的垂心时所得的六个截点;

(2) 在第 17 题中当六条联结线均等于三角形的外接圆直径时该六条联结线的中点.

19. 设一圆与一三角形的外接圆同心且与各边(所在直线)相交,将各交点分别与对顶点相连,求证:诸联结线的中点共圆且这圆与三角形的九点圆同心.

20. 有三个真正相似的等腰三角形,它们的底边分别落在一已知三角形的三边(所在直线)上,顶角的顶点分别落在该已知三角形的三顶点上,求证:这三个等腰三角形的对应腰(所在直线)的六个交点共圆.

21. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,A',B',C' 分别是 AH,BH,CH 三线上的点,这三点没有两点重合也不共线.设 $B'C'$ 连线与直径为 BC 的圆交于 X,X',$C'A'$ 连线与直径为 CA 的圆交于 Y,Y',$A'B'$ 连线与直径为 AB 的圆交于 Z,Z',求证:这六交点共圆.

22. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,X,Y,Z 分别是 BC,CA,AB 上的点,并假定 AX,BY,CZ 三线共点.

(1) 若过 H 所引 AX,BY,CZ 的垂线分别与直径为 BC,CA,AB 的圆相交,求证:诸交点共圆;

(2) 若过 H 所引 AX,BY,CZ 的垂线分别与直径为 AX,BY,CZ 的圆相交,求证:诸交点共圆;

(3) 若直径为 BC,CA,AB 的圆分别与直径为 AX,BY,CZ 的圆相交,求证:诸交点共圆或共线(哈格定理).

23. 由三角形的顶点向直径为对边的圆引切线,求证:诸切点共圆,圆心是三角形的重心.(这圆叫做三角形的重圆.)

24. I 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心,J 是对应的热尔岗点,A',B',C' 分别是 AJ,BJ,CJ 三线上的点.若 $A'B' \perp CI$ 及 $A'C' \perp BI$,求证:$B'C' \perp AI$ 且 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的非对应边(所在直线)的六交点共圆.

25. K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心,A',B',C' 分别是 AK,BK,CK 三线上的点.若 $A'B' \parallel AB$ 及 $A'C' \parallel AC$,求证:$B'C' \parallel BC$ 且 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的非对应边(所在直线)的六交点共圆.(这圆叫做 $\triangle ABC$ 的塔刻(Tucker,1832—1905)圆.当 A',B',C' 三点依照条件变动时,如此所得的一群圆,合称为 $\triangle ABC$ 的塔刻圆系.三乘比圆和余弦圆都是塔刻圆系中的圆.)

26. 在上题所说的条件下,若过 A',B',C' 各作三边 BC,CA,AB 的逆平行

线，求证：它们的六个端点共圆.（这样所得的圆属于塔刻圆系.）

27. 在第 25 题中，改设 $A'B'$，$A'C'$ 分别是 AB，AC 两边的逆平行线，求证：$B'C'$ 也是边 BC 的逆平行线且 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的非对应边（所在直线）的六交点共圆.（按此法所得的一群圆实际还是塔刻圆系.）

28. 求证：三角形每边上的高线足在另两边上的射影凡六点共圆.（这圆叫做三角形的泰勒(Taylor)圆，系塔刻圆之一.）

29. 设 A'，B'，C' 分别是 $\triangle ABC$ 三条高线 AD，BE，CF 上的点，合于 $\dfrac{\overline{A'A}}{\overline{A'D}} = \dfrac{\overline{B'B}}{\overline{B'E}} = \dfrac{\overline{C'C}}{\overline{C'F}} = k$，求证：$A'$，$B'$，$C'$ 分别在 CA 与 AB，AB 与 BC，BC 与 CA 上的射影凡六点共圆.（当 k 值变动时，所得的一群圆即塔刻圆系.）

30. 求证：以三角形每顶点为心作半径等于对边的圆与两邻边（所在直线）相交于四点，这样共得十二个交点，它们分布于四个圆上，每圆上有六点，圆心恰是三角形的内心和三个旁心.

31. 求证：圆内接四边形两对角线的中点，在四边中点所连成的平行四边形各边（所在直线）上的射影凡八点共圆.

32. 圆内接四边形的两对角线互相垂直，求证：其交点在四边上的射影与四边的中点凡八点共圆.

33. 在四边形 $ABCD$ 中，$AC \perp BD$，A'，C' 是 AC 上的两点，B'，D' 是 BD 上的两点.若 $A'B' \perp AB$，$B'C' \perp BC$，$C'D' \perp CD$，求证：$D'A' \perp DA$ 且四垂足及 $A'B'$ 与 CD，$B'C'$ 与 DA，$C'D'$ 与 AB，$D'A'$ 与 BC 的四交点凡八点共圆.（注：当四边形 $ABCD$ 的顶点恰组成垂心组时，则后四交点不存在，而四垂足共线.参看习题 14 第 3 题.）

34. 求证：在上题中，如果 A'，C' 是 BD 上的两点，B'，D' 是 AC 上的两点，其他条件不改，那么仍有相仿的结论.（注：本题也有类似于上题所注的特殊情形.参看习题 14 第 4 题.）

第八节　共 点 圆

§ 48　关于共点圆的证题术

交于一点的许多圆叫做共点圆，或者说这些圆共点.

证题术 26 证若干圆共点,可先证其中两圆相交(或相切)于某点,而后证此点在其他圆上;换句话说,即是把共点圆问题化为共圆点问题.

例题 49 设在△ABC三边BC,CA,AB所在直线上各任取一点X,Y,Z(图377),则三圆⊙AYZ[①],⊙BZX,⊙CXY共点.

这命题的出处,尚属疑问.因密克(Miquel)曾于1838年明白地述出并给出了证明,故将它称为密克定理.

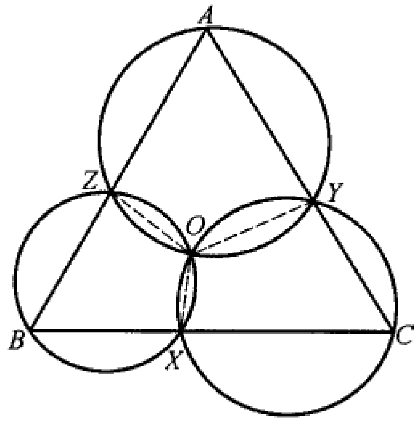


图 377

题设 在△ABC中,X,Y,Z分别是直线BC,CA,AB上的点.

题断 三圆⊙AYZ,⊙BZX,⊙CXY共点.

证明 ⊙BZX与⊙CXY已有一交点X,故当有第二交点O[②].联结OX,OY,OZ,则见(就图377来看)

$$\angle AYO = \angle CXO = \angle BZO$$

因知点O在⊙AYZ上.这就是说,三圆⊙AYZ,⊙BZX,⊙CXY交于一点O.

若X,Y,Z,O各点的位置不是像图377那样的,以上证法须略加修改.建议读者选其二三情形,分别绘图敷证.

本题中所得的点O,叫做X,Y,Z对于△ABC的密克点.

例题 50 设A,B,C分别是圆⊙OYZ,⊙OZX,⊙OXY上的点(图378),则三圆⊙XBC,⊙YCA,⊙ZAB共点.

题设 三圆⊙AYZ,⊙BZX,⊙CXY交于一点O.

题断 三圆⊙XBC,⊙YCA,⊙ZAB共点.

证明 ⊙YCA与⊙ZAB已有一交点A,故有第二交点P.作四边形PBXC和AZOY,并且把它们的顶点P与A,B与Z,X与O,C与Y联结起来.经过这样作图之后,我们见到里边有五个现成的圆内接四边形;由此得(就图378来看)

$$\angle BPC + \angle BXC = \angle APB + \angle APC + \angle OXB + \angle OXC =$$
$$720^\circ - (\angle AZB + \angle AYC + \angle OZB + \angle OYC) =$$
$$\angle AZO + \angle AYO = 180^\circ$$

① 当Z重合于A时,则以过A,Y而切于AB的圆当作⊙AYZ.如果Y,Z均重合于A,那么即以点A来代替⊙AYZ;这时我们不妨想象点A是一个半径等于零的圆,而称它的点圆.余仿此.

② 这第二交点可能重合于第一交点,亦即此时两圆相切.以后凡有类此情形,将不再声明.

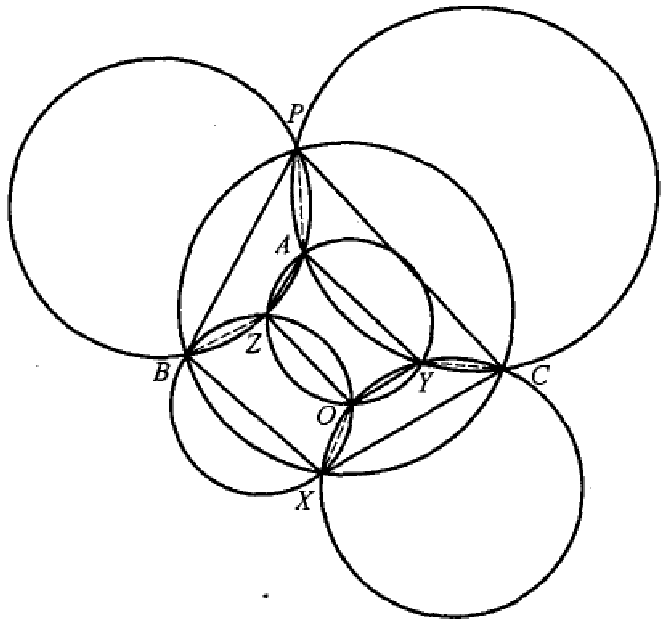


图 378

 从而可知 ⊙XBC 通过点 P.

但应注意，一旦所设各圆及各点的相互位置有所变动时，须按具体情况把上面的证法稍加修改.

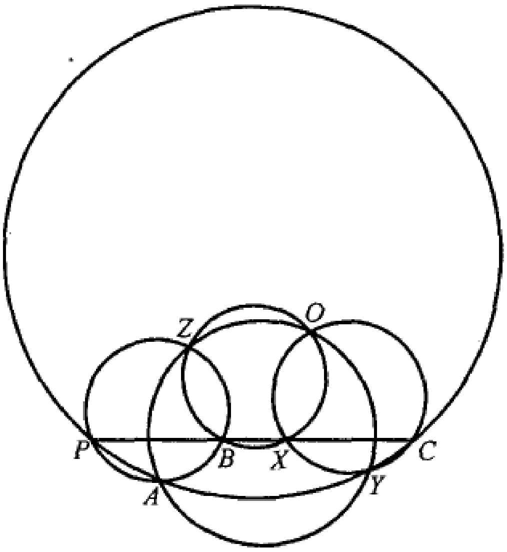
在三圆 ⊙XBC，⊙YCA，⊙ZAB 之一变态为直线的特殊情形下，本题仍然成立(图 379(a))；但若有两圆同时变态为直线，则第三圆亦必为直线，可是它们并不共点(图 377).

如果把图 378 和 379 中的 ⊙AYZ 看做固定圆，其他的圆是后作的，那么上题可以改叙成如下的形式：

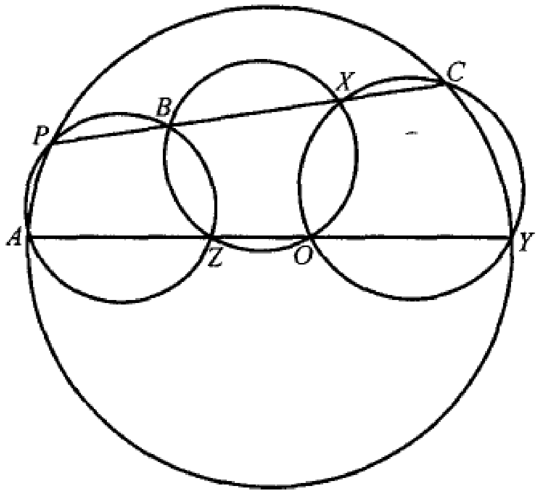
定理 151 设定圆上有四点，通过其第一第二两点，第二第三两点，第三第四两点，第四第一两点，各作一圆轮回相交，则所得四个第二交点共圆或共线.

当所得四交点共圆时，这定理的图形共有六圆，三三相交于八点，叫做六连环，也名古镂钱.若将其中圆改为定直线，命题仍直确，即：

定理 152 设定直线上有四点，通过其第一第二两点，第二第三两点，第三第四两点，第四第一两点，各作一圆轮回相交，则所得四个第二交点共圆(图 379(a))或共线(图 379(b)).



(a)



(b)

图 379

例题 51 四点两两连成四个三角形,它们的九点圆共点.

题设 A,B,C,D 为任意四点(图 380),c_1,c_2,c_3,c_4 分别是 $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$, $\triangle ABC$ 的九点圆.

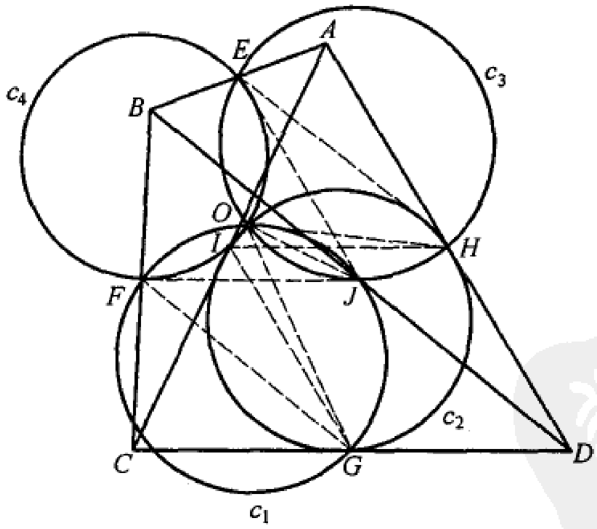


图 380

题断 c_1,c_2,c_3,c_4 四圆共点.

思索方法 每三角形的九点圆通过九个特殊点,四个圆共有 36 个点,乍看起来太麻烦了.其实不然.每个三角形的九个特殊点可分为三类(各边中点、各高线垂足、垂心与各顶点的联结直线的中点),每类三点;一类点便足以决定九

点圆,所以选用一类点就可以讨论现在的问题(万一不敷应用,再相机增加点数).但是选哪一类点好呢?从工作的繁简着想,点数越少越好.现在各边中点的总数较其他两类点数减半,选择这类点当比其他两类简单.显然,每个边的中点联系着两个九点圆,要研究四个九点圆的关系,这应是很有利的一面.由各边中点可以产生许多平行线,因而产生许多等角,而角与圆的关系极密切,这是选取各边中点有利的又一面.我们的论证既然有了这样良好的基础,由此去设计证法,料必顺利成功.

证明 命 AB,BC,CD,DA,AC,BD 的中点分别为 E,F,G,H,I,J.据九点圆的定义(§47 例题 44),知 c_1 通过 F,G,J 三点,c_3 通过 H,E,J 三点.既然 c_1 与 c_3 已有一交点 J,它们当有第二交点 O.联结 OG,OH,OJ,FG,FJ,EH,EJ,则见(就图 380 来看)

$$\angle GOH = \angle JOG + \angle JOH = \angle JFG + \angle JEH \qquad ①$$

但 $JFGD$ 和 $JEHD$ 都是平行四边形,因而 $\angle JFG = \angle JDG$ 且 $\angle JEH = \angle JDH$.代入①,得

$$\angle COH = \angle JDG + \angle JDH = \angle CDH \qquad ②$$

再联结 IG,IH,即见 $GDHI$ 也是平行四边形,于是 $\angle GDH = \angle GIH$.以之代入②,便是

$$\angle GOH = \angle GIH$$

这等式确定 G,H,I,O 四点共圆,即 c_2 通过点 O.

同理可证 c_4 也通过点 O.

当 A,B,C,D,O 五点的相互位置有所变动时,上面的证法相应的须加以适当地修改.

如果 A,B,C,D 四点中有三点共线,那么有一个九点圆要变态为直线;在这情形之下,本题显然成立.至于四点共线时,我们对本题便不感兴趣了.

证题术 27 证若干圆共点,可觑便径用已知的共点圆定理来证明.

例题 52 四条直线交成四个三角形,它们的外接圆共点.

这点叫做四条直线所构成的完全四边形的密克点.

题设 四条直线两两交于 A,B,C,D,E,F 六点(图 381).

题断 四圆 $\odot ABF,\odot BCE,\odot CDF,\odot DAE$ 共点.

思索方法 四条直线交成的四个三角形,合共六个顶点,任取一个三角形来看,其余三点恰好分在这三角形三边所在的直线上,因此应用密克定理(例题 49)来证明本题极其合宜.

证明 先从 $\triangle ABF$ 来看,E,C,D 是它三边所在直线上的点,故三圆

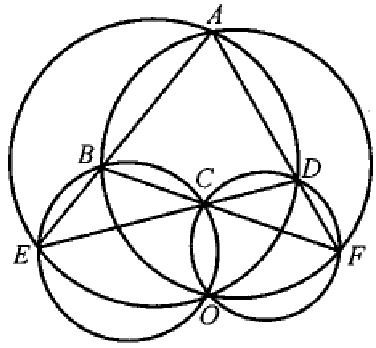


图 381

⊙BCE，⊙CDF，⊙DAE 共点(例题 49)．也就是说，⊙DAE 通过 ⊙BCE 与 ⊙CDF 的第二交点 O．

再从 △DAE 来看，B，C，F 是它三边所在直线上的点，所以三圆 ⊙ABF，⊙BCE，⊙CDF 也共点．这证明了 ⊙ABF 也通过 ⊙BCE 与 ⊙CDF 的交点 O．

证题术 28 证若干圆共点，可证它们都通过某一特殊点．

一个完全四边形中包含三个四边形(凸的、凹的、折的各一)，每个四边形的对边都叫做完全四边形的对节．一个完全四边形共有六对对节．

例题 53 通过完全四边形每对对节的中点及它们所在边的交点作圆，这样所作的六圆共点．

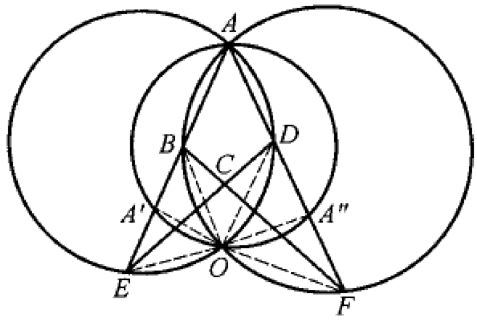


图 382

题设 在完全四边形 $ABCDEF$ 中(图 382)，A'，A'' 分别是对节 BE，DF 的中点，B'，B'' 分别是对节 AE，CF 的中点，……

题断 六圆 ⊙$AA'A''$，⊙$BB'B''$，…共点．

思索方法 题中所说六圆，在题设里没有露出任何两圆有公共点的迹象，这时采用证题术 26 是有困难的①．再者，目前尚找不到现成的共点圆定理用以说明那些圆共点，所以证题术 27 在此也无用武之地．怎么办呢？由于所说六圆对于完全四边形都处于同等地位，它们当真共点的话，这点必然是完全四边形的特殊点．如果这个特殊点被揭露出来，那么我们但能证它落在六圆中的一圆上，其余便不过是依样画葫芦而已．这样，问题就简单得多．现在我们的注意力，首应集中在如何考虑那个特殊点的所在．比较熟悉的特殊点，是上面讲过的密克点(例题 52)；这点乃系完全四边形各边所交成四个三角形的外接圆的公共点，它可能和上述六圆具有一定关系．今命完全四边形 $ABCDEF$ 的密克点为 O，联结 OA' 和 OA''，那么希望点 O 在 ⊙$OA'A''$ 上，但能证明 $\angle OA'B = \angle OA''F$ 就

① 虽然下面我们还是把问题化为共圆点问题去证，但这和证题术 26 所说的不同，因为这里缺乏题中所说六圆中任何两圆的交点作为证明中的一个角色．

好了.因为 A',A'' 分别是 BE,FD 的中点,把 OB,OE,OF,OD 联结起来,若能证明 $\triangle OBE$ 与 $\triangle OFD$ 相似也好.根据密克点的定义,略加思索便知道 $\triangle OBE$ 与 $\triangle OFD$ 有两双角各相等.

证明 作出完全四边形 $ABCDEF$ 的密克点 O,并联结 OB,OE,OF,OD,则有

$$\angle OBE = \angle OFD, \angle OEB = \angle ODF$$

可见 $\triangle OBE \backsim \triangle OFD$.题设 A',A'' 分别是 BE,FD 的中点,若联结 OA' 和 OA'',那么

$$\angle OA'B = \angle OA''F$$

这个等式证明了 $\odot AA'A''$ 通过点 O.

其余仿此.

习 题 17

1.以一三角形的每边为一边向外侧各作正三角形,求证:所作三个正三角
 形的外接圆共点.试问这点是原三角形的什么点?

2.在上题中,设原三角形不是正三角形,而所作三个正三角形是向内侧作的,求证:所作三个正三角形的外接圆仍然共点.这点是原三角形的什么点?

3.以一三角形的两边各为一边向外侧作正方形,又以第三边为一对角线作正方形,求证:所作三个正方形的外接圆共点.

4.设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.过 B 且切直线 CI 于 I 作圆,又过 C 且切直线 BI 于 I 作圆,求证:所作两圆与 $\odot ABC$ 共点.

5.上题的 I 若是 $\triangle ABC$ 的任一个旁心,试问尚成立否?

6.在 $\triangle ABC$ 中:设 c_1 是过 C 而切 AB 于 A 的圆,c_2 是过 A 而切 BC 于 B 的圆,c_3 是过 B 而切 CA 于 C 的圆;又设 c'_1 是过 B 而切 CA 于 A 的圆,c'_2 是过 C 而切 AB 于 B 的圆,c'_3 是过 A 而切 BC 于 C 的圆.求证:

(1)c_1,c_2,c_3 三圆交于一点 Ω;

(2)c'_1,c'_2,c'_3 三圆交于一点 Ω';

(3)Ω 与 Ω' 是 $\triangle ABC$ 的等角共轭点.

(Ω 与 Ω' 两点首由克雷尔(Crelle,1780—1855)于1816年发现,但当时人们对于研究这两点的兴趣未能持久,以致湮没无闻.至 1875 年,法人布罗卡尔(Brocard,1845—1922)重新发现这两点,并获得重要的定理,因而人们把 Ω 叫做 $\triangle ABC$ 的正布罗卡尔点,Ω' 叫做负布罗卡尔点.自此而后,人们对于这两点的

研究可谓盛极一时,关于这系统的研究成果,统称为布罗卡尔几何.

7. 设 $\angle XAY$ 是固定的角,在它的两边上各截一线段 AB, AC,使 $AB+AC$ 有一定的长,求证:$\odot ABC$ 恒过另一定点.

8. 设四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, P 是 AC 与 BD 的交点,求证:

(1) 四圆 $\odot OAB$, $\odot PBC$, $\odot OCD$, $\odot PDA$ 共点;

(2) 四圆 $\odot PAB$, $\odot OBC$, $\odot PCD$, $\odot ODA$ 共点.

9. 设 P 与 P' 是四边形 $ABCD$ 的等角共轭点,求:证:

(1) 四圆 $\odot PAB$, $\odot P'BC$, $\odot PCD$, $\odot P'DA$ 交于一点 Q;

(2) 四圆 $\odot P'AB$, $\odot PBC$, $\odot P'CD$, $\odot PDA$ 交于一点 Q';

(3) Q 与 Q' 也是四边形 $ABCD$ 的等角共轭点.

10. 求证:有四圆共点,除此点外,每三圆尚有三个第二交点,这三个交点决定一个圆,这样的圆有四个,它们也共点.(提示:应用 §48 例题 50.)(注:后四圆可能都是直线(图 381),但应注意这时它们并不共点.)

11. 求证:四点两两连成四个三角形,另外一点对于这些三角形的四个垂足圆共点.(由一点向一三角形每边所在直线作垂线,通过三垂足的圆叫做该点对于三角形的垂足圆.)(注:当给定的四点共圆而另外的一点恰好在这圆上时,则所谓四个垂足圆实际是四条直线(西姆森线),然而它们并不共点,读者应该注意.)

12. 设 A', B', C' 分别是 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 在直线 l 上的射影, X, Y, Z 分别是 l 上任一点 P 在 BC, CA, AB 上的射影,求证:四圆 $\odot XYZ$, $\odot XB'C'$, $\odot YC'A'$, $\odot ZA'B'$ 共点.

13. 已知 $\triangle ABC$ 及一点 P,自 P 引线垂直于 PA, PB, PC 分别交 $\odot PBC$, $\odot PCA$, $\odot PAB$ 于 A', B', C',求证:

(1) P, A', B', C' 四点共圆;

(2) 四圆 $\odot ABC$, $\odot AB'C'$, $\odot BC'A'$, $\odot CA'B'$ 共点.

14. 在习题 14 第 15 题中,求证:

(1) 三圆 $\odot XBC$, $\odot YCA$, $\odot ZAB$ 共点;

(2) 四圆 $\odot ABC$, $\odot AYZ$, $\odot BZX$, $\odot CXY$ 共点.

15. P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 或延长线上一点.若有 X, Y, Z 三点,使得 $\triangle XCP$ 与 $\triangle YCA$, $\triangle XBP$ 与 $\triangle ZBA$ 各真正相似,求证:

(1) 四圆 $\odot ABC$, $\odot AYZ$, $\odot BZX$, $\odot CXY$ 共点;

(2) 四圆 $\odot XYZ$, $\odot XBC$, $\odot YCA$, $\odot ZAB$ 共点.

16. 自一三角形的两顶点分别任作一双等角线,求证:这四线所构成的完全

四边形的密克点落在三角形的外接圆上.

17.设一点 P 关于 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 的对称点为 X,Y,Z,求证:

(1) 四圆 $\odot XYZ,\odot XBC,\odot YCA,\odot ZAB$ 交于一点 Q;

(2) 四圆 $\odot ABC,\odot AYZ,\odot BZX,\odot CXY$ 共点;

(3) PQ 的中点在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.(提示:应用 §48 例题 51.)

18.在 $\triangle ABC$ 中,X 与 X',Y 与 Y',Z 与 Z' 分别是直线 BC,CA,AB 上的点.若 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle X'Y'Z'$ 真正相似,求证:X,Y,Z 及 X',Y',Z' 对于 $\triangle ABC$ 的密克点合而为一.

19.在一完全四角形中,依次除掉一对对边,然后通过余四边所成完全四边形的密克点及所除两边之一的两端作圆,如此共得六圆,试证它们共点.(提示:应用第 10 题.)(四点两两相连共得六条直线,这个图形叫做完全四角形.一完全四角形有四顶点和六边,不共顶点的两边称为对边,其交点称为对角点,凡三点;连三对角点所成的三角形,称为对角三角形.)

20.在一完全四角形中,求证下列八圆共点:

(1) 通过共顶点三边的中点所作的圆,凡四圆;

(2) 通过每对对边的中点及在这两边上的对角点所作的圆,凡三圆;

(3) 通过每对对边的中垂线的交点所作的圆.

21.在习题 14 第 12 题中,求证:所得直线与原四边形四边(所在直线)共五线交成的十个三角形,它们的外接圆共点.

22.设六边形 $AB'CA'BC'$ 内接于 $\odot O$,BC' 与 $B'C$,CA' 与 $C'A$,AB' 与 $A'B$ 分别交于 X,Y,Z,求证:

(1) 三圆 $\odot XBC,\odot YCA,\odot ZAB$ 交于一点 P,三圆 $\odot XB'C',\odot YC'A'$,$\odot ZA'B'$ 交于一点 P';

(2) P,P',X,Y,Z 五点共线;

(3) $OP = OP'$;

(4) 三圆 $\odot AYZ,\odot BZX,\odot CXY$ 交于 $\odot O$ 上一点 Q,三圆 $\odot A'YZ,\odot B'ZX$,$\odot C'XY$ 交于 $\odot O$ 上一点 Q';

(5) Q 对于 $\triangle AB'C',\triangle BC'A',\triangle CA'B'$ 的西姆森线共点,Q' 对于 $\triangle A'BC$,$\triangle B'CA,\triangle C'AB$ 的西姆森线也共点.

第九节　线段计算

§49　关于线段计算的证题术

几何图形里各线段的长度之间，往往存在着一定的关系，这类关系里有些是我们已经知道的，也可能还有我们未曾发现的. 在初等几何学中，这类关系可说是与"长度单位"的选择完全无关，因此叙述它们的时候，常常省去"长度"一词，而看做线段本身之间的关系. 由于它们有这种特性，所以对于同类的图形无不适合，而这也就是我们把它们叫做"公式"的缘故. 推求公式，难免经过若干演算步骤，这种过程，总称为线段计算.

关于几何里的计量关系，本已数见不鲜，现在我们在已有知识的基础上，进一步讨论一些比较复杂的公式，并且对于它们的计算途径，指示一些寻觅的方法.

证题术 29　公式中若有多项式，可设法改为独项式的形状然后证明.

例题 54　圆内接凸四边形两对对边乘积的和等于两对角线的乘积.

这命题叫做托勒密定理. 托勒密(Ptolemy)是公元2世纪时的希腊数学家兼星学家，他对于三角学有很多贡献.

题设　$ABCD$ 是圆内接凸四边形(图 383).

题断　$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

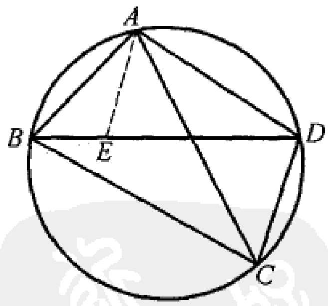


图 383

思索方法　这个等式果然成立的话，则在线段 BD 上必有一点 E，使得 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ 且 $AD \cdot BC = AC \cdot ED$. 凡属两个乘积相等，通常总是要变成比例式而后看有无相似形可以利用. 现在把方才那两个等式变形为

$$\left.\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{BE}{CD} \\ \frac{AD}{AC} &= \frac{ED}{BC} \end{aligned}\right\} \qquad ①$$

而来寻求适当的相似形. $ABCD$ 是圆内接凸四边形，所以

$$\left.\begin{aligned}\angle ABE &= \angle ACD\\ \angle ADE &= \angle ACB\end{aligned}\right\} \qquad ②$$

从①和②来看,就该$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$且$\triangle ADE \backsim \triangle ACB$.因而

$$\left.\begin{aligned}\angle BAE &= \angle CAD\\ \angle DAE &= \angle CAB\end{aligned}\right\} \qquad ③$$

(后一式实际是前一式的应有结果).由此可见打算证明本题,应该按③的关系在线段BD上取点E.

证明 在$\angle BAD$里面作$\angle BAE = \angle CAD$,设射线AE交BD于E,则$\angle DAE = \angle CAB$.从题设得知$\angle ABE = \angle ACD$,$\angle ADE = \angle ACB$.那么$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$,$\triangle ADE \backsim \triangle ACB$.由此

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD},\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

将这两个比例式变为

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE, AD \cdot BC = AC \cdot ED$$

然后左右各相加,便得

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + ED) = AC \cdot BD$$

例题 55 设R是$\triangle ABC$的外接圆半径,r是内切圆或某一旁切圆的半径,d是这两圆的圆心距,则

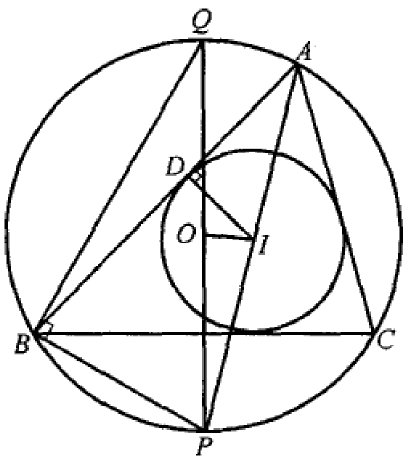
$$d^2 = R^2 \mp 2Rr \qquad ①$$

式中的负号用于内切圆的情形,正号用于旁切圆的情形.

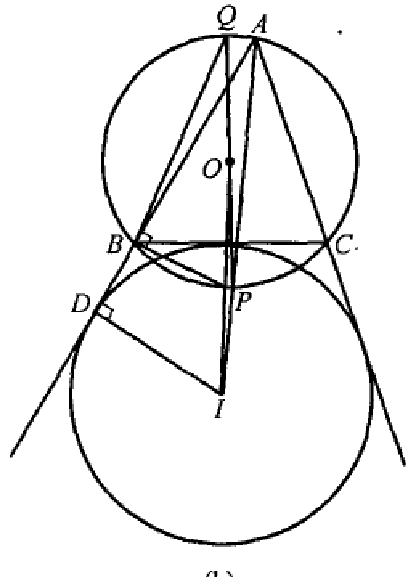
这命题普通叫做察柏尔(Chapple)定理;又有叫做欧拉定理的.

思索方法 假设O是$\triangle ABC$的外心,I是内心(图384(a))或是对着A的旁心(图384(b)).现在把①改写为$2Rr = |d^2 - R^2|$,那么它的右端就是点I对于$\odot O(R)$的幂的绝对值(§19定理127).因此若联结直线AI交$\odot O$于P,便该$2Rr = IA \cdot IP$.但我们早已知道$IP = PB$(复习题1第18题),于是又变成$2Rr = IA \cdot PB$.如果我们能证此式成立,问题就解决了.为着达到这个目的,可把该式变形为比例式$\frac{2R}{IA} = \frac{PB}{r}$,然后设法寻找适当的相似形.观察一下这个比例式,它很自然地启示我们想到作出$\odot O$的直径PQ和$\odot I$的半径ID,D是$\odot I$与AB的切点.这样一来,我们的目光便是转移到$\mathrm{Rt}\triangle PQB$与$\mathrm{Rt}\triangle IAD$的相似上面去.它们是不是真的相似呢?这由$\angle PQB = \angle IAD$立可决定.

证明 假定O是$\triangle ABC$的外心,I是内心或是对着A的旁心.要证明本题,



(a)



(b)

图 384

我们只对这种情形研究即是.

联结直线 AI 设交 $\odot O(R)$ 于 P,并作该圆的直径 PQ,且联结 BQ;又设 $\odot I(r)$ 切 AB 于 D,联结 ID.在 Rt△PQB 与 Rt△IAD 中,因 $\angle PQB = \angle IAD$,故它们彼此相似.从而 $\frac{PQ}{IA} = \frac{PB}{ID}$,即 $2Rr = IA \cdot PB$.但 $PB = IP$(复习题 1 第 18 题),那么

$$2Rr = IA \cdot IP \quad ②$$

我们已经知道 ② 的右端等于 $|d^2 - R^2|$,于是

$$2Rr = |d^2 - R^2| \quad ③$$

当 I 是 △ABC 的内心时,I 在 $\odot O$ 内部,因而 $d < R$,这时便是

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

若 I 是 △ABC 的旁心,则 I 在 $\odot O$ 外部,而 $d > R$,③ 应该是

$$d^2 = R^2 + 2Rr$$

注 本定理的公式,有时也写做

$$\frac{1}{d - R} - \frac{1}{d + R} = \mp \frac{1}{r}$$

证题术 30 若题中的计量关系比较复杂,可按题设条件并根据已知定理列出若干关系式,然后用代数方法诱导所要的结果.

例题 56 设简单四边形的四边为 a,b,c,d,两对角线为 e,f,面积为 S,则

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2} \quad ①$$

这式子叫做贝利契纳德(Bretschneider,1808—1878)公式.

证明 假定 $ABCD$ 是所设的四边形(图 385),命 $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f$.引 $AE \perp BD$ 于 E, $CF \perp BD$ 于 F,又引 $CP \perp AE$ 于 P.根据三角形的面积定理(§22 定理 138),得

$$S = | S_{\triangle ABD} \pm S_{\triangle CBD} | = \frac{1}{2}BD | AE \pm CF | = \frac{1}{2}f \cdot AP \quad ②$$

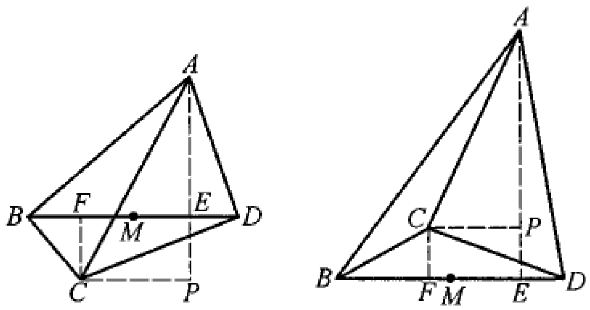


图 385

设 M 是 BD 的中点,并视 $\overline{BD}$ 为正,则

$$a^2 - d^2 = AB^2 - DA^2 = \overline{BE}^2 - \overline{ED}^2 = (\overline{BE} + \overline{ED})(\overline{BE} - \overline{ED}) = \overline{BD}(\overline{BM} + \overline{ME} - \overline{EM} - \overline{MD}) = 2f \cdot \overline{ME} \quad ③$$

$$b^2 - c^2 = BC^2 - CD^2 = \overline{BF}^2 - \overline{FD}^2 = (\overline{BF} + \overline{FD})(\overline{BF} - \overline{FD}) = \overline{BD}(\overline{BM} + \overline{MF} - \overline{FM} - \overline{MD}) = 2f \cdot \overline{MF} \quad ④$$

以 ③ 的首末端分别减去 ④ 的首末端,得

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2f(\overline{ME} - \overline{MF})$$

即

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2f \cdot \overline{FE}$$

由此

$$2ef + a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2f(e + \overline{FE}) \quad ⑤$$

$$2ef - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) = 2f(e - \overline{FE}) \quad ⑥$$

将 ⑤,⑥ 相乘,得

$$4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 4f^2(e^2 - FE^2) \quad ⑦$$

但

$$e^2 - FE^2 = AC^2 - CP^2 = AP^2$$

代入 ⑦,便是

$$4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 4f^2 \cdot AP^2 \qquad ⑧$$

比较 ② 和 ⑧，立知

$$16S^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$

以 16 除此式的两端，继之以开平方，即得 ①.

注　设令 $d = 0$，则 $e = c, f = a$，此时贝利契纳德公式即变为 § 22 定理 139 的秦九韶公式.

例题 57　今有望海岛（AB），立两表（CD）和（EF）齐高三丈（c），前后相去千步（d），令后表与前表参相直[①]（图 386）. 从前表却行一百二十三步（b），人目著地（G），取望岛峰（A），与表末（C）参合[②]；从后表却行一百二十七步（a），人目著地（H），取望岛峰（A），亦与表末（E）参合. 问岛高（AB）及去表（BD）各几何？

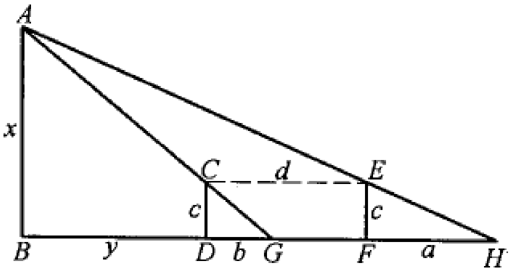


图 386

我国刘徽所著《海岛算经》里一共有九个问题，其中第一题就是这里所举的例题（其余八题见习题 18 第 28 ~ 35 题）. 刘徽注《九章算术》后，即在篇末列上这九个问题，并附有算法和答案，他称这种算法为“重差术”. 后人因其中第一题有望海岛之句，故又称“海岛算”. 这些问题都是讲测量的方法，可惜当时只就三角形的边上着想，没有研究角与边的关系，不然的话，三角学在我国也会很早就发生了.

解　以 x 表海岛的高（AB），y 表岛与前表的距离（BD）. 按题意知 $\mathrm{Rt}\triangle ABG \backsim \mathrm{Rt}\triangle CDG$，$\mathrm{Rt}\triangle ABH \backsim \mathrm{Rt}\triangle EFH$，由此

$$\frac{y + b}{b} = \frac{x}{c} \qquad ①$$

$$\frac{y + d + a}{a} = \frac{x}{c} \qquad ②$$

以 ① 减 ②，得方程

$$\frac{y}{b} - \frac{y + d}{a} = 0$$

解之，得

① 意谓 CD 介于 AB 与 EF 之间（此时三者同在一平面上）.

② 意谓 G, C, A 三点共线.

$$y = \frac{bd}{a-b}$$

将 y 值代入 ① 或 ②，皆得

$$x = \frac{cd}{a-b} + c$$

按古制，1 步 = 6 尺，1 里 = 300 步。代入计算，即得

$$x = 4 \text{ 里 } 55 \text{ 步}$$

$$y = 102 \text{ 里 } 150 \text{ 步}$$

故得答案：岛高 4 里 55 步，岛去前表 102 里 150 步。

例题 58 已知梯形 $ABCD$，它的大底是 $BC = b$，小底是 $AD = b'$，高是 h。今作一平行于两底的截线，把原梯形截去一面积为 S 的小梯形，求此梯形的截底[①]及高。

解 假设截线交原梯形的两腰 AB，DC 于 E，F。今以 x 表截去梯形的截底 EF，而以 y 表它的高。因截去梯形所包含原梯形的底可以是大底，也可以是小底，故分两种情形讨论如下：

(1) 截去的梯形是 $EBCF$（图 387(a)）。根据梯形的面积定理（§22 定理 138），这时有 $S = \frac{1}{2}y(b + x)$；因而

$$b + x = \frac{2S}{y} \qquad ①$$

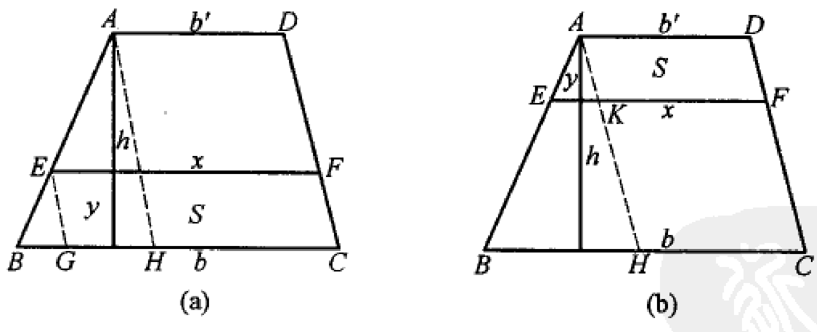


图 387

以 $(b - x)$ 同乘 ① 的两端，得

$$b^2 - x^2 = \frac{2S(b-x)}{y}$$

① 即落在截线上的底。

由此
$$x^2 = b^2 - \frac{2S(b-x)}{y} \qquad ②$$
作 EG,AH 均平行于 DC 而交 BC 于 G,H,则见
$$\frac{b-x}{y} = \frac{BG}{y} = \frac{BH}{h} = \frac{b-b'}{h}$$
以之代入 ② 后,再开平方,即得
$$x = \sqrt{b^2 - \frac{2S(b-b')}{h}} \qquad ③$$
求得了截底 x,由 ① 便可求得高
$$y = \frac{S}{\frac{1}{2}(b+x)} \qquad ④$$

(2) 截去的梯形是 $AEFD$(图 387(b)).同上有 $S = \frac{1}{2}y(x+b')$,即
$$x + b' = \frac{2S}{y} \qquad ⑤$$
两端乘以$(x-b')$,得 $x^2 - b'^2 = \frac{2S(x-b')}{y}$,即
$$x^2 = \frac{2S(x-b')}{y} + b'^2 \qquad ⑥$$
自 A 引线平行于 DC 而交 EF,BC 于 K,H,因知
$$\frac{x-b'}{y} = \frac{EK}{y} = \frac{BH}{h} = \frac{b-b'}{h}$$
若用$\frac{b-b'}{h}$代换 ⑥ 中的$\frac{x-b'}{y}$,且两端开平方,便得
$$x = \sqrt{\frac{2S(b-b')}{h} + b'^2} \qquad ⑦$$
截底 x 既经求得,则由 ⑤ 即可求得高
$$y = \frac{S}{\frac{1}{2}(x+b')} \qquad ⑧$$

在明程大位所著的《算法统宗》(1592 年) 里,载有《梯田截积歌》如下:

梯田截积细端详　倍积阔差乘最良①
却用原长为法则②　归除乘数实之行③
若截大头田积步④　大阔自乘减实当⑤
若截小头田积步⑥　小阔自乘并实旁⑦
俱用开方为截阔⑧　两广并来折半强⑨
折半数来为法则　法除截积便知长⑩

这歌词所描写的,正是上题要求的答案,所说一毫不爽.

习题 18

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, P, Q 是外接圆上的两点,但 P 与 A 分在 BC 的两侧, Q 与 A 同在 BC 的一侧,求证: $\dfrac{PA}{PB + PC} = \dfrac{QA}{|QB - QC|}$.

2. 设 P 是正方形 $ABCD$ 外接圆的 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点,求证

$$(PD - PB):(PC - PA):(PB + PD):(PA + PC) = PA : PB : PC : PD$$

3. 设 P 是正五边形 $ABCDE$ 外接圆的 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点,求证

$$PC + PE = PA + PB + PD$$

4. 求证:三角形外接圆上任一点至三边的距离与至对顶点的距离成反比例.

5. 设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上一点, X, Y, Z 分别是 P 在 BC, CA, AB 上的射影.若 P 与 A 分在 BC 的两侧,求证: $\dfrac{BC}{PX} = \dfrac{CA}{PY} + \dfrac{AB}{PZ}$.

6. 在圆内接凸四边形 $ABCD$ 中,每对对边的和分别为 m 及 n,两对角线的和为 l, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$, $\triangle ABC$ 的内切圆直径分别为 d_1, d_2, d_3, d_4,求证:

---

① 这里的"积"是指截去梯形的面积."阔"指原梯形的两底.
② "原长"指原梯形的高."法"就是除数.
③ "乘数"指第二句所乘得的数."实"在古算书中意义很广,这里是说把原长除乘数所得的商作为实.
④ 这句相当于上面解法中的第一种情形.
⑤ 这句说的是式 ③ 中根号下的式子.
⑥ 这句相当于上面解法中的第二种情形.
⑦ "并"即相加之意.这句说的是式 ⑦ 中根号下的式子.
⑧ "截阔"即截去梯形的截底.这句是说 ③ 和 ⑦ 两个式子的右端就是所求的截阔.
⑨ "两广"指截去梯形的两底.
⑩ "长"指截去梯形的高.这句是说 ④ 和 ⑧ 两个式子的右端就是所求的长.

$(l-m)(l-n)=d_1d_3+d_2d_4$.

7. 在圆内接凸六边形 $AB'CA'BC'$ 中,令 $BC'=a, B'C=a', CA'=b, C'A=b', AB'=c, A'B=c', AA'=a_1, BB'=b_1, CC'=c_1$. 求证

$$a_1b_1c_1=abc+a'b'c'+aa'a_1+bb'b_1+cc'c_1$$

8. 设 $ABCD$ 是圆内接凸四边形,求证: $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}$. (提示:应用习题 4 第 28 题.)

9. 设已知圆内接凸四边形的四边为 a,b,c,d,试求两对角线的长.

10. 设凸四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O(R)$,而 AE 是 $\odot O$ 中平行于 BD 的弦,求证:该四边形的面积为 $S=\dfrac{AC\cdot BD\cdot CE}{4R}$. (提示:应用习题 4 第 28 题.)

11. 设 a,b,c,d 表圆内接凸四边形的四边,s 表半周,S 表面积,求证

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\text{(婆罗摩笈多定理)}$$

12. 承上题,设 R 表外接圆的半径,求证

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

(提示:应用第 10 题.)

13. 求证:同时有外接圆和内切圆的四边形,它的面积等于四边连乘积的平方根.

14. 设 s 表圆外切凸四边形的半周,a,b,c,d 表各顶点至内切圆的切线长,r 表内切圆的半径,求证

$$r=\sqrt{\frac{abc+bcd+cda+dab}{s}}$$

15. 承上题,设 S 表四边形的面积,求证

$$S=\sqrt{s(abc+bcd+cda+dab)}$$

16. 在第 11 和第 15 题的关系式中,令 $d=0$,那么它们都变成什么公式?

17. 设 A,B,C 是共线的三点,P 是任一点,求证

$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

(这是复习题 1 第 30 题的推广,仍称斯图尔特定理.)

18. 设 a,b,c 分别是共线三点 A,B,C 对于某圆的幂,试证

$$a\cdot\overline{BC}+b\cdot\overline{CA}+c\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

19. 共线三点 A,B,C 与圆上一点 P 的连线交圆于 A',B',C',求证

$$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{PC'}\cdot\overline{AB}=0$$

(提示:应用上题.)

20. 设 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 或其延长线上一点,而$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=-\frac{m}{n}$,求证:

(1)$m\cdot AC^2+n\cdot AB^2=(m+n)AP^2+mPC^2+nPB^2$;

(2)$AP^2=\frac{m}{m+n}\cdot AC^2+\frac{n}{m+n}\cdot AB^2-\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot BC^2$.

21. 设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,P 是任一点,求证:

(1)$BC^2+3\cdot GA^2=CA^2+3\cdot GB^2=AB^2+3\cdot GC^2$;

(2)$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(BC^2+CA^2+AB^2)$;

(3)$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3\cdot GP^2$.

22. 设 AD,BE,CF 是 $\triangle ABC$ 的高,H 是垂心,求证:

(1) $\overline{AD}\cdot\overline{AH}+\overline{BE}\cdot\overline{BH}+\overline{CF}\cdot\overline{CH}=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$;

(2) $\overline{HA}\cdot\overline{HD}=\overline{HB}\cdot\overline{HE}=\overline{HC}\cdot\overline{HF}=4R^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$,

 式中的 a,b,c 表 $\triangle ABC$ 的三边,R 表外接圆半径.

23. 设 a,b,c 表三角形的三边,s 表半周,S 表面积,r 及 r_1,r_2,r_3 分别表内切圆及三个旁切圆的半径,求证:

(1)$r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=\frac{r_1r_2r_3}{r}=s^2$;

(2)$r(r_1+r_2+r_3)=s^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=bc+ca+ab-s^2$;

(3)$S=\sqrt{rr_1r_2r_3}$.

24. 设 a,b,c 表三角形的三边,R 表外接圆半径,r 表内切圆或旁切圆半径,O 表外心,H 表垂心,G 表重心,I 表内心或旁心,求证:

(1)$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$;

(2)$IH^2=4R^2+2r^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$;

(3)$IG^2=\frac{2}{3}r(r\mp 2R)+\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)$(式中的 $\mp$ 号,在 I 为内心时取负号,I 为旁心时取正号.).

25. 矩形 $ABCD$ 的边 $AD=\frac{AB}{\sqrt{2}}$.以 AB 为直径在矩形之外作半圆,在半圆上任取一点 P,联结 PC,PD 交 AB 于 E,F,求证:$AE^2+BF^2=AB^2$.(费马定理)

26. 已知梯形的两底为 b 及 b'.今作一截线平行于两底且平分梯形的面积,

求截线被两腰所截的线段之长及其与两底的距离之比.

27.已知梯形的两底为 b 及 b',高为 h.今作两截线同平行于两底且三等分梯形的面积,求两截线的距离及其被两腰所截的线段之长.

28.今有望松(AB)生山上,不知高下(图 388).立两表(CD 和 EF)齐高二丈(c),前后相去五十步(d),今后表与前表参相直.从前表却行七步四尺(b),薄地(G)遥望松末(A),与表端(C)参合;又望松本(B),入表(于 K)二尺八寸($CK = e$).复从后表却行八步五尺(a),薄地(H)遥望松末(A),亦与表端(E)参合.问松高及山去表(前表)各几何?(答案:松高为$\frac{ed}{a-b}+e=12.28$ 丈,山去表为$\frac{bd}{a-b}=1$ 里 $28\frac{4}{7}$ 步.)

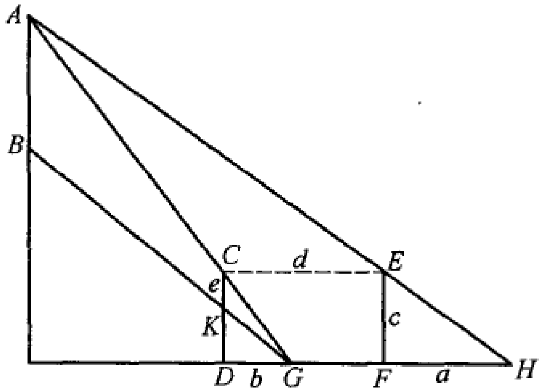


图 388

29.今有南望方邑($ABCD$),不知大小(图 389).立两表(P 和 Q)东西去六丈(d),齐人目以索(PQ)连之,今东表(P)与邑东南隅(C)及东北隅(B)参相直.当东表之北却行五步($PE=b$),遥望邑西北隅(A),入索东端(PG)二丈二尺六寸半(c);又却北行去表十三步二尺($PF=a$),遥望邑西北隅(A),适与西表(Q)相参合.问邑方(AB)及邑去表(BP)各几何?(答案:邑方为$\frac{cd(a-b)}{ac-bd}=$ 3 里$43\frac{3}{4}$ 步,邑去表为$\frac{ab(d-c)}{ac-bd}=4$ 里 45 步.)

30.今有望深谷(A),偃矩岸上(图 390).令勾(CD)高六尺(b),从勾端(C)望谷底(A),入下股(DE)九尺一寸(c_1).又设重矩于上①,其矩间相去三丈(d).更从勾端(C')望谷底(A),入上股($D'F$)八尺五寸(c_2).问谷深(DB)几何?(答案:谷深为$\frac{c_2d}{c_1-c_2}-b=41.9$ 丈.)

① 意谓又置一矩于上方,而前后两矩勾高相同,且使两勾同在垂直于地面的一直线上.

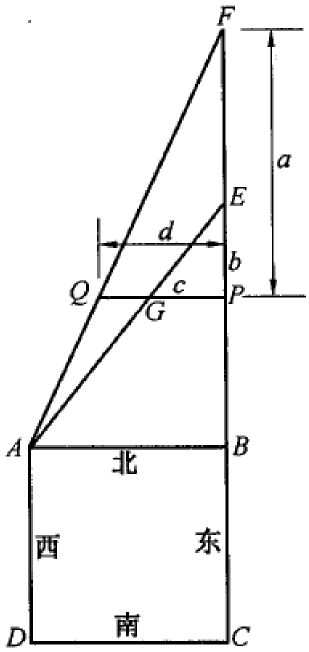


图 389

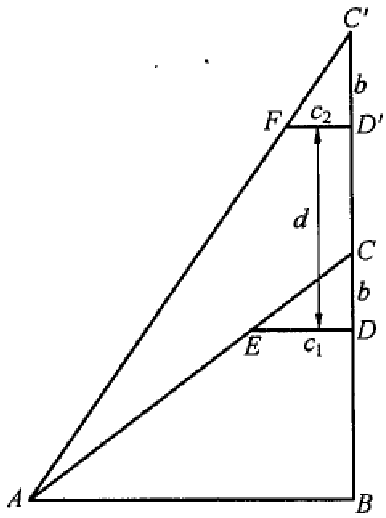


图 390

31. 今有登山望楼(AB),楼在平地(图 391). 偃矩山上,令勾(CD)高六尺(b),从勾端(C)斜望楼足(B),入下股(DE)一丈二尺(c_1). 又设重矩于上,令其间相去三丈(d). 更从勾端(C')斜望楼足(B),入上股($D'F$)一丈一尺四寸(c_2). 又立小表于入股之会(F),复从勾端(C')斜望楼岑端(A),入小表(于 G)

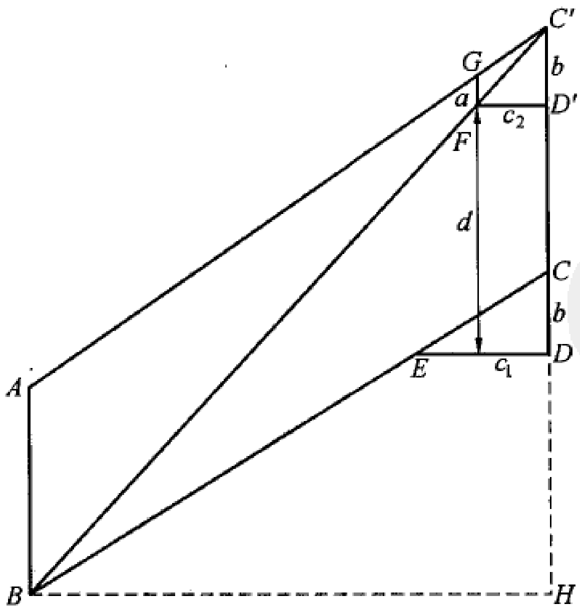


图 391

八寸($FG=a$).问楼高几何?(答案:楼高为$\frac{ac_1d}{b(c_1-c_2)}=8$丈.)

32.今有东南望波口(AB),立两表(P 和 Q)南北相去九丈(d),以索薄地连之(图 392).当北表(P)之西却行去表六丈(b);薄地(C)遥望波口南岸(A),入索北端(于 E)四丈二寸($PE=c_1$);以望北岸(B),入前所望表里(于 F)一丈二尺($EF=c_2$).又却后行去表十三丈五尺(a),薄地(D)遥望波口南岸(A),与南表(Q)参合,问波口广几何?(答案:波口广为$\frac{c_2d(a-b)}{ac_1-bd}=1$里 200 步.)

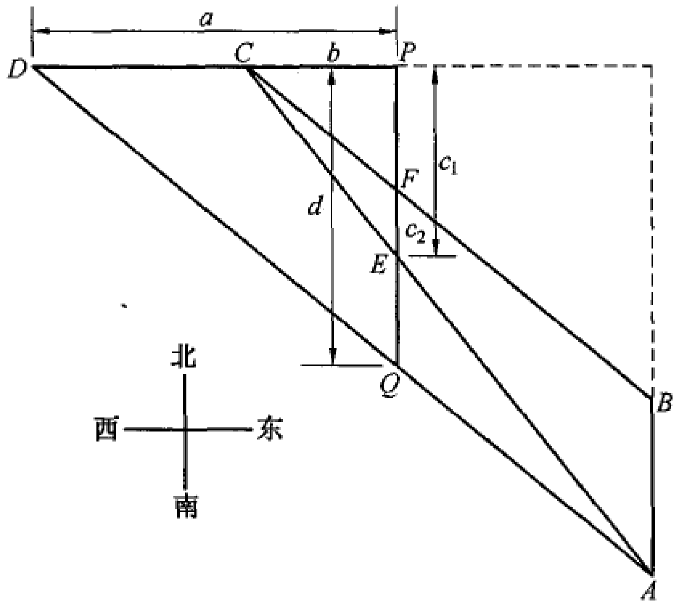


图 392

33.今有望清渊,渊下有白石(B).偃矩岸上(图 393),令勾(CD)高三尺(b),斜望水岸(A),入下股(DE)四尺五寸(c_1);望白石(B),入下股(DF)二尺四寸(c_2).又设重矩于上,其间相去四尺(d).更从勾端(C')斜望水岸(A),入上股($D'G$)四尺(c_3);以望白石(B),入上股($D'H$)二尺二寸(c_4).问水深几何?(答案:水深为$\frac{d[c_4(c_1-c_3)-c_3(c_2-c_4)]}{(c_1-c_3)(c_2-c_4)}=1.2$丈.)

34.今有登山望津(AB),津在山南(图 394).偃矩山上,令勾(CD)高一丈二尺(b),从勾端(C)斜望津南岸(A),入下股(DE)二丈三尺一寸(c_1);又望津北岸(B),入前望股里(于 F)一丈八寸($EF=c_2$).更登高岩:北却行二十二步($DG=c_3$),上登五十一步($GD'=d$).偃矩山上,更从勾端(C')斜望津南岸(A),入上股($D'H$)二丈二尺(c_4).问津广几何?(答案:津广为$\frac{c_2(c_4d-bc_3)}{b(c_1-c_4)}=$

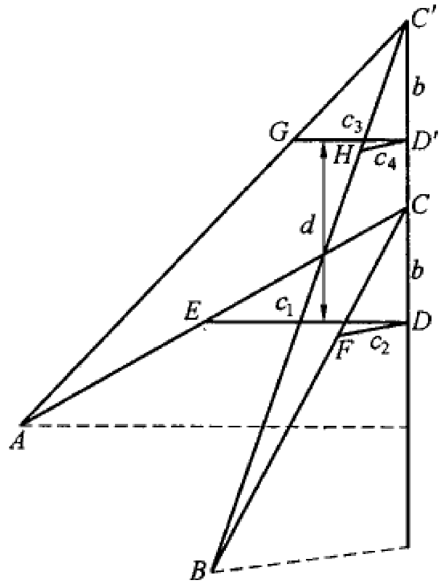


图 393

2 里 102 步.)

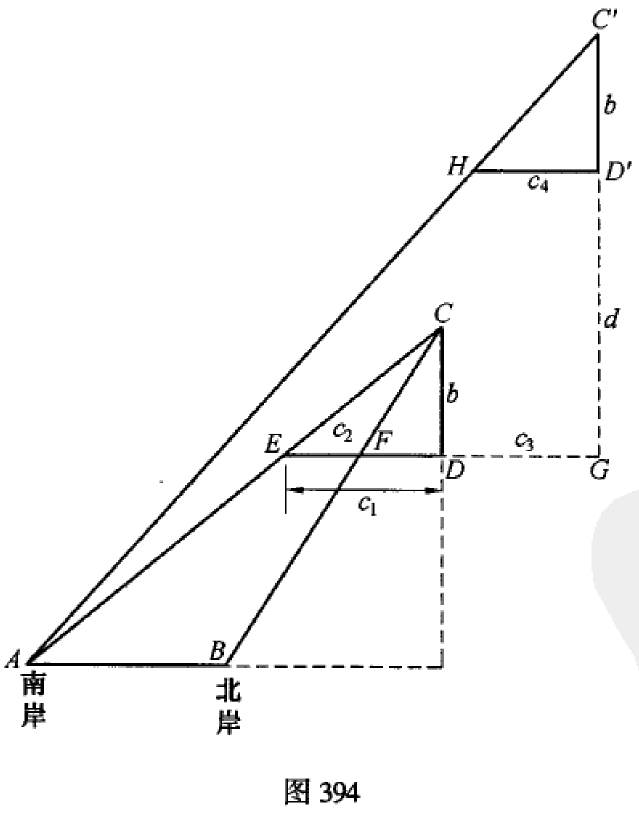


图 394

35. 今有登山临邑($ABA'B'$),邑在山南(图 395). 偃矩山上,令勾(CD) 高三尺五寸(b),令勾端(C) 与邑东南隅(B) 及东北隅(A) 参相直. 从勾端(C) 遥望

东北隅(A),入下股(DE)一丈二尺(c_1);又施横勾于入股之会(E),从立勾端(C)望西北隅(B'),入横勾(EG)五尺(a);望东南隅(B),入下股(DF)一丈八尺(c_2).又设重矩于上,令矩间相去四丈(d).更从立勾端(C')望东南隅(B),入上股($D'H$)一丈七尺五寸(c_3).问邑广长各几何?(答案:南北长为$\dfrac{c_3d(c_2-c_1)}{b(c_2-c_3)}$ = 1里100步,东西广为$\dfrac{ac_3d}{b(c_2-c_3)}$ = 1里$33\dfrac{1}{3}$步.)

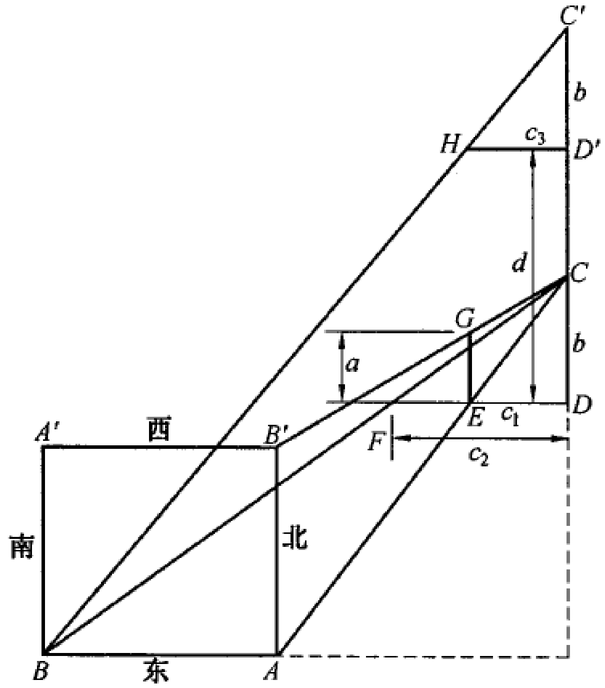


图 395

复习题 3

1. 在 §44 例题 39 中,求证:

(1)$AA' = BB' = CC'$;

(2) 所作三个正三角形的中心是一个正三角形的顶点.

2. 试证上题对于习题 15 第 1 题来说也成立.

3. 在 $\triangle ABC$ 中,E,F 分别是射线 CA,BA 上的点.若 $\angle CBE = \angle BCF = \dfrac{1}{2}\angle BAC$,求证:$CE = BF$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中,P 是 $\angle BAC$ 的平分线上任一点.设 BE 平行于 PC 而交 AC 于 E,CF 平行于 PB 而交 AB 于 F,求证:$CE = BF$.

5. 甲乙两圆交于 A,B 两点,且乙圆的中心在甲圆上.自甲圆上一点向乙圆

引切线,切点是 C,D,求证:AB 平分 CD.

6.求证:若两三角形有两对对应边分别相等,而夹角的平分线亦相等,则两三角形全等.

7.求证:若两三角形的第一对对应角相等,第二对对应角的夹边成比例,则第三对对应角或相等或互补.

8.求证:若两三角形的第一对对应角相等,第二对对应角互补,则第三对对应角的夹边成比例.

9.设 AD 是 $\triangle ABC$ 的高线,P 是 AD 上任一点.联结 BP,CP 分别交 AC,AB 于 E,F,求证:$\angle ADE$ 与 $\angle ADF$ 或相等或互补.

10.试用托勒密定理(§49 例题 54)证明 §37 的例题 16.

11.求证:圆内接凸四边形被一条对角线所分两三角形的内切圆半径之和,等于它被另一条对角线所分两三角形的内切圆半径之和.

12.求证:三角形三个旁切圆的半径和等于内切圆半径与 4 倍外接圆半径的和.

13.求证:从圆的内部挖去一个内接三角形,造成三个弓形,这三个弓形的高之和等于圆的直径与三角形内切圆半径之差.(弓形的弧的中点至弦的垂线,叫做弓形的高.)

14.求证:非钝角三角形的外心至三边的距离和等于外接圆与内切圆的半径和.

15.非钝角三角形的垂心至三顶点的距离和等于外接圆与内切圆的直径和.

16.在半圆形 BAC 的弧上取一点 A,自 A 向直径 BC 引垂线把半圆形分为两个图形,试证:这两个图形的内切圆之半径和,等于 $\triangle ABC$ 的内切圆直径.(提示:两个图形的内切圆切半圆及所引垂线的切点的连线分别通过 B,C 两点.)

17.设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,I 是内心,而内切圆的直径 PQ 垂直于 OI,求证:$\triangle OPQ$ 的周长等于 $\triangle ABC$ 的外接圆直径.

18.设分正方形的每边为四等份,而以两头两段为直径分别作圆,求证:所作八圆均外切于正方形的内切圆.

19.设分正六边形的每边为四等份,而以中间两段为直径分别作圆,求证:所作 12 圆均内切于正六边形的外接圆.

20.设 O 是线段 AB 的中点,C,D 是三等分点:$AC = CD = DB$.以 AC,CO,OD,DB 为直径分别作圆,又过 A,B 作 AB 的垂线,求证:所作四圆、两线同切于两圆.

21.求证:三角形的九点圆内切于内切圆而外切于三旁切圆.(提示:应用§49例题55及习题18第24题.)(本题称费尔巴哈定理,是费尔巴哈(Feuerbach,1800—1834)于1822年首先发现.它是三角形的著名定理之一,证法很多,且有很多推广情形.)

22.以三角形的内心及三旁心为心分别作圆,若在每边(所在直线)上所截的弦分别等于其圆心至外心的距离之2倍,求证:

(1) 所作四圆均内切于九点圆;

(2) 所作四圆的半径和等于外接圆半径的8倍.

23.求证:一三角形中,高线越长,它的中点离垂心越远.

24.求证:一三角形中,平分角线越长,它的中点离内心越远.(提示:应用习题12第17题.)

25.求证:与三角形三边所在直线都相交的圆,以内切圆为最小.(提示:应用复习题1第45题.)

26.求证:三角形三高的连乘积,不大于三旁切圆半径的连乘积.

27.设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,PQ 是这三角形的内切圆的任一直径,求证:$\triangle OPQ$ 的周长不大于 $\triangle ABC$ 的外接圆直径.

28.设 a,b,c 表三角形的三边,R 表外接圆半径,求证

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{R}$$

29.A,B,C,D 是任意四点,求证:$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$.

30.求证:若凸四边形每对对边乘积的和等于两对角线的乘积,则这四边形必有外接圆.

31.求证:若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 镜像相似,则自 A,B,C 分别引 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 的平分线必共点,且这点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

32.承上题,自 A,B,C 分别引 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 的垂线也共点,这点仍在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

33.设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,直线 l,m,n 分别通过 A,B,C 且互相平行,试证:AH,BH,CH 分别关于 l,m,n 的对称线共点,这点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

34.求证:若一点在三角形三边所在直线上的射影共线,则该点必在三角形的外接圆上.

35.设 P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点.自 P 引三线分别垂直于 BC,CA,AB,而交外接圆于 A',B',C',求证:AA',BB',CC' 均平行于 P 对于 $\triangle ABC$ 的西姆森线.

36. 在上题中,若自 P 所引三直线分别平行于 BC, CA, AB,求证:AA', BB', CC' 均垂直于 P 对于 $\triangle ABC$ 的西姆森线.

37. 求证:圆上任一点对于内接三角形的西姆森线,必平分该点至此三角形的垂心的联结线,且分点在三角形的九点圆上.

38. 求证:三角形的外接圆上任一点关于三边的对称点共线,这线通过三角形的垂心.

39. 一直线通过三角形的垂心,求证:它关于三边的对称线必会于外接圆上一点,这点对于三角形的西姆森线平行于所设直线.

40. 以三角形的顶点为心分别作圆,使交于外接圆上一点,求证:所作三圆的其他三交点与三角形的垂心共线.

41. 三圆共点且其他三交点共线,求证:三圆的公共交点与三圆心共圆.

42. 求证:完全四边形的密克点在四边上的射影共线.(这直线叫做完全四边形的西姆森线.)

43. 求证:完全四边形各边所成四个三角形的垂心同在一条平行于西姆森线的直线上.(提示:应用第 37 题.)(这直线叫做完全四边形的垂心线.)

44. 求证:圆上一点对于内接三角形的西姆森线夹于该三角形任两边(所在直线)间的线段,等于第三边在该西姆森线上的射影.

45. 求证:完全四边形的牛顿线垂直于西姆森线及垂心线.(提示:应用上题.)

46. 圆上四点两两连成四个三角形,求证:圆上任一点在它对于该四个三角形的西姆森线上的射影共线.

47. 在一圆内接完全四角形中,求证下列 17 条直线、四个圆交于一点;

(1) 每顶点至另三顶点所连成三角形的垂心的连线,凡四线;

(2) 每顶点对于另三顶点所连成三角形的西姆森线,凡四线;

(3) 自每边中点所引对边的垂线,凡六线;

(4) 自每对角点所引过此点两边的中点连线的垂线,凡三线;

(5) 每三顶点所连成三角形的九点圆,凡四圆.

48. 求证:圆上四点,任两点在另两点的连线上的射影及另两点在此两点的连线上的射影凡四点共圆,而且这样所得的三圆是同心的.

49. 求证:圆上两点对于同一内接三角形的西姆森线的交角,分别等于该两点连成的弦所对的圆周角.

50. 求证:圆的任一直径的两端对于同一内接三角形的西姆森线互相垂直,垂足在三角形的九点圆上.

51. 求证：圆上三点对于同一内接三角形的西姆森线交成的三角形，与该三点连成的三角形相似.

52. 求证：圆上任一点对于两个固定的内接三角形的西姆森线，它们的交角大小不因该点的位置而改变.

53. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，M,N 是外接圆上两点，P 是这两点的西姆森线的交点，K 是 H 关于 P 的对称点，求证：$\triangle KMN$ 的垂心 L 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，且 L 对于 $\triangle ABC$ 的西姆森线垂直于 MN 而通过点 P.

54. M,N 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上两点，自 M 引线垂直于 N 的西姆森线，又自 N 引线垂直于 M 的西姆森线，求证：所引两线交于圆上一点 L，且 L 的西姆森线垂直于 MN 而与前两西姆森线共点.

55. L 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点，MN 是垂直于 L 的西姆森线的一弦，求证：L,M,N 三点的西姆森线共点.

56. 两三角形有共同的外接圆，求证：此形三顶点对于另一形的三西姆森线的交点及另一形三顶点对于此形的三西姆森线的交点凡六点共圆，圆心是两三角形的垂心联结线的中点.

57. 两三角形有共同的外接圆，且其中一形的三顶点对于另一形的三西姆森线交于一点，求证：另一形三顶点对于此形的三西姆森线亦交于同一点，这点是两三角形的垂心联结线的中点.

58. 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 透视且对应边互相垂直，P 是它们的透视中心，p 是它们的透视轴. 求证：

(1) P 是两三角形的外接圆交点之一；

(2) 直径分别为 AA'，BB'，CC' 的圆交于一点 Q，这点是两外接圆的另一交点；

(3) P 对于两三角形的西姆森线同平行于 p；

(4) Q 对于两三角形的西姆森线与 p 共点；

(5) p 平分两三角形的垂心联结线.

59. 在 §48 例题 49 中，设自 A,B,C 各引一直线 a,b,c 分别交 $\odot AYZ$，$\odot BZX$，$\odot CXY$ 于 A',B',C'，求证：

(1) 当 a,b,c 交于一点 P 时，A',B',C',O,P 五点共圆；

(2) 当 $a\parallel b\parallel c$ 时，A',B',C',O 四点共线.

60. 已知 $\triangle ABC$. 设直线 l 交 BC,CA,AB 于 X,Y,Z，求证：

(1) 在 A,B,C 分别引 $\odot AYZ$，$\odot BZX$，$\odot CXY$ 的切线交于 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点，这点对于 $\triangle ABC$ 的西姆森线与 l 垂直；

(2) 自 A,B,C 分别作 $\odot AYZ,\odot BZX,\odot CXY$ 的直径(所在直线)也交于 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点,这点对于 $\triangle ABC$ 的西姆森线与 l 平行.

61. 在正三角形 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 或其延长线上各任取一点 X,Y,Z,求证:$\triangle AYZ,\triangle BZX,\triangle CXY$ 的欧拉线所交成的三角形全等于 $\triangle ABC$.(注:万一 $\triangle AYZ$ 是正三角形,则以过它的中心而平行于 BC 的直线来代替它的欧拉线;余仿此.)

62. 设 O 是正三角形 $\triangle ABC$ 的中心. 在直线 OA,OB,OC 上除点 O 外各任取一点 X,Y,Z,求证:$\triangle OYZ,\triangle OZX,\triangle OXY$ 的欧拉线共点.(注:万一 $\triangle OYZ$ 是正三角形,则以过它的中心而垂直于 BC 的直线来代替它的欧拉线;余仿此.)

63. 圆上四点两两连成四个三角形,非圆上任一点关于这四个三角形各得一等角共轭点,试证:所得四点共圆或共线.(提示:应用 §48 定理 151.)

64. 作圆内接四边形两对角线的等角线,求证:

(1) 所作四线同切于一圆;

(2) 每边与自其两端所作的线所构成的三角形,它们的垂心凡四点共线.

(提示:这线通过两对角线的交点,应用习题 14 第 8 题.)

65. 以一垂心组中任两点的联结线为直径作圆,求证:在此圆中,凡垂直于该直径的弦的两端点,都是垂心组的垂三角形的等角共轭点.

66. 以三角形的内心及三旁心中任两点的联结线为直径作圆,求证:在此圆中,凡垂直于该直径的弦的两端点,都是三角形的等角共轭点.

67. 以一垂心组中每两点的联结线为一对角线分别作正方形,这样所作六个正方形的顶点,除垂心组的四点外,余凡 12 点,求证:

(1) 它们是垂心组的垂三角形的六双等角共轭点;

(2) 它们分布在三双垂直线上,每线上有四点.

68. 以一垂心组中每两点的联结线分别为一对角线分别作矩形,使它们的边分别平行于互相垂直的两条定直线,求证:所作六个矩形的另一对角线(所在直线)交于垂心组的九点圆上一点.(垂心组中每三点所连成的三角形有共同的九点圆,这圆也叫做垂心组的九点圆.)

69. 求证:三角形的外心至各顶点联结线的中点所连成的三角形,与原三角形的中点三角形有共同的九点圆.(三角形三边中点所连成的三角形,叫做原三角形的中点三角形.)

70. 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 各作一直线使交于一点 P 而交外接圆于 A',B',C',又在外接圆上任取一点 Q,求证:QA' 与 BC,QB' 与 CA,QC' 与 AB 的交点 X,Y,Z 共线.(提示:这线通过点 P,应用习题 14 第 18 题.)

71. O 与 O' 是 $\triangle ABC$ 的等角共轭点，X,Y,Z 及 X',Y',Z' 分别是 O 及 O' 在 BC,CA,AB 上的射影. 设 YZ' 与 $Y'Z$ 交于 P，ZX' 与 $Z'X$ 交于 Q，XY' 与 $X'Y$ 交于 R，求证：O,O',P,Q,R 五点共线.（提示：应用习题 14 第 8 题.）

72. 求证：自圆内接六边形相间的三顶点作邻接边的垂线，设垂直对边者相交，则三交点共线. 仿此由其余三顶点作之，亦得类似的一线. 这两线同垂直于六边形的帕斯卡线.（提示：应用习题 17 第 22 题.）

73. P 及 P' 两点在 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 所在直线上的射影为 X,Y,Z 及 X',Y',Z'，求证：P 与 P' 是 $\triangle ABC$ 的等角共轭点的必要且充分之条件为 $\overline{PX}\cdot\overline{P'X'}=\overline{PY}\cdot\overline{P'Y'}=\overline{PZ}\cdot\overline{P'Z'}$.

74. 求证：三角形的陪位重心至三边的距离与三边成比例.

75. 求证：三角形的陪位重心至三边的距离的平方和，小于其他点至三边的距离的平方和.（提示：应用恒等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$.）

76. 求证：三角形的陪位重心是它的垂足三角形的重心.（提示：把三角形的一中线延长 1 倍或应用习题 18 第 21 题.）（自一点向已知三角形每边所在直线作垂线，则三垂足连成的三角形叫做该点对于已知三角形的垂足三角形.）

77. 求证：三角形的陪位中线交外接圆于三点，这三点连成的三角形与原三角形有共同的陪位重心.

78. 求证：三角形的三乘比圆在三边上所截的弦与三边的立方成比例.（提示：应用第 74 题.）

79. 求证：三角形的余弦圆在三边上所截的弦与对角的余弦成比例.

80. 求证：三角形的三乘比圆通过余弦圆一直径的两端.

81. 求证：三角形的三乘比圆心是外心与陪位重心联结线的中点.

82. 求证：三角形的正布罗卡尔点至三顶点的距离之连乘积，等于负布罗卡尔点至三顶点的距离之连乘积.

83. 求证：三角形的正布罗卡尔点至三边的距离之连乘积，等于负布罗卡尔点至三边距离之连乘积.

84. 求证：完全四边形的密克点至每双对顶点的距离之乘积彼此均相等.

85. 设 X,Y,Z 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点 P 在 BC,CA,AB 上的射影，求证

$$\frac{PX\cdot YZ}{BC}=\frac{PY\cdot ZX}{CA}=\frac{PZ\cdot XY}{AB}$$

86. 求证：正三角形外接圆上任一点至三边（所在直线）的距离之平方和是一常数.

87. 设 P 是三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点，求证

$$PA^4 + PB^4 + PC^4 = 2(PB^2 \cdot PC^2 + PC^2 \cdot PA^2 + PA^2 \cdot PB^2) = 2 \cdot AB^4$$

88. 设正三角形的内切圆上任一点至三边的距离为 x, y, z，正三角形的边长为 a，求证：$x^2 + y^2 + z^2 = 2(yz + zx + xy) = \frac{3}{8}a^2$.

89. 以等腰三角形 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点为心作圆使切于两腰，设这圆的任一条切线交 AB, AC 于 E, F，求证：$BE \cdot CF = \frac{1}{4}BC^2$.

90. 定圆内定直径 AB 上有定点 P. 过 P 任作一弦 CD，联结 BC, BD 交在点 A 的切线于 E, F，求证：$AE \cdot AF$ 是一常数.（提示：过 P 作 AB 的垂线.）

91. 通过 $\square ABCD$ 的顶点 A 任作一圆，设这圆交直线 AB, AC, AD 于 B', C', D'，求证：$\overline{AB} \cdot \overline{AB'} + \overline{AD} \cdot \overline{AD'} = \overline{AC} \cdot \overline{AC'}$.

92. 自 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 引互相平行的直线分别交 BC, CA, AB 于 X, Y, Z，求证：$\overline{BY} \cdot \overline{CZ} + \overline{CZ} \cdot \overline{AX} + \overline{AX} \cdot \overline{BY} = 0$.

93. 自 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引两等角线交 BC 于 X, Y，求证：$\frac{\overline{BX} \cdot \overline{BY}}{\overline{CX} \cdot \overline{CY}} = \frac{AB^2}{AC^2}$（提示：作 $\odot AXY$.）

94. 已知 $\triangle ABC$. 通过一点 O 引直线 $x \parallel BC, y \parallel CA, z \parallel AB$，设 x 交 AB, AC 于 X, X'，y 交 BC, CA 于 Y, Y'，z 交 CA, CB 于 Z, Z'，求证：$\frac{\overline{XX'}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{YY'}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{ZZ'}}{\overline{AB}} = 2$.（提示：应用复习题 1 第 44 题.）

95. 求证：若 $\odot O(R)$ 与 $\odot I(r)$ 的半径与圆心距适合关系式 $OI^2 = R^2 - 2Rr$，则有无限多个三角形以 $\odot O$ 为外接圆而以 $\odot I$ 为内切圆.

96. 求证：若 $\odot O(R)$ 与 $\odot I(r)$ 的半径与圆心距适合关系式 $OI^2 = R^2 + 2Rr$，而且 $\odot O$ 至少有一点在 $\odot I$ 的外部①，则有无限多个三角形以 $\odot O$ 为外接圆而以 $\odot I$ 为旁切圆.

97. 有两个正交的等圆 $\odot O$ 和 $\odot O'$，其中 $\odot O'$ 交连心线 OO' 于 P, Q，而设 P 介于 O, Q 之间. 今分别以 P, Q 为心作圆，使同通过点 O，试证：

(1) 有无限多个三角形，以 $\odot O$ 为外接圆，而以 $\odot P$ 为内切圆；

(2) 有无限多个三角形，以 $\odot O$ 为外接圆，而以 $\odot Q$ 为旁切圆.

（当两圆相交且自一交点所作两圆的半径互相垂直时，我们说这样的两圆

---

① 如果不加这个限制，那么实有可能使得 $\odot O$ 完全在 $\odot I$ 的内部. 例如，当 $r = 12R$ 且 $OI = 5R$ 时的情形就是这样.

是正交的.)

98. 将相交两圆的公弦双方延长抵于外公切线而止,求证:所得线段的平方等于公弦与一外公切线的平方和.

99. 求证:过圆内定点所作互相垂直的两弦,它们的平方和是一个常数.

100. 有两同心圆.设 PA 是内圆的弦,BC 是外圆中过 P 且垂直于 PA 的弦,求证:$PA^2+PB^2+PC^2$ 是一个常数.

101. 求证:四边形的两对角线之平方和 2 倍于两双对边的中点联结线的平方和.

102. 求证:四边形各边的平方和等于两对角线的平方和加上两对角线的中点联结线的平方之 4 倍.

103. 求证:若四边形各边的平方和等于两对角线的平方和,则这四边形必是平行四边形.

104. 求证:完全四角形各边的平方和 4 倍于三对对边的中点联结线之平方和.

105. 给定 $\triangle ABC$.设直线 $x\perp BC$ 于 X,$y\perp CA$ 于 Y,$z\perp AB$ 于 Z,求证:x,y,z 三线共点的必要且充分的条件为$\overline{XL}\cdot\overline{BC}+\overline{YM}\cdot\overline{CA}+\overline{ZN}\cdot\overline{AB}=0$.(式中的 L,M,N 分别是三边 BC,CA,AB 的中点.)

106. 设一线段 PP' 在 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 所在直线上的射影为 XX',YY',ZZ',求证:$\overline{XX'}\cdot\overline{BC}+\overline{YY'}\cdot\overline{CA}+\overline{ZZ'}\cdot\overline{AB}=0$.

107. 求证:完全四边形任一对角线必被另两对角线调和分割.(所谓一线段被两线调和分割,意指线段的两端与该两线交线段所在直线所得两交点组成调和点列.)

108. 设一直线交 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 各边 $A_1A_2,A_2A_3,\cdots,A_nA_1$ 或其延长线于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$,求证:$\dfrac{\overline{P_1A_1}}{\overline{P_1A_2}}\cdot\dfrac{\overline{P_2A_2}}{\overline{P_2A_3}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\overline{P_nA_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$

109. 求证:若四边形有内切圆或旁切圆,则对边的切点连线与两对角线共点或互相平行.

110. 求证:圆上四点两两相连组成一完全四角形,又过每点作圆的切线交成一完全四边形,这两形必有共同的对角三角形.(本题称马克劳林(Maclaurin,1698—1746)定理,尚可推广到圆锥曲线的情形.)

111. 已知 $\triangle ABC$.一圆切 CA,AB 于 Y,Z,自 B,C 另作这圆的切线设交于 X,求证:AX,BY,CZ 三线共点或互相平行.

112. 四边形 $ABCD$ 有内切圆或旁切圆 $\odot O$,求证:$\triangle OAB$,$\triangle OBC$,$\triangle OCD$,

$\triangle ODA$ 的垂心共线.(提示:这线通过两对角线的交点.)

113.设四边形 $ABCD$ 有内切圆或旁切圆,E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 上的切点.今在 AC 上取两点 A',C',在 BD 上取两点 B',D',$A'B' \parallel EG \parallel C'D'$ 且 $A'D' \parallel FH$,求证:$B'C' \parallel FH$,且 $A'B',C'D'$ 交 AB,CD 所得四交点及 $A'D',B'C'$ 交 AD,BC 所得四交点凡八点共圆.

114.求证:设六边形各边(所在直线)同切于一圆,则三对对顶点的连线共点或互相平行.(本题称布里昂雄定理,尚可推广到圆锥曲线的情形,系布里昂雄(Brianchon,1783—1864)于 1806 年所发现.这定理与帕斯卡定理(习题 14 第 18 题)是有名的"对偶"命题.)

第五章 轨 迹

第一节 基本知识

§ 50 类或集的概念

类是我们在普通语言中最常用到的一个基本概念.我们常常把在某方面具有同样属性的许多东西看成一个总体,而称它为某某类.如"人类"、"植物"、"金属"、"非金属"等都是类.

一个类所包含的那些东西,叫做这类的类员.譬如说,墨子就是人类的类员,铁就是金属的类员.类员和类的从属关系,通常用记号"$\in$"或"$\ni$"来表示.例如,m 是类M 的类员,可记如"$m \in M$"或"$M \ni m$".意即"m 属于M"或"M 含有 m".

两类的类员未必完全不相同:若甲类的类员都是乙类的类员,甲类便叫做乙类的属类.例如,"中国人"是"人类"的属类,"勾股形"是"三角形"的属类.M 是类 N 的属类,通常记如"$M \subseteq N$"或"$N \supseteq M$".

假如甲类是乙类的属类,乙类也是甲类的属类,那么两类的类员实际完全相同,这时我们称这两类是全同的.例如,"等边三角形"与"等角三角形"就是全同的类.M 与 N 两类全同,通常记如"$M = N$"或"$N = M$".

类多半是在普通语言里说的,在数学上我们常常使用类的同义语"集",即把类叫做集或集合.例如,说"自然数集"、"一条直线上的点集"、"同过一定点的圆集"等.其他类员、属类、两类全同等词,分别改叫元素、子集、两集相等.

以点为元素的集合,叫做点集.点集又常常叫做图形.

§ 51 轨迹的意义

点的性质产生于点与点间的相互位置,点的位置不同,它们的性质必不能

完全相同，但却可能有一种或若干种性质相同.因此在某种场合下，很可能发生这样的情形：某一组点同具某些性质，而其他的点则不然.具有某种性质的点，有时也叫做合乎某条件的点.

把点分类是几何学里的一项经常工作.分类的准则通常是一些特定的条件.给出了条件，便可以把点这样分类：凡完全合乎条件的点都归为一类，那些不完全合的或完全不合的则另归一类.这第一类点的全体，叫做合乎某条件的点集.

在一定场合下，合乎某条件的点集又叫做合乎某条件的点的轨迹.轨迹也是图形.研究合乎一定条件的点的轨迹形成什么样的图形，将是一个具有重大意义的问题.一个图形可以用它自己特具的形状来表示(例如，信手画出一个图形)，然而它的构造规律未必是我们所能掌握的；轨迹则不然，我们早已掌握了它的构造规律，唯是形成什么形状的图形却是待我们的发现.

从"轨迹"的字义来看，也有这样说的："一点按着某条件移动时，它所经过的路线就是它的轨迹".这种说法可说是轨迹定义的初步形态，在直观上很浅易近人.因此，虽然这个说法有它的狭隘性和一定缺点，但是以后为着使用"移动"这个直观概念，我们也常常说像"某点沿着某路线而移动"、"某点或某线依照某条件而移动"这类的话.

§52　轨迹的基本属性

研究合乎一定条件的点的轨迹是某某图形，将是今后的重要课题.因此问题的本质是什么，我们不可不加以分析.实际上，这问题就是要讨论两个点集相等.假如我们以 A 泛表合乎某条件的点，以 F 代表某某图形(图 396)，那么"合乎某条件的点 A 的轨迹"是一个点集，"图形 F"也是一个点集.就目前所知来说，前一个点集只知其性，后一个点集但见其形，仅凭这点当然尚不足以说明它们彼此相等，但是，怎样才能决定这两个点集相等呢?这正是我们要追究底蕴的.

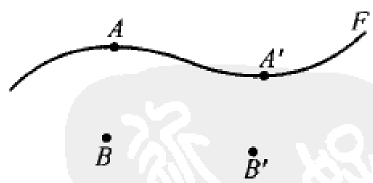


图 396

追究问题的底蕴，势必追到两集相等这个概念.两集相等的含义是怎样的?设以 M,N 代表两个集合，则所谓"$M = N$"，其意可表示如下

$$(M=N)=\begin{cases}M\subseteq N\\N\subseteq M\end{cases}$$

或者也可以表示做

$$(M=N)=\begin{cases}m\in M\Rightarrow m\in N\\n\in N\Rightarrow n\in M\end{cases}$$

这样一来,如果以 L 代表"合乎某条件的点 A 的轨迹",那么所谓"$L=F$",其意实际就是

$$(L=F)=\begin{cases}\text{① 点 } A \text{ 合乎某条件} \Rightarrow \text{点 } A\in \text{图形 } F\\ \text{① 点 } A'\in \text{图形 } F \Rightarrow \text{点 } A' \text{ 合乎某条件}\end{cases}$$

这就是说,用 ① 和 ② 便完全确定了"合乎某条件的点 A 的轨迹是图形 F" 的真实性.

上述的 ① 和 ② 都可以看做命题,因此也可用与它们等效的反申命题去代替它们

$$(L=F)=\begin{cases}\text{①}'\ \text{点 } B\notin \text{图形 } F \Rightarrow \text{点 } B \text{ 不合某条件}\\ \text{②}'\ \text{点 } B' \text{ 不合某条件} \Rightarrow \text{点 } B'\notin \text{图形 } F\end{cases}$$

① 或 ①′ 保证了没有一个合乎条件的点不在图形 F 上,即是合乎条件的点一个也没有遗漏掉,这叫做轨迹的完备性;② 或 ②′ 保证了图形 F 上的点没有一个是鱼目混珠的,这叫做轨迹的纯粹性.这两方面合起来,保证了轨迹上的点不漏不杂.

完备性和纯粹性是轨迹固有的基本属性,是我们判断轨迹是否为某图形时不可或缺的两个基本要素,所以必须特别注意.

§ 53　轨迹命题的证明

由上所述,可见我们欲证命题"合乎某条件的点 A 的轨迹是图形 F"(图396) 成立,必须做到以下两步:

(1) 任取合乎某条件的一点 A,证它落在图形 F 上;

(2) 在图形 F 上任取一点 A',证它合乎某条件.

但是必要时,也可以斟酌情形分别改证:

(1′) 在图形 F 外的任一点 B 不合某条件;

(2′) 任一不合某条件的点 B' 不在图形 F 上.

上述两步是证明轨迹命题必不可少的两面,第一步是证明完备性,第二步

是证明纯粹性.如果不注意完备性,就可能漏掉某些合条件的点,因而得到"残缺的轨迹";倘若忽略了纯粹性,就难免混入一些额外的点,以致得到"有瑕的轨迹".以命题的观点来看,完备性和纯粹性并立,正是表示着互逆或互相对称的两个命题同时真确.我们知道,互逆或互相对称的两个命题一般未必是同时成立的,所以必须有确凿的根据证明了完备性和纯粹性,才能认为这个轨迹命题可靠.

既然证明完备性时可证①或①′,证明纯粹性时可证②或②′,那么选择的方法如图 397 所示.

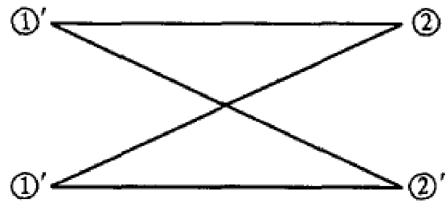


图 397

这就是说,在下列四种说法中,可以任择其一:

(1) 证 ① 和 ②;

(2) 证 ① 和 ②′;

(3) 证 ①′ 和 ②;

(4) 证 ①′ 和 ②′.

至于哪一种证法方便,却不能一概而论,需要看具体问题如何.大体来说,对于 ①′ 及 ②′,初学者往往不易措辞得当,若对于 ① 及 ② 的证明不十分困难,应尽先选用第一种证法.

注　证轨迹命题固然必须兼顾完备性与纯粹性,但若谓 ①,①′,②,②′ 四者都证然后无懈可击,便是画蛇添足.此外证明时也宜仔细辨认,切莫误选 ① 和 ①′,或误选 ② 和 ②′,否则既属叠床架屋,亦且失之片面.

§ 54　轨迹命题的类型

轨迹命题对于断案部分的叙述有种种形式,有的详尽无遗,有的藏头尾有的付之阙如,尤以后者为常见.因此,轨迹命题可按其断案的情况分成下列三种类型:

(1) 第一类型.命题的断案中明白说出轨迹的形状、位置,如有大小可言者

亦一并指明.

(2) 第二类型. 命题的断案中除明白说出轨迹的形状外,其余或缺或叙述不完全.

(3) 第三类型. 命题中但说求合某条件的点的轨迹,轨迹的形状、位置、大小一概不提.

第一和第二类型命题具有定理的形式,故均称轨迹定理;第三类型命题属于问题的形式,因此称为轨迹问题.

一般地说,任何轨迹命题都可以改变它的叙述方式使表现为各种类型. 例如:

第一类型. 距两定点等远的点的轨迹,是两定点间所连线段的中垂线.

第二类型. 距两定点等远的点的轨迹是一条直线.

第三类型. 求距两定点等远的点的轨迹.

但是轨迹常常因给出的已知条件及设定的条件间相互关系的变动而变化多端,很不易(不是绝对不可能)用肯定的断案表达出来,这就是大多数轨迹命题所以采用问题的形式来叙述的缘故.

§ 55　基本轨迹命题

下面是一些基本的轨迹命题,认为读者都已经知道,所以不再证明,只列举出来以备应用.

(1) 距两定点等远的点的轨迹,是两定点间所连线段的中垂线(图 398).

(2) 与相交两定直线等距的点的轨迹,是两条互相垂直的直线,它们平分两定线的各交角(图 399).

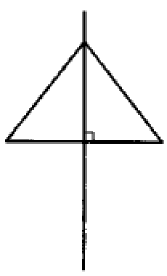


图 398

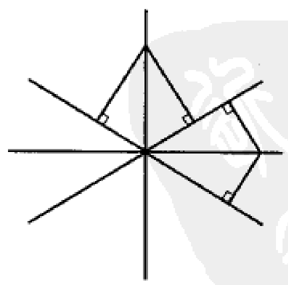


图 399

(3) 与两平行的定线等距的点的轨迹,是平行于两定线的一条直线,这直

线是两定直线的公垂线的中垂线(图 400).

(4) 至定直线的距离等于定长的点的轨迹,是平行于定线的一对直线,它们与定线的距离都等于所设的定长(图 401).

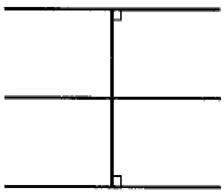


图 400

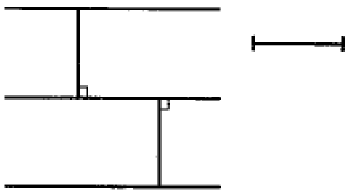


图 401

(5) 至定点的距离等于定长的点的轨迹是一圆,它的中心是定点,它的半径等于所设的定长(图 402).

(6) 对于定线段的视角等于定角(不是零度或平角)的点的轨迹是以定线段为弦的两个弓形弧,它们的内接角都等于所设的定角(图 403).

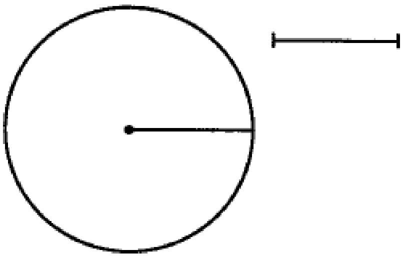


图 402

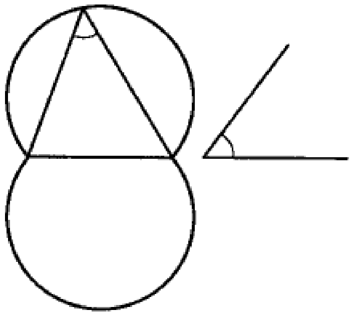


图 403

(7) 对于定线段的视角为直角的点的轨迹,是以定线段为直径的一圆(图 404).

这命题在我国很早就被发现了,我国古代数学书《周髀算经》上所载商高的话:"环矩以为圆",就是这题的意思.

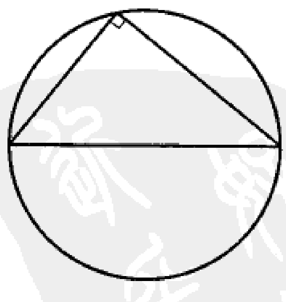


图 404

习题 19

1. 试述类(集)、类员(元素)、属类(子集) 的意义.
2. 什么叫做两类全同或两集相等?
3. 什么叫做点集?什么叫做图形?

4. 什么叫做合乎某条件的点的轨迹?

5. 轨迹与图形有无区别?

6. 用移动概念来下轨迹定义有什么缺点?

7. 轨迹的基本属性是什么?各有什么含义?

8. 欲证明合乎某条件的点的轨迹是某某图形,必须证明什么事项真确?

9. 轨迹命题要两面证明,否则有什么弊病?试举出具体的例子说明.

10. 轨迹命题可分几种类型?如何区分?孰为轨迹定理?孰为轨迹问题?

11. 任何轨迹命题都可叙述成各种类型的形式吗?试举一例.

12. 试将 §55 的基本轨迹命题(2) ~ (7) 改叙成第二类型和第三类型的形式.

13. 复习 §55 各基本轨迹命题的证明方法.

14. 商高说:"环矩以为圆." 这话是什么意思?

第二节　解法范例

§56　第一类型命题

第一类型命题既然已有明白的断案,那么只需证明完备性和纯粹性都真确便行了,所以这是轨迹命题中最容易的一种.解这类命题的步骤,比较简单,在证明过程中计分以下三步:

(1) 证完备性.证明合条件的点落在指名的图形上,或证明在指名的图形外的点不合条件.

(2) 证纯粹性.证明在指名的图形上的点合条件,或证明不合条件的点不在指名的图形上.

(3) 下结论.判断本题成立.

证明完备性时,切忌说"因为……,所以合条件的点在轨迹上";证明纯粹性时,也戒说"因为……,所以轨迹上的点合条件".因为我们敢说"某图形是轨迹",应在证实之后,在证明中途即说"轨迹"是不合逻辑的.

例题 59　联结一定直线上的点与线外一定点的线段,它的中点的轨迹是定点至定线所引垂线的中垂线.

题设　l 是定直线(图 405),P 是 l 外一定点,L 是 l 上的任意点,A 是线段 PL 的中点;$PQ \perp l$ 于 Q,a 是线段 PQ 的中垂线.

题断　点 A 的轨迹是直线 a.

证明　(1) 完备性.

命 PQ 的中点为 B,这点当在 a 上.若 L 合于 Q,则 A 合于 B,这时显然 A 在 a 上.若 L 不合于 Q,可联结 BA,则 $BA \parallel QL$,即 $BA \parallel l$.但由题设,知 $a \parallel l$,那么 A 必落在 a 上.这就是说,凡合条件的点 A 都在直线 a 上.

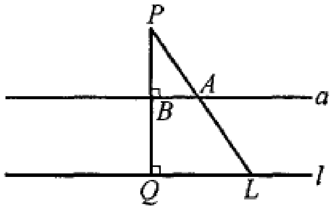


图 405

(2) 纯粹性.

在 a 上任取一点 A.当 A 就是 B 时,它已明明是 PQ 的中点.不然的话,可联结 PA,这直线必交 l 于 L(§7 定理 31 推论 2).因 $a \parallel l$,可见 A 是线段 PL 的中点(§9 定理 53 推论 2).这就证明了直线 a 上的点都合条件.

从(1),(2) 两步,确定了点 A 的轨迹是直线 a.

注　由于 $BA = \frac{1}{2}QL$,或许会有人怀疑点 A 的轨迹应较 l 短一半,因而似乎不是整条的直线 a.这实际是直觉上的错误.现在经过纯粹性的证明,便可去除这点怀疑了.

例题 60　设一点至一定矩形的一对对顶点的距离和等于至另一对对顶点的距离和,则该点的轨迹是矩形的两条对称轴.

题设　$ABCD$ 是定矩形(图 406),l,l' 是它的两条对称轴;P 是适合下面关系的点

$$PA + PC = PB + PD \qquad (1)$$

题断　点 P 的轨迹是 l 和 l' 两直线.

证明　(1) 完备性.

l 与 l' 既是矩形 $ABCD$ 的对称轴,则它们的交点 O 必是矩形的中心,今将 ① 两端平方,得

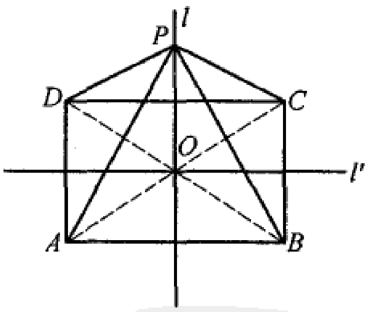


图 406

$$PA^2 + 2PA \cdot PC + PC^2 = PB^2 + 2PB \cdot PD + PD^2 \qquad ②$$

据阿波罗尼奥斯定理(§20 定理 131),知

$$PA^2 + PC^2 = \frac{1}{2}AC^2 + 2PO^2$$

$$PB^2 + PD^2 = \frac{1}{2}BD^2 + 2PO^2$$

但 $AC = BD$,可见

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2 \qquad ③$$

② 减去 ③ 后，再除以 2，得 $PA \cdot PC = PB \cdot PD$. 这式子可改书如

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC}$$

与

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC}$$

因而

$$\frac{PA - PD}{PD} = \frac{PB - PC}{PC}$$

且

$$\frac{PA - PB}{PB} = \frac{PD - PC}{PC} \quad ④$$

根据 ①，知 $PA - PD = PB - PC$ 且 $PA - PB = PD - PC$. 假如这两等式的左右端同时为零，那么点 P 就是点 O，不然的话，由 ④ 便得

$$PD = PC \text{ 或 } PB = PC$$

这样点 P 必然落在 l 或 l' 上.

(2) 纯粹性.

在 l 或 l' 上任取一点 P，显见

$$\left.\begin{aligned} PA &= PB \\ PC &= PD \end{aligned}\right\} \quad ⑤$$

或

$$\left.\begin{aligned} PA &= PD \\ PC &= PB \end{aligned}\right\} \quad ⑥$$

由 ⑤ 或 ⑥ 都可得 ①，故知点 P 合条件.

既估完备性和纯粹性皆真，于是本题成立.

本题所得点 P 的轨迹是两条直线合成的. 凡由两个或两个以上图形合成的轨迹，叫做合成轨迹；否则叫做单一轨迹. 如 §55 的(1)，(3)，(5)，(7) 及 §56 的例题 59 各轨迹都是单一轨迹，§55 的(2)，(4)，(6) 及上例各轨迹都是合成轨迹. 但是这种称呼，并不是绝对的，往往要看对什么图形来说而定. 譬如，某轨迹是一个矩形，若就矩形来说，便是单一轨迹；如就线段而言，那就是合成轨迹了.

设点 P 不在 $\odot O$ 上(图 407)，C 是 $\odot O$ 上的任意点，A 是 $\odot O$ 上合于下面关系 $PA \leqslant PC$ 的一点，那么我们把 P 与 A 的距离叫做 P 与 $\odot O$ 的距离. 当 P 在 $\odot O$ 之外，这时 A 必介于 P 与 O 之间；如 P 在 $\odot O$ 之内，则 P 或介于 A 与 O 之间或竟与 O 重合(参看习题 3 第 2 题).

例题 61　设一点与一定圆的距离等于圆的半径，则该点的轨迹是定圆的中心和一个同心圆，这圆的半径等于定圆的半径的 2 倍.

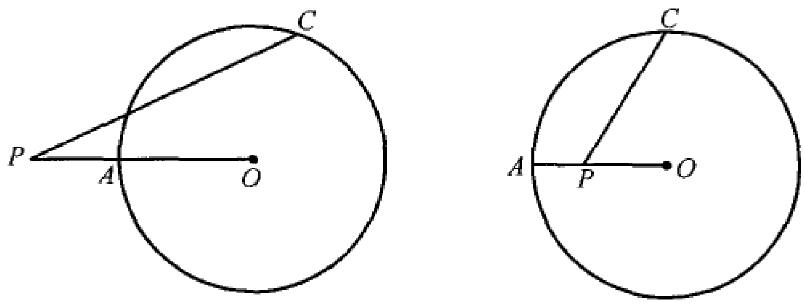


图 407

题设 点 P 与定圆 $\odot O(r)$ 的距离等于 r(图 408).

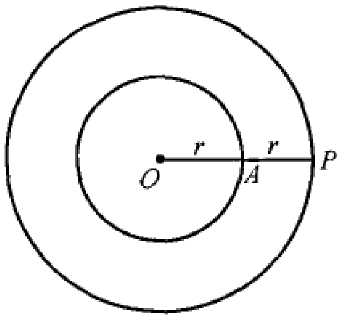


图 408

题断 点 P 的轨迹是点 O 和 $\odot O(2r)$.

证明 (1) 完备性.

若在 $P\odot O(r)$ 内部,可联结 OP 并延长之抵于圆周的点 A,则按题设,得

$$OP = OA - PA = r - r = 0$$

故点 P 即是点 O.

若 P 在 $\odot O(r)$ 外部,则连成的 OP 线段必交圆周于一点 A;因而

$$OP = OA + AP = r + r = 2r$$

可见 P 在 $\odot O(2r)$ 上.

(2) 纯粹性.

首先,点 O 合于条件,是显然的.

其次,在 $\odot O(2r)$ 上任取一点 P. 因 P 在 $\odot O(r)$ 外部,故 OP 线段必交 $\odot O(r)$ 于一点 A,这时

$$AP = OP - OA = 2r - r = r$$

可见点 P 合于条件.

由(1),(2),晓得题断真确.

本题的轨迹是合成轨迹 —— 由一个点和一个圆合成.

以定点为圆心任意作一圆,这圆的内部叫做定点的一个近旁. 如果轨迹中含有这样的点:至少存在它的一个近旁,在这近旁内除该点自身外不再有轨迹的点,那么该点叫做轨迹的孤立点. 如上例中的点 O 是.

注 轨迹中含有孤立点时,才显得我们所下轨迹定义的优越性,此时若用"移动"便难以解释.

例题 62 定圆中有一内接梯形,它的一底是定圆的定直径,那么它的对角线交点的轨迹是定圆中垂直于定底的一条直径.

题设 梯形 $ABCD$ 内接于定圆 $\odot O$(图 409),底边 AB 是 $\odot O$ 的定直径,P 是对角线 AC 与 BD 的交点;MN 是 $\odot O$ 的直径,且 $MN \perp AB$.

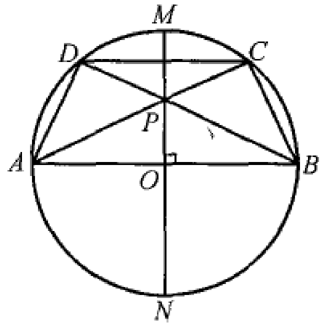


图 409

题断 点 P 的轨迹是直径 MN.

证明 (1) 完备性.

因 $AB \parallel DC$,故得 $\angle PAB = \angle PCD = \angle PBA$,从而

$$PA = PB$$

已知 MN 是 AB 的中垂线,而点 P 永在 $\odot O$ 内部,那么点 P 必然落在直径 MN 上.

(2) 纯粹性.

在 MN 直径上除 O 外任取一点 P,联结 AP,BP 并延长之交 $\odot O$ 于 C,D.因 $PA = PB$,故 $\angle PAB = \angle PBA = \angle PCD$,由此

$$AB \parallel DC$$

这证明了 $ABCD$ 是梯形,可见点 P 合于条件.

(1),(2) 两步既经证实,我们的命题便证明了.

但是必须注意,在纯粹性的证明中,为什么特别声明不取 O 作为点 P 呢?这是因为 P 若是 O,$ABCD$ 便不复成其为梯形了.不过从图形的变化来看,P 一旦是 O,我们不妨把这时的 $ABCD$ 看成是上下两底重合的"极限状态"的梯形.或者倒过来说,当梯形 $ABCD$ 变成这样极限状态时,点 P 便要达到"极限位置"的点 O.此外,我们还须注意另一情况:当 C 与 D 渐渐相近,即它们同趋近于 M 或 N 时,那么点 P 也要趋近于 M 或 N.因此 M 及 N 又是点 P 的另一种极限位置.

对原题的要求来说,O,M,N 三点是不合条件的.可是这种不合条件的点与一般不合条件的点迥乎不同:在这种不合条件的点的任何近旁都含有合条件的点,而一般不合条件的点却没有这个性质.如果某点的任何近旁都含有合条件的点,唯独它本身不合条件,那么这样的点叫做轨迹的极限点.如上例中的 O,M,N 三点都是轨迹的极限点.又其中 M,N 两点恰处于轨迹的极端位置,故复有临界点之称.

极限点(包括临界点)不合条件,固然应当排除于轨迹之外,但是这种点在轨迹中是要经常出现的,倘若一定要把它们一一撤去,那么一方面对于轨迹的叙述必致增加许多麻烦,一方面又往往使轨迹发生中断现象,因此不妨把它们也列入轨迹之中.不过这种点终究有点特殊,所以我们仍要另眼看待.

极限点尤其是临界点在寻求轨迹时往往起着决定性的作用，这也是我们要把它们列入轨迹之中的一个原因.

例题 63 设有定长的线段嵌在一定直角的两边之间而移动，则这线段的中点的轨迹是嵌在定直角内的一段圆弧，它的圆心是定直角的顶点，半径等于定长的一半.

题设 $\angle XOY$ 是定直角（图 410），有定长 a 的线段 AB 嵌在 $\angle XOY$ 的两边 OX，OY 之间，P 是 AB 的中点；又 $\overset{\frown}{QR}$ 是嵌在 $\angle XOY$ 内的一段圆弧，它的圆心是点 O，半径等于 $\frac{1}{2}a$.

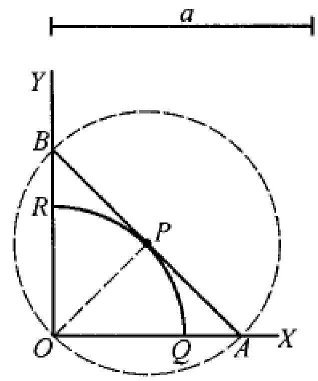


图 410

题断 点 P 的轨迹是 $\overset{\frown}{QR}$.

证明 (1) 完备性.

P 既是 $\text{Rt}\triangle OAB$ 的弦 AB 的中点，那么联结 OP，即得

$$OP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$$

而 P 永远在 $\angle XOY$ 的内部，因知 P 必在 $\overset{\frown}{QR}$ 上.

(2) 纯粹性.

在 $\overset{\frown}{QR}$ 上任取一点 P，以这点为心作一圆使通过点 O，而设这圆交 $\angle XOY$ 的两边 OX，OY 于 A，B，并用线段联结 A 和 B，因为 $\angle XOY$ 是直角，所以线段 AB 必是所作圆的直径（§13 定理 83 推论 4）. 这就是说，P 是 AB 的中点，且

$$AB = 2PO = 2 \cdot \frac{1}{2}a = a$$

可见点 P 合于条件.

根据(1)，(2)，晓得点 P 的轨迹是 $\overset{\frown}{QR}$，而 Q，R 同是临界点.

习 题 20

1. 求证：切于一定直线上一定点的圆，其中心的轨迹是一条垂直定线于该定点的直线.

2. 求证：共底定高的诸三角形，其重心的轨迹是平行于公底的两条直线，它们与公底的距离都等于定高的 $\frac{1}{3}$.

3. 求证:切于一定圆上一定点的圆,其中心的轨迹是定圆中心与该定点的连线.

4. 有定半径的动圆切于一个不等于它的定圆,求证:动圆的中心的轨迹是与定圆同心的两圆,它们的半径分别等于定圆与动圆的半径和及差.

5. 一点与一定圆的距离等于定长,但此定长小于定圆的半径,求证:该点的轨迹是与定圆同心的两圆,它们的半径分别等于定圆半径与定长的和及差.

6. 一点与一定圆的距离等于定长,但此定长大于定圆的半径,求证:该点的轨迹是与定圆同心的一圆,它的半径等于定圆半径与定长的和.

7. 一直线恒过一定点,求证:另一定点关于这直线的对称点的轨迹是一圆,这圆用前一定点为中心而且通过后一定点.

8. 直角三角形的斜边固定,求证:这三角形的重心的轨迹是一圆,这圆以斜边的中点为中心,而半径等于斜边的$\frac{1}{6}$.

9. 设平行四边形的底边固定且侧边有定长,求证:这平行四边形的中心的轨迹是一圆,它的圆心是定底的中点,半径等于侧边的一半.

10. 求证:嵌于定三角形两边之间且平行于第三边的线段,它的中点的轨迹是第三边的中线.

11. 将三角形的每顶点与对边上的点相连,求证:这些联结线的中点的轨迹是三角形的中点三角形.

12. 在$\triangle ABC$中,A',B',C'分别是三边BC,CA,AB上的点.设$A'B' \parallel AB$且$A'C' \parallel AC$,求证:$B'C'$的中点的轨迹是$\triangle ABC$中平行于边BC的中位线.

13. $\triangle ABC$中,边BC固定,A在过B的一条定直线上,求证:$\triangle ABC$的外心的轨迹是边BC的中垂线.

14. $\triangle ABC$中,边BC固定,$\angle A$等于定角α,求证:$\triangle ABC$的内心的轨迹是以BC为弦的两个弓形弧,它们的内接角都等于$90° + \frac{1}{2}\alpha$.

15. $\triangle ABC$中,边BC固定,$\angle A$等于定角α,E,F是BC边的三等分点,求证:$\triangle ABC$的重心的轨迹是以EF为弦的两个弓形弧,它们的内接角都等于α.

16. 一点在已知三角形三边所在直线上的射影共线,求证:该点的轨迹是已知三角形的外接圆.

17. 设P是定三角形$\triangle ABC$的边BC所在直线上的点.今以BP,CP为弦各作圆使分别切于AB,AC,求证:所作两圆的另一交点Q的轨迹是$\triangle ABC$的外接圆.

18. $\triangle ABC$ 内接于定圆且边 BC 固定. 今过 A 作两圆使分别切 BC 于 B,C,求证:所作两圆的第二交点的轨迹是以 BC 为弦且等于原圆的一圆.

19. 一三角形内接于定圆且有一边固定,求证:这三角形的垂心的轨迹是以定边为弦且等于原圆的一圆.

20. D 是定线段 BC 上的点. 在过 D 且垂直于 BC 的直线上取点 A,假定 $\overline{AD^2} = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$,求证:点 A 的轨迹是以 BC 为直径的圆.

21. 以定等腰三角形 $\triangle ABC$ 的顶点 A 为心作圆,自 B,C 向所作圆引切线,求证:这些切线的交点的轨迹是 $\triangle ABC$ 的外接圆和边 BC 的中垂线.

§57 第二类型命题

第二类型命题的断案既不完全,在未将所求轨迹的各方面推测明白之前,当然不能进行证明. 所以解这类题的步骤比解第一类型命题更多一些,一般须有以下几步.

(1) 探求. 除已知轨迹的形状外,还要把其他方面如位置、大小(如果有的话)等推测明白,务使由这些因素可以确定一个图形.

(2) 证明. 全都过程应包括:

① 证完备性. 证明在探求中所确定的图形合乎完备性.

② 证纯粹性. 证明在探求中所确定的图形合乎纯粹性.

③ 下结论. 断言所求轨迹就是在探求中所确定的那个图形.

(3) 讨论. 有时所求轨迹可能发生变态或甚至化为乌有;这些情形当然不便在"探求"里面和盘托出,致增累赘,此时应设"讨论"一项,条陈缕述,以求眉目清楚.

例题 64 设一动点至两定点的距离之比[①]等于两不等已知线段之比,则该点的轨迹是一圆.

这命题叫做阿波罗尼奥斯轨迹定理.

题设 A,B 是两定点(图 411),a,b 是不等的两已知线段,P 是适合下面关系 $\frac{PA}{PB} = \frac{a}{b}$ 的点.

题断 点 P 的轨迹是一圆.

探求 假设 P 是合条件的一点,那么它关于直线 AB 的对称点显然也合条

① 凡说二量之比,其前后项的次序认为是已经指定的.

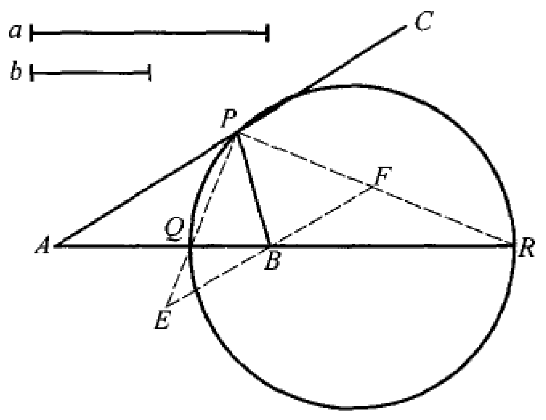


图 411

件，由此可知点 P 的轨迹一定是以 AB 为对称轴的图形，这就足以断定轨迹的圆心在直线 AB 上. 因此，若内外分线段 AB 于 Q,R，使合于

$$\frac{QA}{QB}=\frac{RA}{RB}=\frac{a}{b}\quad\left(\frac{a}{b}\neq 1\right)$$

则 QR 应是轨迹的直径. 这样，轨迹的位置和大小便确定了.

证明　(1) 完备性.

联结 A,B，设 Q,R 是这线段的内外分点，合于

$$\frac{QA}{QB}=\frac{RA}{RB}=\frac{a}{b}\quad\left(\frac{a}{b}\neq 1\right)$$

则 Q,R 都是合条件的定点.

假设 P 是合条件而不在直线 AB 上的点，那么 PQ 及 PR 就分别是 $\angle APB$ 及其邻补角 $\angle BPC$ 的平分线（§16 定理 112 和 113 的推论）. 这样一来，马上知道

$$\angle QPR=90°$$

因此点 P 应在直径为 QR 的圆上.

(2) 纯粹性.

在直径为 QR 的圆上除 Q,R 两点已合条件毋庸考虑外，现在任取另一点 P 证其也合条件.

将点 P 与 A,B,Q,R 四点相连，并过 B 引线平行于 PA 而交 PQ,PR 于 E,F，则 $\triangle QAP\backsim\triangle QBE$ 且 $\triangle RAP\backsim\triangle RBF$. 从而

$$\frac{PA}{EB}=\frac{QA}{QB}=\frac{a}{b},\frac{PA}{FB}=\frac{RA}{RB}=\frac{a}{b}$$

于是 $\frac{PA}{EB}=\frac{PA}{FB}$. 由此 $EB=FB$，即 B 是 EF 的中点. 但 $\angle EPF=90°$，因知 $PB=EB$. 所以

$$\frac{PA}{PB}=\frac{a}{b}$$

上面的(1) 和(2) 证实了点 P 的轨迹是直径为 QR 的圆.

注　设若 $a=b$，则点 R 不存在，此时上题即变为 §55 的基本轨迹命题(1).

例题 65　设一动点至两定点的距离之平方差[①]为常数，则该点的轨迹是垂直于两定点的连线的一条直线.

题设　A,B 是两定点(图 412)，P 是适合关系 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=k$ 的点，其中 k 是常数.

题断　点 P 的轨迹是垂直于 AB 连线的一条直线.

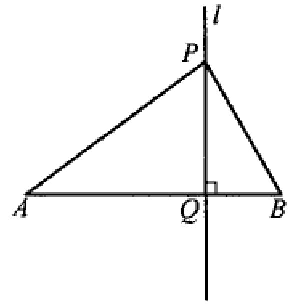


图 412

探求　既说点 P 的轨迹是垂直于 AB 的一条直线，那么只需知道垂足所在，轨迹的位置便完全确定了. 现在假定 Q 是直线 AB 上合条件的点

$$\overline{QA}^2-\overline{QB}^2=k$$

即

$$(\overline{QA}-\overline{QB})(\overline{QA}+\overline{QB})=k \quad ①$$

令 $\overline{AB}=a$，则

$$\overline{QA}-\overline{QB}=\overline{BA}=-a$$

$$\overline{QA}+\overline{QB}=2\overline{QA}+\overline{AB}=a-2\overline{AQ}$$

以之代入 ① 并整理后，得

$$\overline{AQ}=\frac{a^2+k}{2a} \quad ②$$

由 ② 得知点 Q 唯一确定.

证明　(1) 完备性.

设 Q 是直线 AB 上合条件的点. 由上已知点 Q 唯一确定，故过 Q 且垂直于 AB 的直线 l 是一条定直线.

再设 P 是合条件而在直线 AB 外的点. 联结 PQ，那么由于等式

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{QA}^2-\overline{QB}^2$$

成立，必然 $PQ\perp AB$(复习题 2 第 12 题). 由此可见点 P 落在直线 l 上.

(2) 纯粹性.

在直线 l 上取一点 P，不论它的位置如何，永有(习题 4 第 16 题)

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{QA}^2-\overline{QB}^2=k$$

这就是说，l 上的所有点均合条件.

根据(1) 和(2)，即知点 P 的轨迹是垂直 AB 于定点 Q 的直线 l.

例题 66　对于不同心的两定圆有等幂的点的轨迹，是垂直于连心线的一

① 这里所说的"差"，不是指的绝对值，而是假定被减数与减数已经指定了的.

条直线.

题设　一点 P 对于不同心的两定圆 $\odot O_1(r_1)$,$\odot O_2(r_2)$ 的幂为 p_1,p_2,且 $p_1=p_2$(图 413).

题断　点 P 的轨迹是垂直于连心线 O_1O_2 的一条直线.

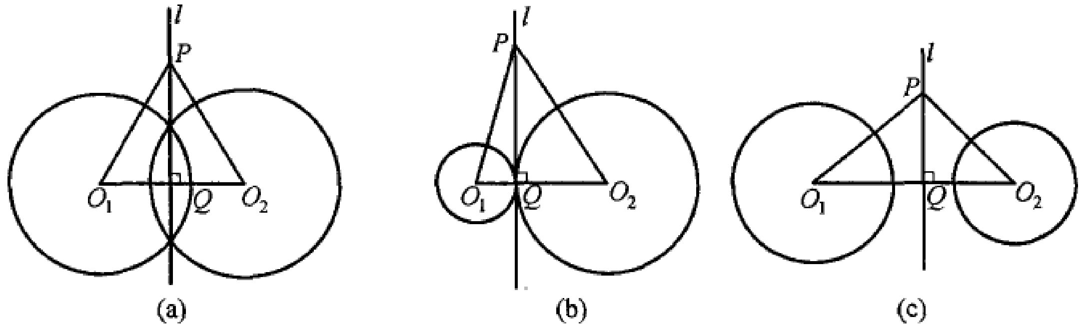


图 413

探求　联结 PO_1 和 PO_2,则

$$p_1=\overline{PO}_1^2-r_1^2,p_2=\overline{PO}_2^2-r_2^2$$

题设 $p_1=p_2$,故

$$\overline{PO}_1^2-r_1^2=\overline{PO}_2^2-r_2^2$$

因而

$$\overline{PO}_1^2-\overline{PO}_2^2=r_1^2-r_2^2$$

此式的右端是常数,这样便与前例相仿.

证明　(1) 完备性.

设 Q 是连心线 O_1O_2 上合条件的点,即

$$\overline{QO}_1^2-r_1^2=\overline{QO}_2^2-r_2^2$$

那么

$$\overline{QO}_1^2-\overline{QO}_2^2=r_1^2-r_2^2$$

由此仿前例知点 Q 唯一确定,因而过 Q 且垂直于 O_1O_2 的直线 l 是一条定直线.

今设 P 是合条件而在连心线 O_1O_2 外的点,则由上面已知

$$\overline{PO}_1^2-\overline{PO}_2^2=r_1^2-r_2^2$$

可见 $PQ\perp O_1O_2$.这证明了点 P 一定落在直线 l 上.

(2) 纯粹性.

在直线 l 上任意取一点 P,那么

$$\overline{PO}_1^2-\overline{PO}_2^2=\overline{QO}_1^2-\overline{QO}_2^2=r_1^2-r_2^2$$

由此

$$\overline{PO_1}^2 - r_1^2 = \overline{PO_2}^2 - r_2^2$$

即

$$p_1 = p_2$$

故点 P 合条件.

既然(1),(2)皆确,自可断言点 P 的轨迹就是垂直 O_1O_2 于定点 Q 的那条 l 直线.

上述的 l 直线叫做两圆 $\odot O_1(r_1)$ 与 $\odot O_2(r_2)$ 的等幂轴.不难知道两圆的等幂轴,当两圆相交时必通过两交点(图 413(a)),相切时必为过切点的公切线(图 413(b)).无公共点时必与两圆不相交(图 413(c)).在"圆几何学"里,有关等幂轴的研究,占着很重要的地位.

两同心圆没有等幂轴.

若一个圆集里的圆两两的等幂轴是同一的直线 l,这圆集便叫做共轴圆系,l 仍叫做圆系的等幂轴.显然,共轴圆系的所有圆心共线.这直线叫做圆系的圆心轴.有时在一个共轴圆系中任意选取几个圆,我们特别叫它们做共轴圆,或者说这几个圆共轴.

共轴圆系有三种类型:诸圆与等幂轴同交于两点,这叫做椭性的(图 414(a));诸圆与等幂轴同切于一点,这叫做抛道的(图 414(b));诸圆与等幂轴不相交,这叫做双曲的(图 414(c)).

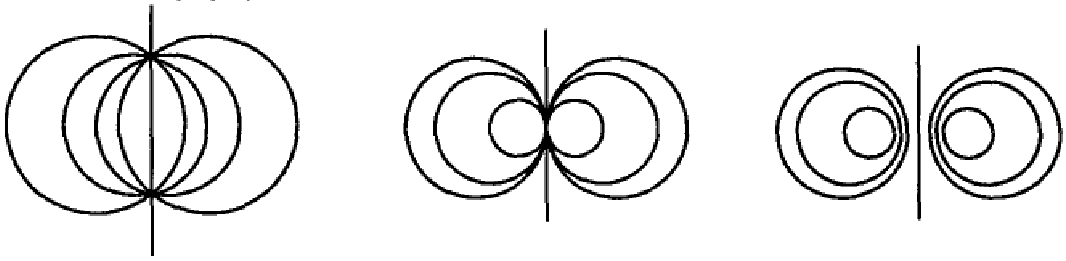


图 414

为了要研究一个与共轴圆系有关的轨迹命题,我们先证明下面的定理.

定理 153 一点对于不同心两圆的幂之差,等于等幂轴到该点的距离乘以圆心距之积的 2 倍.

题设 一点 P 对于不同心两圆 $\odot O_1(r_1)$,$\odot O_2(r_2)$ 的幂为 p_1, p_2,l 是这两圆的等幂轴,$PA \perp l$ 于 A(图 415).

题断 $p_1 - p_2 = 2\,\overline{AP} \cdot \overline{O_1O_2}$.

证明 设 l 交 O_1O_2 于 Q,并引 $PB \perp O_1O_2$ 于 B,便得

$$p_1 - p_2 = \overline{PO}_1^2 - r_1^2 - (\overline{PO}_2^2 - r_2^2) = \overline{BO}_1^2 - \overline{BO}_2^2 - (r_1^2 - r_2^2) =$$
$$\overline{BO}_1^2 - (\overline{BO_1} + \overline{O_1O_2})^2 - (\overline{QO}_1^2 - \overline{QO}_2^2) =$$
$$2\,\overline{O_1B}\,\overline{O_1O_2} - \overline{O_1O}_2^2 - (\overline{QO_1} - \overline{QO_2})(\overline{QO_1} + \overline{QO_2}) =$$
$$2\,\overline{O_1B}\cdot\overline{O_1O_2} - \overline{O_1O}_2^2 + \overline{O_1O_2}(2\,\overline{QO_1} + \overline{O_1O_2}) =$$
$$2\,\overline{O_1O_2}(\overline{QO_1} + \overline{O_1B}) = 2\,\overline{O_1O_2}\cdot\overline{QB} = 2\,\overline{AP}\cdot\overline{O_1O_2}$$

推论 若两圆不同心，则其中一圆的任何点对于另一圆的幂的绝对值，必等于该点到等幂轴的距离乘以圆心距之积的2倍.

例如，在前图中，设 P 在 $\odot O_2$ 上(图416)，则 $p_2 = 0$，此时

$$p_1 = 2\,\overline{AP}\cdot\overline{O_1O_2} = 2\,\overline{PA}\cdot\overline{O_2O_1}$$

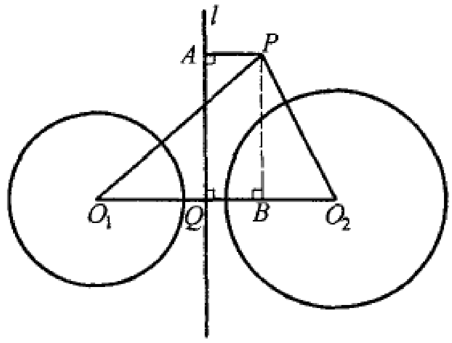


图415

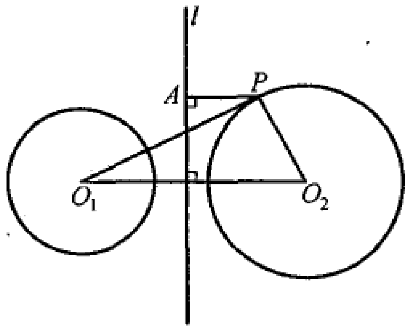


图416

例题67 设一动点对于不同心的两定圆的幂之比为不等于1的常数，则该点的轨迹是与两定圆共轴的一圆.

题设 一点 P 对于不同心的两定圆 $\odot O_1(r_1)$，$\odot O_2(r_2)$ 的幂为 p_1, p_2，而 $\frac{p_1}{p_2} = k \neq 1$，$k$ 是常数(图417).

题断 点 P 的轨迹是与 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 共轴的一圆.

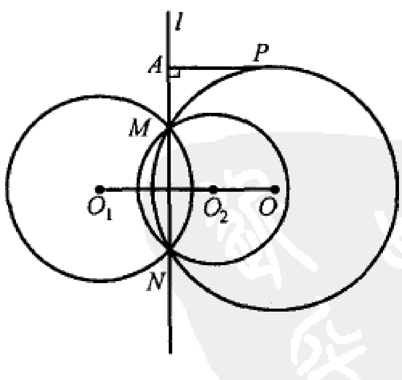


图417

探求 按照题断所说，若能求得轨迹的圆心，那么这圆便完全确定了. 现在设想轨迹的圆心为 O，据共轴圆的性质，得知点 O 必在两定圆的连心线 O_1O_2 上. 命 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的等幂轴为 l，并引 $PA \perp l$ 于 A，则根据上面的推论，有

$$p_1 = 2\overline{PA}\cdot\overline{OO_1}$$
$$p_2 = 2\overline{PA}\cdot\overline{OO_2}$$

由此 $$\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = \frac{p_1}{p_2} = k \quad (k \neq 1)$$

于是点 O 的位置决定于 k 值.

证明 (1) 完备性.

设 O 是两定圆的连心线 O_1O_2 上合于 $\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k \neq 1$ 的点,并以这点为心作 $\odot O$,使与 $\odot O_1$,$\odot O_2$ 共轴①,则 $\odot O$ 是一个确定的圆.

命 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的等幂轴为 l,点 P 对于 $\odot O$ 的幂为 p.若引 $PA \perp l$ 于 A,则据定理 153,得

$$p - p_1 = 2\overline{AP}\cdot\overline{OO_1}$$
$$p - p_2 = 2\overline{AP}\cdot\overline{OO_2}$$

由此 $$\frac{p-p_1}{p-p_2} = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k = \frac{p_1}{p_2}$$

那么 $$p - p_1 = k(p - p_2), p_1 = kp_2$$

从而 $$p = kp$$

在这等式中,因 $k \neq 1$,故必 $p = 0$.这样一来,合条件的点 P 当在 $\odot O$ 上了.

(2) 纯粹性.

在 $\odot O$ 上任取一点 P.设 P 对于 $\odot O_1$,$\odot O_2$ 的幂各为 p_1,p_2 并引 $PA \perp l$ 于 A,则

$$p_1 = 2\overline{PA}\cdot\overline{OO_1}$$
$$p_2 = 2\overline{PA}\cdot\overline{OO_2}$$

以后式除前式,得

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k$$

因知点 P 合条件.

有了(1),(2) 两项的证明,所以肯定点 P 的轨迹就是 $\odot O$.

讨论 上面的证明,完全以 $\odot O$ 为基础,因此要讨论轨迹的有无、是否变态,须从 $\odot O$ 着眼.点 O 存在,自属无疑,所应考虑的,是它的位置可能影响

① $\odot O$ 的作法见下面的“讨论”.

$\odot O$ 不存在.现在分三种情形讨论如下:

(1) 假定两定圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 M,N 两点(图 417).这时两定圆所确定的共轴圆系是椭性的,因之以 O 为心而通过M,N的圆就是 $\odot O$.这样的圆不论 O 点位置如何永远存在,所以在这种情形下必有轨迹 $\odot O$,只是 M 和N 是轨迹的极限点.

(2) 假定两定圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切于点 Q(图 418).这时两定圆所确定的共轴圆系是抛道的,那么以 O 为心而切 l 于Q 的圆就是 $\odot O$.所以只要 O 与Q 不合而为一点,$\odot O$ 一定存在.因此:

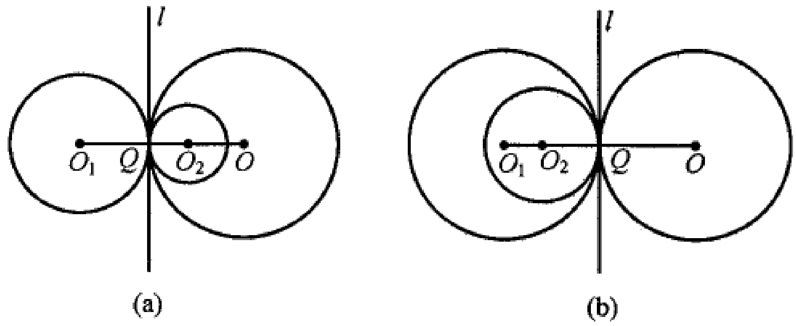


图 418

当 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切时(图 418(a)),若 $k \neq -\frac{r_1}{r_2}$,则有轨迹 $\odot O$,Q 是极限点;若 $k = -\frac{r_1}{r_2}$,则无轨迹.

当 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切时(图 418(b)),若 $k \neq \frac{r_1}{r_2}$,则有轨迹 $\odot O$,Q 是极限点;$k = \frac{r_1}{r_2}$,则无轨迹.

(3) 假定两定圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 无公共点(图 419).这时两定圆所确定的共轴圆系是双曲的,欲作 $\odot O$,可如下设计:命 l 与 O_1O_2 的交点为 Q,那么以 Q 为心可作一圆同时与 $\odot O_1$ 及 $\odot O_2$ 正交(因 Q 至 $\odot O_1$ 及 $\odot O_2$ 的切线长相等),然后以 O 为心作与 $\odot Q$ 正交的圆就得到 $\odot O$ 了.由此可见 $\odot O$ 存在与否,视乎点 O 在 $\odot Q$ 的外部或内部而定.故若设 Q 至

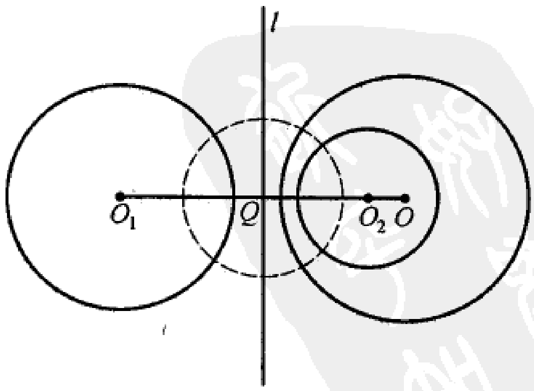


图 419

$\odot O_1$(或 $\odot O_2$) 的切线长为 q,则:

①$QO > q$ 时,有轨迹 $\odot O$;

②$QO = q$ 时,轨迹是一孤立点 O;

③$QO < q$ 时,无轨迹.

注 (1) 若 $k = 1$,则本题变为例题 66.

(2) 在例题 64 中,如果把两定点均视为点圆,那么该题实即本题的特殊情形.当$\frac{a}{b}$的值变化时,所得的圆集将是一个双曲共轴圆系,它的等幂轴就是两定点间所连线段的中垂线.任何双曲共轴圆系都可以看做是这样产生的,其中据以产生圆系的那两个定点同叫做圆系的极限点.

习题 21

1. 求证:定圆内等于定长的弦,它的中点的轨迹是一同心圆.

2. 求证:定圆内有定向的弦,它的中点的轨迹是一直径.

3. 求证:通过定圆内一定点的弦,它的中点的轨迹是一圆.

4. 自一定点至定多边形的周界引线段,求证:诸线段中点的轨迹是一个多边形.

5. 在已知的凸多边形内,作定向的线段使抵于形周,求证:诸线段的中点的轨迹是一条折线.

6. 求证:共底定积的诸三角形,其顶角顶点的轨迹是两条直线.

7. 一点至相交两定直线的距离之比为常数,求证:该点的轨迹是两条直线.

8. 一点至相交两定直线的距离有一定的和,求证:该点的轨迹是一个矩形.

9. 定圆中互相垂直的两弦的平方和为常数,求证:两弦所在直线的交点的轨迹是一圆.

10. 已知两同心圆,自外圆上任一点向内圆作切线,求证:所作切线(线段)的中点的轨迹是一圆.

11. 求证:与一定圆正交且通过一定点的圆,其圆心的轨迹是一条直线.

12. 一圆同时径割不同心的两定圆,求证:该圆的中心的轨迹是一条直线.(若甲圆通过乙圆某直径的两端,便说甲圆径割乙圆.)

13. 一点对于不同心的两定圆的幂之差(绝对值) 为常数,求证:该点的轨迹是两条直线.

14. 一点对于同心的两定圆的幂之比为不等于 1 的常数,求证:该点的轨迹是与两定圆同心的一圆.

15. 一点至不同心两定圆的中心的距离之比等于两圆半径之比，求证：该点的轨迹是与两定圆共轴的一圆.（所得轨迹（圆）叫做两定圆的相似圆.）

16. 一点对外离的两定圆有相等的视角，求证：该点的轨迹是一圆.

17. 过相交两定圆的一交点 P 任作直线交两圆于 A，B，求证：AB 的中点 M 的轨迹是一圆.

18. 以一固定线段为一腰作等腰三角形，求证：这些三角形的重心的轨迹是两个圆.

19. 菱形 $ABCD$ 的边 AB 固定，O 是 AB 的中点，P 是 CO 与 BD 的交点，求证：点 P 的轨迹是一圆.

20. AB 是定圆的定弦，AD 是动弦. 作 $\square ABCD$，求证：点 C 的轨迹是一圆.

21. 设梯形 $ABCD$ 的底边 AB 固定，而 BC 与 CD 各有定长，求证：点 D 的轨迹是一圆.

22. C 是定线段 AB 上的任意点. 今以 AC，BC 为直径分别作圆，设这两圆的外公切线切两圆于 E，F，求证：AE 与 BF 的交点 P 的轨迹是一圆.

23. 设 P 是定直角三角形的弦上任意点，自 P 引线垂直于此弦而交勾股所在直线于 Q，R，在这垂线上取点 S，使合于 $\overline{PS}^2 = \overline{PQ} \cdot \overline{PR}$，求证：点 S 的轨迹是一圆.

24. AB 是定圆 $\odot O$ 的定直径，t 是切 $\odot O$ 于 B 的直线. 今有一圆同切于 $\odot O$ 及直线 t 但不通过点 B，求证：自 A 向此圆所引切线的切点的轨迹是一圆.

25. P 是相交两定圆的交点之一，A，B 分别是这两圆上的一定点且与点 P 共线，今过 P 任作一直线依次交两定圆于 C，D，求证：AC 与 BD 的交点 Q 的轨迹是一圆.

26. 一梯形内接于定圆，且有一腰固定，求证：它的对角线交点的轨迹是一段圆弧.

27. 一直角三角形的直角顶点是另一个定直角内部的定点，而其余两顶点各落在定直角的两边上，求证下述的点的轨迹各是一条线段：

(1) 斜边上的高线足；

(2) 斜边的中点.

28. 设三角形有一角固定，而夹此角的两边之和为定长，求证：第三边中点的轨迹是一线段.

29. 设平行四边形有一角固定，而周界有定长，求证：定角的对顶点的轨迹是一线段.

30. 定角 $\angle XOY$ 不等于直角，A 是边 OX 上的定点，B 是边 OY 上的任意点，

作 ⊙OAB,并过 A,B 各作此圆的切线,求证:所作两切线的交点的轨迹是一条射线.(提示:这条射线平行于直线 OX.)

31. A,B 是定直线 k 与 l 外的两定点,自这两点引互相平行的两直线 a 与 b. 设 a 与 k,b 与 l 分别交于 X,Y,求证:AY 与 BX 的交点 P 的轨迹是一条直线.(提示:分别过 A,B 作 l,k 的平行线.)

32. 三角形的三边各有定向,而两顶点分别落在两条定直线上,求证:第三顶点的轨迹是一条直线.

§58 第三类型命题

第三类型命题即是问题的形式.题中并不宣布轨迹的迹象,那么解这类题,探求工作绝不可免.虽然这步工作最难,但是揣测定了轨迹之后,往往证法也就附带想出来了.解题步骤有下列几步:

(1) 探求.分析设定的条件,设法测定所求轨迹的形状、位置、大小(如果有的话),获知这些因素后,便把它们确定的图形定名.

(2) 证明.包含三个组成部分.

① 证完备性.证明探求所得的图形合乎完备性(这部分在探求中多半已完成).

② 证纯粹性.证明探求所得的图形合乎纯粹性.

③ 下结论.断言所求轨迹就是探求所得的那个图形.

(3) 讨论.斟酌情形附加讨论,推究轨迹可能发生的变化.

例题 68 设方向一定的直线 l 交定三角形 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 所在直线于 X,Y,Z(图 420),在 l 上有一点 P,使得 $\dfrac{\overline{PX}}{\overline{YZ}}=k$ 为常数,求点 P 的轨迹.

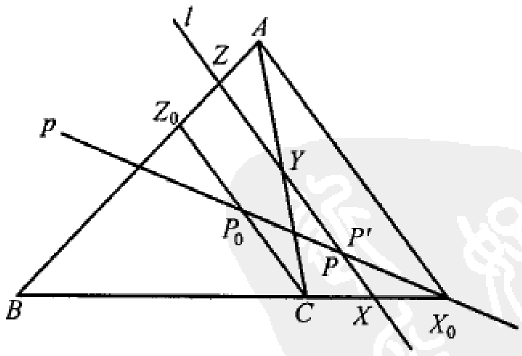


图 420

题设 $\triangle ABC$ 是定三角形,定向直线 l 交直线 BC,CA,AB 于 X,Y,Z,P 是 l 上的点,合于 $\dfrac{\overline{PX}}{\overline{YZ}}=k$,而 k 是常数.

题求 点 P 的轨迹.

探求 直线 l 除有定向外,余无任何限制,它可以远离到任何远的地方,因

而点 P 随着可以趋于“无穷远”[①].由此想见点 P 的轨迹可能是一条直线.那么只需求出点 P 的两个固定位置,这条直线就完全确定了.当 Y,Z 都很近于点 A 时,$\overline{YZ}$ 之长几乎等于零,这时必须把点 P 取得很近于 X($\overline{PX}=k\overline{YZ}$).可见 Y,Z 都趋而重合于点 A(即是 l 通过点 A)时,点 P 必然趋而重合于 l 与 BC 的交点 X_0.这就是说,X_0 是点 P 的极限位置.又当 l 通过点 C(即 X 与 Y 均重合于点 C)时,设 Z 变到 Z_0(即 l 与 AB 的交点),P 变到 P_0;因 $\dfrac{\overline{P_0C}}{\overline{CZ_0}}=k$,故 P_0 为定点.如果上面的推想不错的话,X_0 与 P_0 两点便足以确定所求的轨迹.

证明　(1) 完备性.

过 A,C 分别作直线 AX_0,CZ_0 同平行于 l 而分别交 BC,AB 于 X_0,Z_0,这两交点都是定点.设 P_0 是 CZ_0 上合条件 $\dfrac{\overline{P_0C}}{\overline{CZ_0}}=k$ 的点,则点 P_0 的位置自属一定.通过 X_0 与 P_0 两点作一直线 p.

假定 l 与 p 交于 P',那么易知

$$\frac{\overline{P'X}}{\overline{P_0C}}=\frac{\overline{XX_0}}{\overline{CX_0}}=\frac{\overline{YA}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{YZ}}{\overline{CZ_0}}$$

由此

$$\frac{\overline{P'X}}{\overline{YZ}}=\frac{\overline{P_0C}}{\overline{CZ_0}}=k$$

据题设 $\dfrac{\overline{PX}}{\overline{YZ}}=k$,可见

$$\overline{P'X}=\overline{PX}$$

于是 P' 应重合于 P.换句话说,合条件的点 P 在直线 p 上.

(2) 纯粹性.

在直线 p 上任取一点 P,过此点作定向直线 l,设交 BC,CA,AB 于 X,Y,Z.因

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{P_0C}}=\frac{\overline{XX_0}}{\overline{CX_0}}=\frac{\overline{YA}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{YZ}}{\overline{CZ_0}}$$

故

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{YZ}}=\frac{\overline{P_0C}}{\overline{CZ_0}}=k$$

即点 P 合条件.

① 意谓点 P 与任何定点的距离可以超出任何给定的长度.

由(1),(2),晓得点 P 的轨迹是通过 X_0 与 P_0 两点的直线 p,但 X_0 是轨迹的极限点.

例题 69 三角形有一角固定,夹此角的两边之和为定长;自定角顶引直线平行于第三边,求其与三角形外接圆的交点的轨迹.

题设 在 $\triangle ABC$ 中(图 421),$\angle A$ 位置固定,边 $AB+AC=l$ 为定长,AP 平行于 BC 而交 $\odot ABC$ 于 P.

题求 点 P 的轨迹.

探求 当 $AB=AC=\frac{1}{2}l$ 时,AP 是 $\odot ABC$ 的切线,即 P 重合于 A,可见 A 应是轨迹上的点.当点 C 趋近于 A 时,点 B 趋近于一点 B_0,这点合于 $AB_0=l$;同时 $\odot ABC$ 也趋近于极限位置——通过 A,B_0 两点而切于 AC,因而点 P 趋近于 B_0.

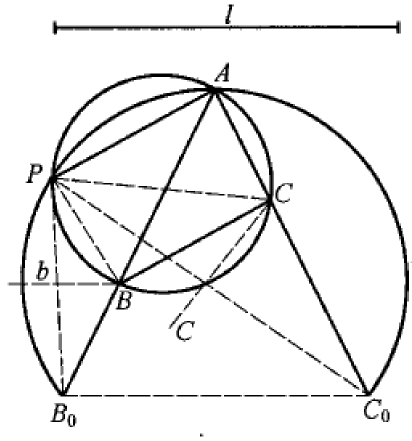


图 421

然而点 P 不能侵入 $\angle BAC$ 之内,所以 P 必于 B_0 处停歇.同理,在射线 AC 上取 $AC_0=l$,一样知道 P 在达到点 C_0 时也要停歇.由此推测,点 P 的轨迹可能就是以 B_0,C_0 为端点而通过 A 的一段圆弧 $\overparen{B_0AC_0}$.

证明 (1) 完备性.

在射线 AB 和 AC 上各取线段 $AB_0=AC_0=l$,则 B_0 和 C_0 都是定点.以 B_0,C_0 为端点且通过 A 作一圆弧 $\overparen{B_0AC_0}$.

联结 PB,PC,PB_0,PC_0,则见

$$PB=AC=l-AB=AB_0-AB=BB_0$$
$$PC=AB=l-AC=AC_0-AC=CC_0$$

由此

$$\angle AB_0P=\frac{1}{2}\angle ABP=\frac{1}{2}\angle ACP=\angle AC_0P$$

因 B,C 同在 AP 的一侧,于是 B_0,C_0 也同在 AP 的一侧,故知 A,B_0,C_0,P 四点共圆.但 P 不能落在 $\angle BAC$ 之内,这就证明了点 P 必然落在 $\overparen{B_0AC_0}$ 上.

(2) 纯粹性.

在 $\overparen{B_0AC_0}$ 上任取一点 P,联结 PA,PB_0,PC_0.作 PB_0,PC_0 的中垂线 b,c 分

别交AB_0,AC_0于B,C,并联结PB,PC.于是因$PB=BB_0$且$PC=CC_0$,有

$$\angle ABP=2\angle AB_0P=2\angle AC_0P=\angle ACP$$

故点P在$\odot ABC$上.

现在为使叙述确定起见,不妨假定点P在$\overset{\frown}{AB_0}$之上.联结BC,B_0C_0由此可得

$$\angle ABC=\angle APC=\angle APC_0-\angle CPC_0=\angle AB_0C_0-\angle CC_0P=$$
$$\angle AC_0B_0-\angle AC_0P=\angle PC_0B_0=\angle PAB$$

那么$AP /\!/ BC$.

这样一来,便很易知道

$$AB+AC=AB+PB=AB+BB_0=AB_0=l$$

所以点P合乎所设条件.

(1),(2)两种性质,说明了点P的轨迹是$\overset{\frown}{B_0AC_0}$,而$B_0$,$C_0$是临界点.

例题70　定圆的一些弦对某定点都张开直角[①],求这些弦的中点和定点在弦上的射影的轨迹.

题设　AB是定圆$\odot O(r)$的弦(图422),P是定点,$\angle APB=90°$,M是AB的中点,Q是P在AB上的射影.

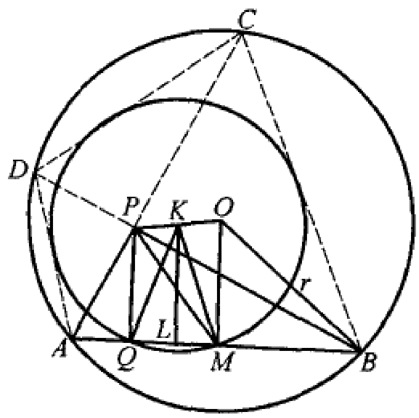


图422

题求　M,Q两点的轨迹.

探求　设直线AP,BP再交$\odot O$于C,D,则三弦BC,CD,DA的中点以及P在它们上面的射影都应是轨迹的点.我们知道,这六个点连同M,Q两点共八个点是共圆的(习题16第32题);因此,所求的轨迹可能就是这个圆.欲确定这个圆,第一要看定圆心的所在,其次要推算半径的大小.这圆既然通过M,Q两点,圆心当在MQ的中垂线上;但是这中垂线是变动的,而所求的圆心是不动的,那么这中垂线上应该有一个不动的点.试看这中垂线上有哪点是固定的呢?OM,PQ都垂直于AB,可见MQ的中垂线必然通过OP的中点K;现在O,P都是定点,K自然也是定点了.发现了这点,我们暂且认为它是所求的圆心,如果再能证明$KM=KQ$之长一定,问题便得到解决.然而KM是$\triangle MOP$的中线,利用三

① 即定点对这些弦的视角都是直角.

角形的中线公式可能把它推算出来.

证明 (1) 完备性.

线段 OP 的中点 K 是定点. 因 OM, PQ 都垂直于 AB, 故 K 应在 MQ 的中垂线上(§9 定理 53); 从而

$$KM = KQ$$

在 $\triangle MOP$ 中, 有(§20 定理 132)

$$KM = \frac{1}{2}\sqrt{2(OM^2 + MP^2) - OP^2} \qquad ①$$

由题设 $\angle APB = 90°$, 知 $MP = MB$; 于是

$$OM^2 + MP^2 = MO^2 + MB^2 = OB^2 = r^2 \qquad ②$$

以 ② 代入 ①, 便得

$$KM = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - OP^2}$$

此式右端是常数, 因知 M, Q 两点同在以 K 为心, $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - OP^2}$ 为半径的圆上.

(2) 纯粹性.

在以 K 为心, $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - OP^2}$ 为半径的圆上任取一点 Q, 过 Q 作 $\odot O$ 的弦 AB 使其垂直于 PQ, 设 AB 再交 $\odot K$ 于 M. 引 $KL \perp MQ$ 于 L, 则 L 是 MQ 的中点; 已知 K 是 OP 的中点, 而 $KL \parallel PQ$, 那么 $KL \parallel OM$(§9 定理 57). 由此知 $OM \perp AB$, 于是 M 是 AB 的中点.

M 在 $\odot K$ 上, 自然

$$KM = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - OP^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(OM^2 + MB^2) - OP^2} \qquad ③$$

在 $\triangle MOP$ 中, 又有式 ① 成立. 比较 ①, ③ 的末端, 可得 $MP = MB$; 因此(§8 定理 40 推论)

$$\angle APB = 90°$$

所以 $\odot K$ 上的点是合条件的.

以上(1), (2) 两步, 证明了 M, Q 两点的轨迹合而为一圆, 圆心是 OP 的中点 K, 半径等于 $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - OP^2}$.

讨论 (1) 若 $OP < r\sqrt{2}$, 则轨迹是一圆. 特别当:

① P 重合于 O 时, 轨迹与定圆同心, 即是 $\odot O\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$;

②P 在定圆上时，M 是固定点(即点 O)，Q 的轨迹是 $\odot K\left(\frac{1}{2}r\right)$，但 P 为极限点.

(2) 若 $OP = r\sqrt{2}$，则轨迹是一孤立点 K.

(3) 若 $OP > r\sqrt{2}$，则无轨迹.

例题 71　已知两个不等圆，小圆半径等于大圆半径的一半，小圆内切于固定的大圆而滚动；若在小圆上指定一点，求这点随小圆而动的轨迹①.

题设　$\odot O(r)$ 是定圆(图 423)，$\odot O'(r')$ 内切于这定圆而滚动，P 是 $\odot O'$ 上指定的点；两圆半径适合关系 $r' = \frac{1}{2}r$.

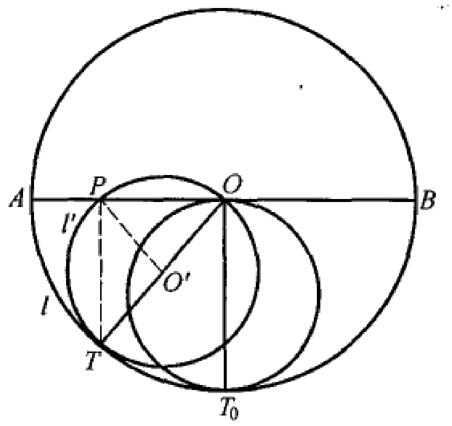


图 423

题求　点 P 的轨迹.

探求　在小圆滚动的过程中，总有一个时刻，点 P 刚好接触于大圆，我们把点 P 的这个特别位置记作 A. 从此以后，小圆再滚动本身的一周，点 P 又要落在大圆上，我们把 P 的这个位置记作 B. 题设 $r' = \frac{1}{2}r$，那么(§21 定理 135 推论).

$$\overset{\frown}{AB}\text{ 的长} = \odot O'\text{ 的周长} = 2\pi r' = \pi r = \odot O\text{ 的半周长}$$

可见 AB 是 $\odot O$ 的直径. 因此如果小圆继续滚动的话，点 P 便会循环地在 A，B 两点碰着大圆.

设 T 是 $\odot O'$ 与 $\odot O$ 的切点，则 OT 永远是小圆的直径. 在小圆滚动的中途，总有一个时刻，小圆内切大圆于 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 T_0，此时

$$\overset{\frown}{T_0O}\text{ 的长} = \pi r' = \frac{1}{2}\pi r = \overset{\frown}{T_0A}\text{ 的长}$$

这表示点 P 在此时恰好重合于点 O.

上面我们已察知 A，O，B 都是轨迹的点，而它们明明在一条直线上，点 P 又绝不能超出大圆之外，由此想见所求轨迹很可能就是线段 AB.

证明　(1) 完备性.

① 一般地说，如果两圆半径无此限制，这轨迹便是内摆线，或叫内旋轮线.

如上所述,我们先标出 A,B 两点,并联结它们,这时 AB 是 $\odot O$ 的直径.设 T 是某一时刻两圆的切点,而假定 $\overset{\frown}{TA}$ 的长小于大圆周长的$\frac{1}{4}$.今有 l 和 l' 分别表示$\overset{\frown}{TA}$ 和$\overset{\frown}{TP}$ 的长,则下式永远成立

$$l' = l \qquad ①$$

联结 OP,OT,$O'P$.因 O' 在 OT 上,且

$$r' = \frac{1}{2}r \qquad ②$$

故小圆永远通过大圆的中心 O.根据 ① 和 ②,并采用弧制,得

$$\angle TO'P = \frac{l'}{r'} = 2 \cdot \frac{l}{r}$$

由此 $$\angle TOP = \frac{1}{2}\angle TO'P = \frac{l}{r} = \angle TOA$$

因而点 P 落在大圆的半径 OA 上.

再若$\overset{\frown}{TB}$ 的长小于大圆周长的$\frac{1}{4}$,则同理可证点 P 落在大圆的半径 OB 上.

以上说明了无论在什么时刻点 P 都落在线段 AB 之上.

(2) 纯粹性.

在线段 OA 上任取一点 P,过 P 引 AB 的垂线设交大圆于 T.联结 OT,以之为直径画圆,这圆必通过 P 并且内切大圆于 T,可见它是小圆在滚动中的一个位置.现在我们的目的是要证明 P 是小圆上所指定的点.要证实这件事,只需证明$\overset{\frown}{TP}$ 与$\overset{\frown}{TA}$ 的长相等,即是证 $l' = l$ 便可.然而这是十分明显的,因为据 §21 定理 137 便马上得到

$$l' = \alpha r' = \frac{1}{2}\alpha r = l$$

其中 α 表 $\angle TO'P$ 所含的弧数.所以线段 OA 上的点合条件.

同理,线段 OB 上的点也合条件.

由(1),(2) 两步的证明,知点 P 的轨迹是大圆的一个直径(AB).

注 A,B 两点并非轨迹的临界点.

习 题 22

1. 一三角形内接于定圆且有一边固定,求这三角形的重心、九点圆心、内心的轨迹.

2. 过定圆内一定点作弦 AB,在弦两端作圆的切线设交于 C,求 $\triangle ABC$ 的垂

心的轨迹.

3. 设 A, P 两定点不在定圆 $\odot O$ 上,过 P 引割线交 $\odot O$ 于 B, C,求 $\triangle ABC$ 的外心的轨迹.

4. 设三角形有一边是定圆的直径,该边所对的顶点是不在定圆上的定点,求这三角形的外心、垂心、九点圆心的轨迹.

5. 设 A, B, C 是定圆上的三定点.过 C 任作直线交直线 AB 于 P 而交定圆于 Q,求 $\triangle APQ$ 及 $\triangle BPQ$ 的外心的轨迹.

6. 设三角形有定外接圆和定内切圆,试求它的九点圆心(提示:应用复习题 3 第 21 题.)、垂心、重心、三个旁心的轨迹.

7. 设三角形的一边固定,对顶点与垂心有一定的距离,求对顶点与垂心的轨迹.

8. 设三角形内接于定圆且以某定点为垂心,求这三角形各边中点的轨迹.

9. 设 D 是定直角三角形 $\triangle ABC$ 的弦 BC 上的任意点,自 D 引线垂直于 BC 而交直线 AC, AB 于 E, F,求 BE 与 CF 的交点 P 的轨迹.

10. 设三角形的底边固定,两腰的差等于定长,求底边两端在顶角平分线上的射影的轨迹.

11. 在定三角形内部,求至一边(所在直线)的距离等于至另两边(所在直线)的距离和的点的轨迹.

12. 在定等腰三角形内部,求至底边的距离等于至两腰(所在直线)的距离之比例中项的点的轨迹.

13. $\triangle ABC$ 是固定的正三角形.求适合下列条件之一的点 P 的轨迹:

(1) $PA = PB + PC$;

(2) $PA = |PB - PC|$.

14. C 是定线段 AB 上的任意点.设在 AB 的同侧作正三角形 $\triangle ACE$ 及 $\triangle BCF$,求 AF 与 BE 的交点 P 的轨迹.

15. 设 C 是定线段 AB 上的任意点,$\triangle ACE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形.当这两个三角形在 AB 的同侧或异侧时,求 EF 线段的中点的轨迹.

16. 设 A, B 是定直线 l 上的两定点,C 是 l 上的任意点,$ACEF$ 和 $BCGH$ 都是正方形.当这两个正方形在 l 的同侧或异侧时,求 EG 线段的中点的轨迹.

17. 设正三角形有一顶点固定,另一顶点在定圆上,求第三顶点的轨迹.

18. 设三角形的底边固定,顶角等于定角.今以一腰为边向外侧作正方形,求这正方形其他两顶点的轨迹.

19. 设 $\square ABCD$ 的边 BC 固定,而 $\angle BAC$ 等于定角,求点 D 的轨迹.

20. 设梯形有一底固定,而高和另一底分别等于定长,求对角线交点的轨迹.

21. 设梯形有一底固定,而另一底和一腰分别等于定长,求对角线交点的轨迹.

22. 设梯形有一腰固定,而两底分别等于定长,求对角线交点的轨迹.

23. 设梯形有一底固定,另一底等于定长,两腰之比为常数,求对角线交点的轨迹.

24. 设矩形有一顶点固定,而与这顶点相邻的两顶点同时落在一个定圆上,求第四顶点的轨迹.

25. 设两个等积三角形有一公共顶点,两对边各是固定的线段,求该公共顶点的轨迹.

26. A,B 是两定点. 设点 P 合于 $PA^2-2PB^2=k$, k 是常数,求点 P 的轨迹.

27. 设 P 是定圆上一定点, AB 是动弦,合于 $PA^2+PB^2=k$, k 是常数,求弦 AB 的中点的轨迹.

28. 设有一动线段,它的两端分别着于已知两同心圆的周上,且对某定点恒张开直角,求这线段的中点的轨迹.

第三节　求法与检查

§59　探求轨迹的方法

轨迹问题的难处并不在于证明,两面(完备性和纯粹性)证明不过是多费一点工夫罢了. 那么,困难究竟在哪里呢?在于一般轨迹命题往往不说出轨迹是什么. 因此,摆在轨迹问题中的首要任务,应是怎样探求轨迹;这是解决轨迹问题过程中最重要的一环,也是比较不易掌握的一环. 在上节里所举的一些例题中,我们也曾实地做过一些具体的探求工作,但是还没有把它作为一般的方法来讨论. 所以就这方面来研究其中的一些基本法则,由此寻觅探求轨迹的门径,是有必要的. 现在分论如下.

Ⅰ. 描迹

按照题设条件作出相当数量的轨迹的点,然后就其布列形势,连以光滑线条,则轨迹的形状,可得见其大概. 这种作图过程,叫做描迹. 描迹是探求轨迹的最直接而且很有效的方法,它往往可以启发我们的思路,指出解决问题的途径.

描迹时,宜特别注意下列几点:

(1) 对称形势. 所求轨迹,就已知图形来看,往往有上下对等、左右相称的

形势. 例如, § 57 例题 64 的轨迹, 上下无差等; § 58 例题 69 的轨迹, 左右相同. 似此之类, 由上可知下, 因左以得右, 这对于推测轨迹的形状和位置, 是有很大帮助的.

例题 72[①] 设一点至两定点的距离的平方和等于定长线段的平方, 求该点的轨迹.

假设 A, B 是两定点(图 424), P 是适合关系 $PA^2 + PB^2 = a^2$ 的点, 其中 a 是定长的线段, 要求点 P 的轨迹.

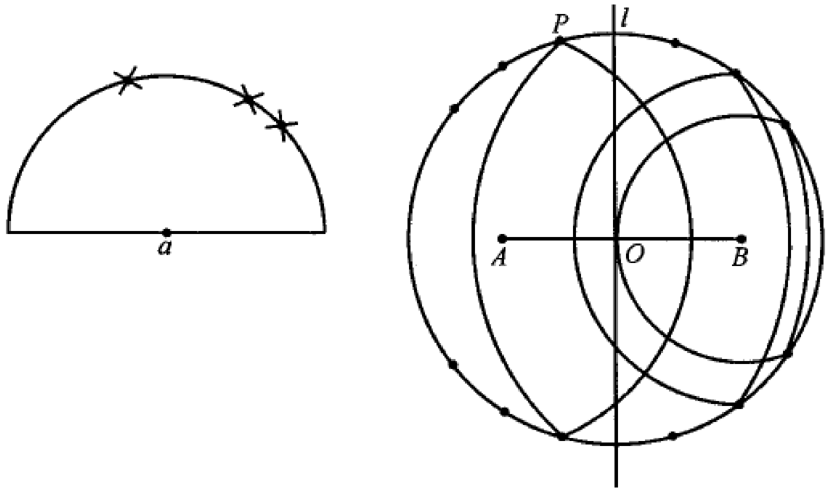


图 424

显然, 点 P 的轨迹, 既关于直线 AB 对称, 也关于 AB 线段的中垂线 l 对称. 欲描出点 P, 可用 a 为直径画半圆, 在半圆上随意取点, 而以此点至 a 两端的距离各为半径, 分别以 A, B 为圆心画弧, 如其相交, 那么交点就是所要的点 P. 由于点 P 的轨迹上下左右均对称, 描出一点, 即得四点(可能发生重合情形), 因此只需作出少数的几个点来, 便能很快地发觉所求轨迹是一个圆, 它的中心正好居于 AB 线段的中点 O.

(2) 极限状态. 当图形中的某些已知件依照条件渐渐变动时, 要仔细审察它有无极限状态, 因而有无极限点的产生. 一旦发现了极限点而把它描出来, 对于了解轨迹的情况将起到一定的作用. § 58 例题 68 中的点 X_0 就是例子.

(3) 临界位置. 轨迹的临界点, 有限制轨迹的作用, 因此十分重要, 必须设法描出, 忽略了临界点, 最易陷入错误; 发现了它, 往往可定大局. 例如 § 58 例题 69 中的 B_0, C_0 两点, 在探求轨迹的过程中, 无疑地它们起了决定性的作用.

① 以后所举的例子, 目的在于说明其中某些关键性的问题, 所以不再像上节那样按照格式把解法步骤一一写出来了. 但这只是针对另外的目的所行的办法, 当然不适用于普通演题的场合.

例题 73 AB 是定半圆形的直径(图 425). 自这直径任何一方延长线上的任意点 Q 向半圆引切线 QR,设半圆的圆心 O 在 $\angle OQR$ 的平分线上的射影为 P,求点 P 的轨迹.

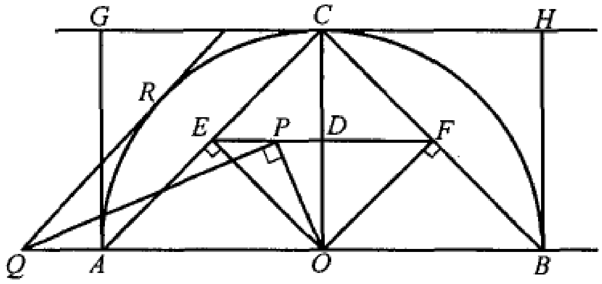


图 425

设想点 Q 趋近于 A 或 B 时,QR 便渐近于极限位置 AG 或 BH(均垂直于 AB). 若命半圆的中点为 C,则 AC 及 BC 显然各是 $\angle OAG$ 及 $\angle OBH$ 的平分线,这时圆心 O 在 AC,BC 上的射影就是这两弦的中点 E,F,因为点 Q 不能侵入 AB 线段之内,所以 E,F 无疑的是轨迹的临界点,再令点 Q 渐趋于无穷远,QR 就要渐近于极限位置 —— 切半圆于 C 的切线,这时 $\angle OQR$ 的平分线也渐近于极限位置 —— 半径 OC 的中垂线. 然而 O 在这中垂线上的射影明明就是半径 OC 的中点 D,那么 D 当是轨迹的极限点了. 现在既然发现轨迹有两个临界点和一个极限点,并且又不难知道这三个点是共线的(§ 56 例题 59),因而点 P 的轨迹很可能是线段 EF.

(4) 特殊情形. 轨迹上每每有个别的点特别显著,它们可以启发我们在摸索途中的思维. 凡此等处,都值得我们留心. 例如 § 57 例题 64 中的 Q,R 两点,例题 65 中的点 Q, § 58 例题 68 中的点 P_0,例题 69 中的点 A,例题 71 中的 A,O,B 三点等.

极限点,临界点,特殊点,可以看做轨迹上的"静点",其他一般的点则视为"动点". 当我们把一些静点掌握之后,那么其他动点往往就因此被烘托出来,于是轨迹的大概形势,就差不多了然于胸了. 这叫做"动中求静,以静窥动",是探求轨迹的一个极其重要的法则,掌握了它,许多问题便都能够迎刃而解.

Ⅱ. 轨迹形状的鉴定

除了描迹能够窥见轨迹的大概形势外,我们还可以根据图形固有的属性来帮助鉴定轨迹的形状. 按初等平面几何范围里面所讨论的轨迹,分拆开来不外直线、射线、线段、圆、圆弧、孤立点六种,前两者均可伸到无穷远,而后四者则不

然，这是它们最显著的特性. 根据这个事实，可以建立三条判断轨迹大局的原则[①]:

(1) 若轨迹由某两直线的交点组成，可看这两直线在设定条件下是否有平行的可能，如其可能，则表示轨迹能伸到无穷远，此时轨迹非直线即射线；不然轨迹便是线段、圆、圆弧等.

例题 74 通过定圆内一定点 P 作弦 AB，在弦的两端引圆的切线，求切线交点的轨迹.

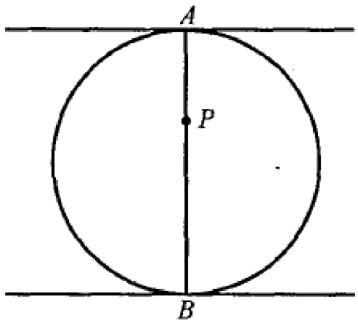


图 426

显然，当 AB 恰好是定圆的直径时(图 426)，所引两切线便互相平行，所以轨迹能达无穷远. 由此想见轨迹或是直线或是射线，二者必居其一.

(2) 若描轨迹的点属于某变动图形，可看这图形变动时能否把该点带到无穷远，能够的话，轨迹必然是直线或射线；否则不外线段、圆、圆弧等.

例题 75 设正三角形 $\triangle ABC$ 的顶点 A 固定(图 427)，B 在定直线 l 上，求 C 的轨迹.

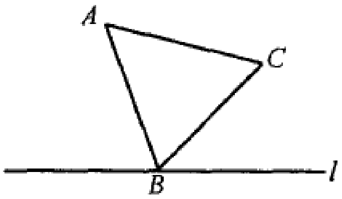


图 427

当点 B 在直线 l 上趋于无穷远时，$\triangle ABC$ 的边长便趋于无限大，因此点 C 可以趋于无穷远. 于是逆料轨迹必属直线或射线之类.

(3) 先设想描轨迹的点一旦趋于无穷远时，会影响已知条件发生什么变化，而后看这种变化能否见容于题设，若与题设不相容，便断定轨迹只能局于一区；如果题设容许这种变化，而且在这种情形下该点确能达到无穷远，则轨迹是直线或射线，可以无疑.

例题 76 设 A 是定圆上的定点(图 428)，P 是这圆上的动点. 在直线 AP 上有点 Q，合于 $\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=k$，$k$ 为常数，求 Q 点的轨迹.

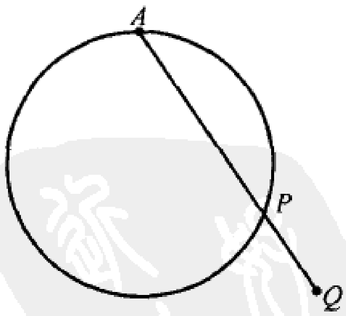


图 428

设想点 Q 趋于无穷远，$\overline{AQ}$ 便要趋于无限大，这时由条件 $\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=k$，$\overline{AP}$ 必须趋近于零. P 既是定圆上的动点，它自然可以与点 A 无限接近，故 $\overline{AP}$ 趋近于零是题设所能容许的. 当 $\overline{AP}$ 一旦趋近于零，那么直线 AP 即趋于定圆的切线，同

① 这三条原则只适用于初等平面几何.

时$\overline{AQ}$趋于无限大，也就是说，这时点 Q 在该切线上将趋于无穷远. 因此轨迹是直线或射线，殆无疑义.

Ⅲ. 轨迹的定位

轨迹形状既经鉴定之后，进一步还须把它定位，然后才能进行证明的工作. 定位的要件如表 9 所示.

表 9

轨迹	直线	射线	线段	圆	圆弧	孤立点
定位要件	1. 两点 2. 一点及方向	1. 端点及另一点 2. 端点及方向	同端点	1. 中心及半径 2. 一直径 3. 一弦及所对圆周角 4. 三点	1. 两端点及内接角 2. 两端点及另一点	位置

例如，§58 例题 68，求得两点；§57 例题 65，知道一点及方向，轨迹（直线）于是乎确定了. §58 例题 71，探得两端，轨迹（线段）的端倪便显露出来. §57 例题 64，发现一直径所在；§58 例题 70，获知圆心及半径，轨迹（圆）即完全定位. §58 例题 69，估定了两端及另一点，立知轨迹（圆弧）的所在.

§60　间接求迹法

对于轨迹问题，固然都可以运用上面所述方法去探求轨迹，但有时也可用另一种巧便的方法更快地把轨迹发现出来. 这种方法的巧处是借图形中另外某些点的已知轨迹，来烘托出我们所求的轨迹，因此叫做**间接求迹法**. 运用这种方法，第一需要洞悉图形的性质，第二需要娴熟普通的轨迹，然后才能得心应手. 现在举两个例子作为运用此法的榜样.

例题 77　设矩形有一边落在定三角形的底边上，另外两顶点分别落在两腰上[①]，求矩形中心的轨迹.

假设$\triangle ABC$是定三角形（图 429），矩形 $EFGH$ 的边 FG 落在该三角形的底边 BC 上，顶点 E，H 分别落在两腰 AB，AC 上. 现在要求这矩形的中心即 EG 与 FH

① 在这情形下，定三角形的两底角必然都非钝角.

的交点 O 的轨迹.

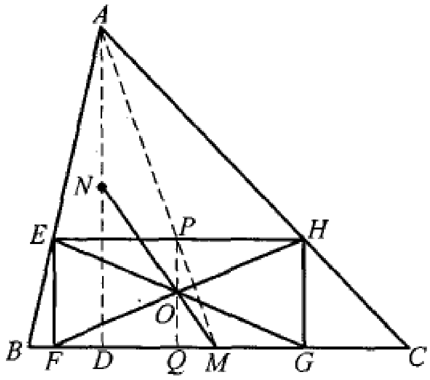


图 429

当矩形 $EFGH$ 变动时,它的对角线的长度以及它们与定三角形的边做成的角都随之而变,因此一时很不易摸透点 O 的变化规律.这告诉我们,要直接推测所求轨迹是比较困难的,所以不妨用间接求迹法试试看.

上面说过,运用间接求迹法,第一要洞悉图形的性质.我们知道,矩形不仅是中心对称图形,而且还是轴对称图形(§9定理43和45),普通用对角线来决定它的中心,是为作图方便,其实用对称轴也可以决定它的中心的.现在设 P,Q 各是 EH,FG 的中点,那么 PQ 直线就是矩形 $EFGH$ 的一条对称轴,而 O 正是 PQ 线段的中点.不论矩形 $EFGH$ 怎样变动,PQ 永远垂直于 BC,这就使点 O 和 $\triangle ABC$ 的边 BC 有了一定的关系.如果我们能够知道点 P 的轨迹,那么点 O 的轨迹也就会因此被烘托出来.于是其次我们就非得娴熟普通的轨迹不可.试问点 P 的轨迹是什么样的呢?由于 P 是 EH 的中点,而且 EH 永远平行于 BC,这就很容易知道点 P 的轨迹是 $\triangle ABC$ 的中线 AM,其中 M 是 BC 的中点(习题20第10题).这样一来,可引 $AD \perp BC$ 于 D,并设 N 是 AD 的中点,则根据前边同样的理由,立可测知点 O 的轨迹是线段 MN 了.

例题 78 半径一定且互相外切的两个等圆,同在定直角的里面各切于一边而移动,求两圆切点的轨迹.

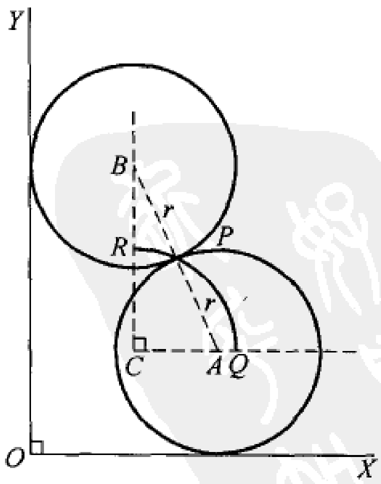


图 430

假定 $\angle XOY$ 是定直角(图 430),合乎条件的两圆是 $\odot A(r)$ 和 $\odot B(r)$,前者切于边 OX,后者切于边 OY,且彼此外切于 P.当两圆移动时,点 P 在两圆上的位置也跟着改变,因此它的轨迹似乎难以捉摸.可是如果我们先不看 P 而改观察 A 和 B,那么当 $\odot A(r)$ 和 $\odot B(r)$ 移动时,A 的轨迹是平行于 OX 的一条线段,B 的轨迹是平行于 OY 的一条线段(§55(4)),这两条线段显然有一共同的端点 C.有了这些"辅助轨迹",进一步又发现 $\angle ACB$ 是一个直角,P 是线段 AB 的中点,而且 $AB = 2r$,这就和 §56 的

例题 63 相仿佛了. 至此,我们当初认为难以捉摸的轨迹,现在居然真相毕露,实际上它就是以 C 为圆心,r 为半径而嵌在 $\angle ACB$ 内的一段弧 $\overset{\frown}{QR}$,只不过 Q,R 与前不同,此时不是临界点而已.

§ 61　轨迹的界限问题

轨迹如果有临界点,就意味着轨迹在这个地方要间断. 于是产生一个问题,怎样知道轨迹有临界点呢?这是轨迹的界限问题,界限不清,可说是许多错误的根源,因此这个问题首应值得我们注意. 现在先来看一个例子:

例题 79　设 BC 是定圆中的定直径(图 431),A 是这图上的动点,P 是 $\triangle ABC$ 对着 A 的旁心,求 P 的轨迹.

根据三角形旁心的性质(习题 2 第 21 题),我们得知

$$\angle BPC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

再据 §55 的基本轨迹命题(6),似乎点 P 的轨迹就是以 BC 为弦而内接角等于 45° 的两个弓形弧了.

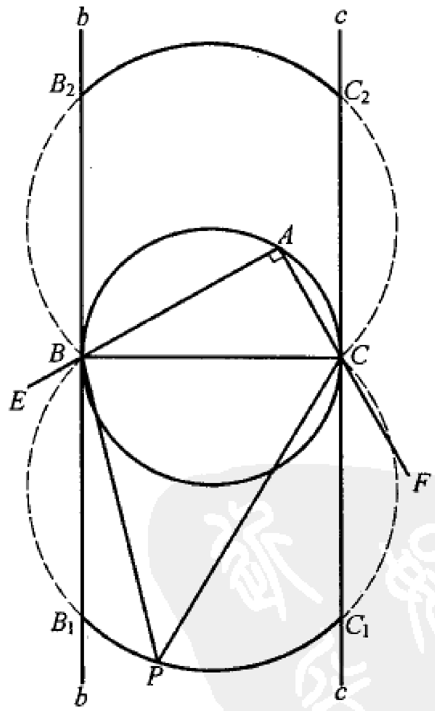


图 431

然而事实上并不完全是这样的. 由于这解法没有注意临界点,因而所得的是有瑕的轨迹,怎样知道呢?试看,当 $\triangle ABC$ 变动时,不论它的形状如何,外角 $\angle CBE$ 永远小于二直角,而 $\angle PBC$ 等于这角的一半,那么后者必然永远是锐角;同理知 $\angle PCB$ 也永远是锐角. 这样一来,若过 BC 的端点作定圆的切线 b 及 c,则可见所求轨迹只能是上面所说两个弓形弧的一部分,即夹于平行线 b 与 c 之间的两段劣弧 $\overset{\frown}{B_1C_1}$ 和 $\overset{\frown}{B_2C_2}$,这两弧的端点应是轨迹的临界点.

这说明了当初所得轨迹,它的纯粹性不确. 考其致误的根由,在于我们看见点 A 的移动是连续的(极限位置在内),因而认为点 P 的轨迹也应该没有间断. 这种错误实由于解题疏忽没有认清轨迹界限所招致而来.

从这例子知道,尽管图形中某已知件的移动是连续的,但由此所产生的轨

迹仍有间断的可能. 下面我们再来看一个相反的例子:

例题 80　设 BC 是定半圆形的直径(图432), O 是圆心, A 是半圆上的点. 引 $AD \perp BC$ 于 D, 并在线段 OA 上截 $OP = AD$. 试问当 A 沿着半圆从 B 移动到 C 时点 P 的轨迹为何?

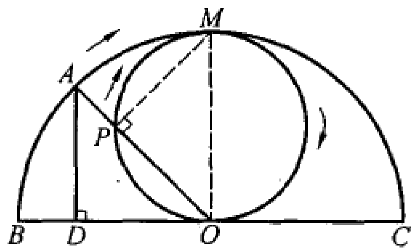


图 432

设想 A 在 B 处未动的时候, 自然

$$OP = AD = 0$$

可见这时 P 与 O 重合. 令 A 向前移动, 在它达到 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点 M 时, AD 显然即是 MO, 此时 P 应合于 M. 一旦 A 达到最后位置 C 时, 又得

$$OP = AD = 0$$

于是 P 又和 O 重合. A 在途中的时候, 因为

$$OM = OA, OP = AD$$

且
$$\angle MOP = \angle OAD$$

所以
$$\triangle MOP \cong \triangle OAD$$

从而
$$\angle OPM = \angle ADO = 90^\circ$$

这就表示点 P 应在直径为 OM 的圆上. 不难知道, 点 P 的轨迹也就是这个圆.

这个例子表现着恰和上例相反的一种现象: 虽然图形中某已知件移动时起讫位置并不衔接, 但是由此所产生的轨迹不见得就有间断.

在上面两个例题里为什么会发生那些现象呢? 其中原因是移动的已知条件和描轨迹的动点间的"一一对应"关系在某一时刻被破坏了. 在例题 79 中, 定圆上的点 A 和描轨迹的点 P 间一般都成一对一的对应, 唯独当 A 一旦到了 B 或 C 时, 由于 $\triangle ABC$ 处于极限状态啦, 使得轨迹突然产生两个临界点, 此时 A 和 P 间便变成了一对二的对应关系, 于是轨迹自然要发生崩裂现象. 在例题 80 中, 半圆上的点 A 和描轨迹的点 P 间一般也都成一对一的对应; 只是当 A 在 B 或 C 时, 因为前后两个 OP 都等于零啦, 才使得两个点 P 都重合于 O, 而变成二对一的对应关系了, 所以点 P 能够描出循环无端的轨迹.

细察移动的已知件的描轨迹的动点间的对应关系, 对于考虑轨迹的界限问题有极大的帮助. 但是审察这种对应关系, 究竟着眼于哪个移动的已知件, 必须因地制宜, 具体地分析具体的情况. 归纳起来, 我们得出这样的一个原则:

"欲从某个移动的已知件的变化来推测轨迹的形势, 要先问该已知件与描轨迹的动点间是否永远保持一对一的对应. 假若是的话, 则已知件和动点的变

化,如连续、间断,无不一致;如其不然,未必一致."

这个原则在提醒我们,探求轨迹的时候,必须精心分辨,一点不得马虎.当已知件和动点间的对应关系发生变化时,要当心轨迹产生临界点,临界点是轨迹要停歇的标志.但应记着,没有临界点并不象征着轨迹没有端点,譬如 §58 的例题 71 和 §60 的例题 78 便是佐证.

§62 题解的检查

完备性和纯粹性,原是轨迹固有的基本属性,故断定轨迹时,必须切实注意求得的点集不缺不滥,不然欠缺合条件的点就不称完备,滥有额外的点便有伤纯粹.虽然大道理很明白,但是到了具体的问题上却最容易犯这些弊病.欲预防错误,就需要深入地检查题解,切戒草草了事.检查的重点,不外以下两方面:

Ⅰ.易犯的错误

产生错误的原因,除了 §61 所述的界限不清外,还有审题粗心、考虑欠周、忽略存在这几种情形.现在为了解说具体一点,举出一些实例来说明.

例题 81 将一个已知大小的圆放在定矩形的外边使它沿着矩形的周界滚动,求圆心的轨迹.

假设 $ABCD$ 是定矩形(图 433),$\odot O(r)$ 是所设的圆.乍看这个问题,也许认为十分简单.看!当 $\odot O(r)$ 滚动时,圆心 O 与矩形 $ABCD$ 各边的距离既然都等于 r,谁还不知道点 O 的轨迹就是图中的矩形 $A'B'C'D'$ 呢?然而仔细推敲起来,事实并不完全是如此.试把 $ABCD$ 的各边向两边延长,抵于 $A'B'C'D'$ 的周界而止,如图 433 得 $E,E',\cdots,H,H'$ 等八点.今令 $\odot O$ 沿着边 AB 滚动,这时圆心 O 的轨迹是线段 $E'F$ 的确不错;但当 $\odot O$ 要拐弯转向边 BC 滚动时,圆心 O 并不向 FB' 移动,因为否则 $\odot O$ 就要离开 $ABCD$ 的周界(实际切于线段 BF')了,可见此刻点 O 只能沿着一段以 B 为圆心,r 为半径的弧从 F 滑动到 F'.每当 $\odot O$ 拐弯时,点 O 都要滑过一段这样的弧.由此知道,点 O 的轨迹实是由四条线段和四段圆弧

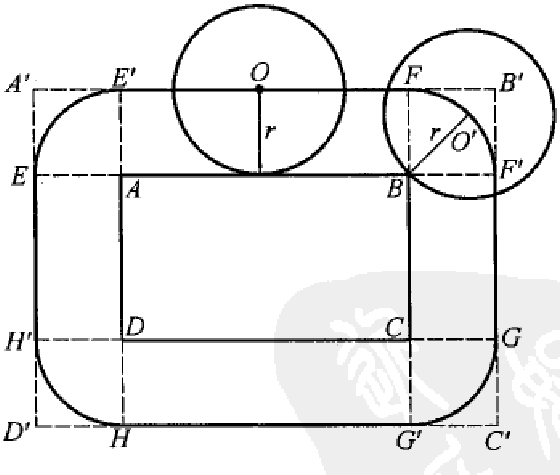


图 433

联结成的一个"圆角矩形".

当初的错误在于审题粗心.一看见题目,没有细味题文,便贸贸然以为简单,终而铸成错误.殷鉴在前,谨慎为要.

例题82 设将一个已知形状大小的Rt△ABC放在定直角$\angle XOY$的里面移动(图434),使弦AB的一端A着于边OX上,另一端B着于边OY上,且令C,O两点分在AB的两侧,求点C的轨迹.

由题设,推知A,B,C,O四点共圆,因此

$$\angle XOC = \angle ABC$$

为常量.可见点C落在以O为端点的一条定射线上.再想到当A趋近于O时(相应的B趋近于B_1),C应趋近于临界位置C_1;又当B趋近于O时(相应的A趋近于A_2),C应趋近于另一临界位置C_2.由此看来,点C的轨迹不就是线段C_1C_2吗?

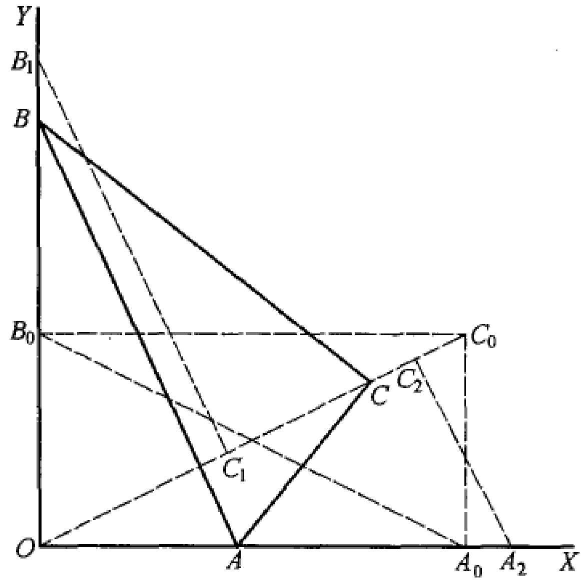


图 434

这对不对呢?我们来检查一下.OC_1和OC_2分别等于已知直角三角形的勾和股,点C的轨迹若真是线段C_1C_2的话,那就表明OC的长要介于已知直角三角形的勾和股之间.当Rt△ABC移动时,OC的长自然要起变化,但试问它最长能有多长?会不会长于已知直角三角形的勾和股?事实上,OC是$\odot ABC$的弦,这圆的大小不变,OC最长可以等于圆的直径AB,这情形将发生于Rt△ABC移动到Rt△$A_0B_0C_0$的位置使得$OA_0C_0B_0$恰形成矩形的时候.这时OC_0显然长于OC_1和OC_2于是点C_0必落在线段C_1C_2之外,可见当初的想法有错.

经过检查之后,我们发现了点 C 的轨迹实际应该是线段 C_1C_0(当 $AC \leqslant BC$ 时)或线段 C_2C_0(当 $AC \geqslant BC$ 时)而 C_1 或 C_2 是临界点.如果说得更正确一点,可说轨迹是一条"降格的"折线 $C_1C_0C_2$.

原先想法的错误是由于考虑欠周.虽然像这样的例子不多,但是我们考虑任何问题都应该周密细致.

例题 83 有同心的两定圆,自其大圆外一点向这两圆各引一条切线(射线),设这两切线的夹角等于定角,求该点的轨迹.

假设 $\odot O(R)$ 和 $\odot O(r)$ 是同心的大小两定圆(图 435),P 是大圆外的点,切线 PA 切大圆于 A,PB 切小圆于 B,且

$$\angle APB = \varphi$$

为定量.现在要求点 P 的轨迹.

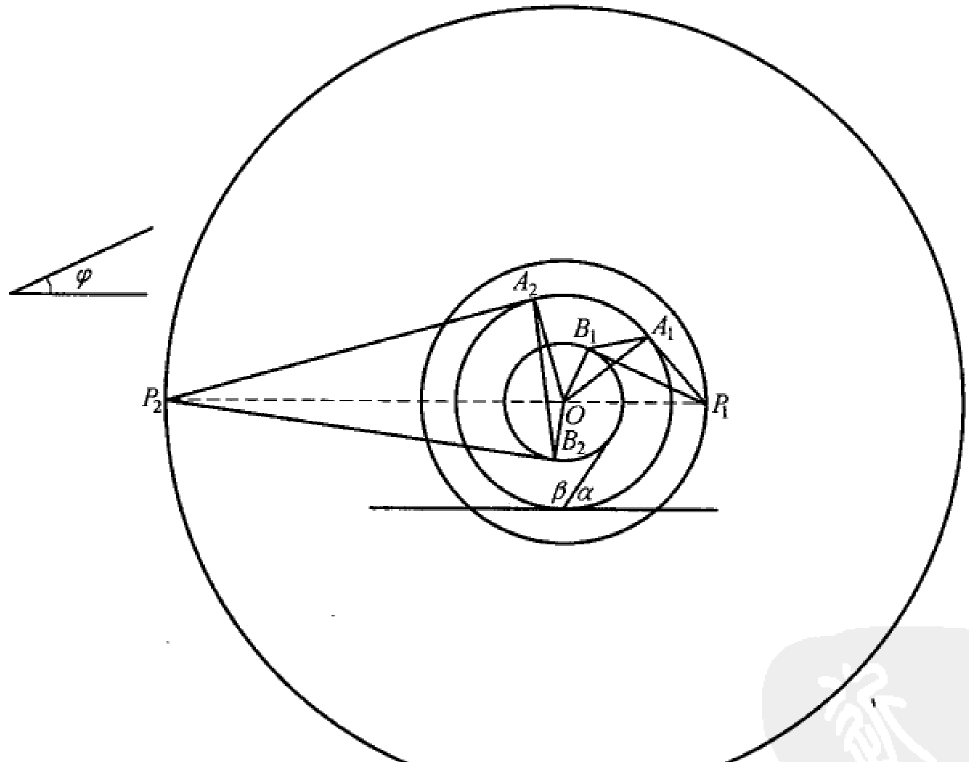


图 435

联结 OA,OB,则因 $\angle OAP = \angle OBP = 90°$,知 O,P,A,B 四点共圆.于是因 A,B 两点处于 OP 连线的同侧或异侧而有

$$\angle AOB = \angle APB = \varphi$$

$$\angle AOB = 180° - \angle APB = 180° - \varphi$$

若连 AB,则所得 $\triangle OAB$ 中,有两边 OA,OB 分别等于 R,r,且夹角等于 φ 或 $180°-\varphi$,因而这三角形的形状大小完全确定(一般有两种形式).由上可知 OP 是 $\triangle OAB$ 的外接圆直径,那么 OP 应有一定的长度,所以点 P 的轨迹就是与定圆同心的两个圆,仅当 $\varphi=90°$ 时才合而为一.

这个结论常常能令人们置信不疑,人们置信的根据是因为已知两边及夹角的三角形永远存在.

然而实际情形有时仍要出人意表的,虽然已知两边及夹角的三角形永远存在,但是不能以此强加于本题而谓点 P 亦随之一定存在,什么道理呢?试过大圆上一点作大圆的切线,并自此点引小圆的一条切线,则这两条切线做成一个锐角和一个钝角.命做成的锐角为 α,钝角为 β.不难觉察,当 A,B 同在 OP 的一侧时,$\angle APB<\alpha$;当 A,B 分在 OP 的两侧时,$\angle APB<\beta$.由此可见只有 $\varphi<\alpha$ 时,上面的结论才是对的;如果 $\alpha\leqslant\varphi<\beta$,那么所谓轨迹是两个圆其实有一圆并不存在;一旦 $\varphi\geqslant\beta$,这时轨迹便化为乌有了.

初时的解法误在忽略存在.存在问题是一个非常重要的问题,忽略了它,往往会因此走入荒谬的境地,所以必须时刻警惕.

Ⅱ.代换条件的影响

大凡解轨迹问题,往往把所给条件,经过若干演绎步骤使转变为新的条件①,而这些新条件所决定的轨迹又是我们已经知道的,于是便根据这已知的轨迹来推断当前问题的轨迹.这种代换条件来寻求轨迹的方法虽然很省事,但是机械地使用它,不注意可能产生的影响,往往会得到错误的结果.譬如,§61 的例题79,当初机械地用条件"$\angle BPC=45°$"去代换条件"P 是 $\triangle ABC$ 对着 A 的旁心",结果便破坏了轨迹的纯粹性而得到有瑕的轨迹.经验告诉我们,代换条件常常会破坏轨迹的完备性或纯粹性,所以在代换的过程中必须步步提防,慎重行事.试看下例:

例题 84　在 $\triangle ABC$ 中(图 436),设边 BC 固定,$AD\perp BC$ 于 D,而

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=-\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \qquad ①$$

求点 A 的轨迹.

作 $BE\perp AC$ 于 E,$CF\perp AB$ 于 F,则易知 A,C,D,F 及 A,B,D,E 各为共圆点.由此

① 这些条件对问题本身来说是新的,但对解题者来说却是熟知的.

$$\overline{BA}\cdot\overline{BF}=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$$
$$\overline{CA}\cdot\overline{CE}=\overline{CB}\cdot\overline{CD}$$

以后式除前式,得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{FB}}{\overline{EC}}=-\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

与 ① 比较,可得$\frac{\overline{FB}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$,或改书如

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} \qquad ②$$

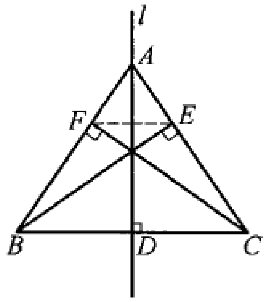


图 436

联结 FE,则由 ② 知 $FE // BC$;从而 $\angle AFE=\angle ABC$.又 B,C,E,F 四点共圆,应该 $\angle AFE=\angle ACB$.那么 $\angle ABC=\angle ACB$,于是

$$AB=AC \qquad ③$$

至此,根据 §55 的基本命题(1),会以为点 A 的轨迹就是边 BC 的中垂线 l.

这就是把条件 ③ 代换原来的条件 ①,然后由已知的基本轨迹命题来推断所求轨迹是直线 l,其实这样推断有欠完备.考 ③ 实从"$FE // BC$"得来,而"$FE // BC$"系由 ② 导出,上面的推证正是在这一步发生了问题,因为这里面没有考虑到 F,E 两点可能重合的情形.因此上面推得的结论实际是片面的.如果全面地考虑问题,我们应该而且必须问一问:F,E 两点能否重合?果有其事,则轨迹如何?

F 和 E 重合,必是重合于 A(图 437),而这三点重合为一,必须且仅须

$$\angle BAC=90° \qquad ④$$

试问这和题设条件相容吗?显然,当 ④ 成立时,② 也成立,可见我们的设想与题设条件并无抵触.所以 F 和 E 两点确能重合.正是在这种情形之下,"$FE // BC$"丧失了意义,因而无从产生 ③.由此晓得上面所得的其实是残缺的轨迹,其中漏掉了一群合乎 ④ 的点 A.这说明了用 ③ 去代换 ①,破坏了轨迹的完备性.

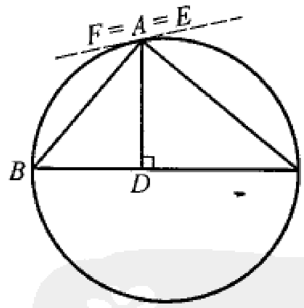


图 437

如上所述,由 ② 应该引得两个截然不同的结果:其一是 ③,由它得到边 BC 的中垂线 l;另一是 ④,由它得到直径为 BC 的圆.我们试回忆直角三角形的性质(§18 定理 123(3)),便会知道后者的论断确是理所当然的.总的说来,本题的轨迹乃是一条直线和一个圆所合成的,其中边 BC 的两端和中点都是极限点.

以上所举的几个例子,它们的初步解法的错误,表面上看来虽然形式不同,但是归根结底,都是因为不注意轨迹的完备性和纯粹性的并立而引起的.为着防止此类错误,在考察问题时,务求周密细致,面面顾到.已知的轨迹命题对我们欲发现轨迹有莫大的帮助,但是不能机械地依靠它来断定当前问题的轨迹.总的一句话,要保证题解不出错,必须严格地执行完备性和纯粹性都要证明的原则.这就是我们最后得出的一个颠扑不破的结论.

习题 23

1. 什么叫做描迹?描迹时要特别注意哪几件事项?

2. "动中求静,以静窥动"这句话是什么意思?

3. 除了描迹之外,还可以根据什么事实来鉴定轨迹的形状?

4. 试述各种轨迹的定位要件.

5. 什么叫做间接求迹法?欲能自如地运用这种方法,需要具备什么条件?

6. 欲从图形中某个移动的已知件的变化来推测轨迹的形势,必须注意什么?

7. 在题解上最易犯的错误有哪几种情形?

8. 代换条件来寻求轨迹可能发生什么影响?

9. 保证题解不出错,必须严格执行什么原则?

10. 完成 §59 例题 72、例题 73、例题 74、例题 75、例题 76 的解.

11. 并底定积的诸三角形,求其外心的轨迹.

12. 设三角形有一角固定,这角的对边有定长,求三角形的外心、垂心的轨迹.

13. 设三角形有一边固定,这边的对角等于定角,求三角形的垂心、九点圆心、三个旁心的轨迹.

14. 一三角形内接于定圆且有一边固定,求这三角形的三个旁心的轨迹.

15. 设三角形有一边固定,另两边之比为常数,求这三角形的重心的轨迹.

16. 设 AB 是定圆 $\odot O$ 的定直径,P 是这圆上的动点.引 $PQ \perp AB$ 于 Q,求 $\triangle OPQ$ 的内心的轨迹.

17. 设 AB 是定圆 $\odot O$ 的定直径,C 是这圆上的动点.引 $CD \perp AB$ 于 D,并在线段 OC 上截 $OP = OD$,求点 P 的轨迹.

18. 设 AB 是定圆的定直径,AC 是动弦.

(1) 若延长 AC 至 P,使 $CP = CB$,求点 P 的轨迹;

(2) 若在射线 CA 上截 $CQ = CB$,求点 Q 的轨迹;

(3) 若在射线 AC 上截 $AR = BC$，求点 R 的轨迹；

(4) 若延长 CA 至 S，使 $AS = BC$，求点 S 的轨迹.

19. 设△ABC 内接于定圆且边 BC 固定，求边 AC 的中点在 AB 直线上的射影的轨迹.

20. 设△ABC 内接于定圆且边 BC 固定，引 $BE \perp AC$ 于 E，$CF \perp AB$ 于 F，求线段 EF 的中点的轨迹.

21. 设△ABC 内接于定圆且边 BC 固定，在射线 BA 上截 $BM = m$，又在射线 CA 上截 $CN = n$，m，n 都是定线段，求线段 MN 的中点的轨迹.（提示：取 BC，BN 的中点帮助思考.）

22. △ABC 固定. M，N 各是射线 BA，CA 上的点，P 是线段 MN 上的点，若这三点适合条件 $MP = MB$ 且 $NP = NC$，求点 P 的轨迹.（提示：△ABC 的内心是符合条件的点.）

23. 已知一定圆和圆外一定点，过这定点作等于定圆的圆，求所作圆与定圆的公弦的中点轨迹.

24. 一已知圆绕其周上一定点旋转，按一定的方向作动圆的切线，求切点的轨迹.

25. 设一已知大小的正方形有一对对顶点分别着于定直角的两边上而移动，求另一对对顶点的轨迹.

26. 设一平行四边形各顶点顺序落在一个定四边形的四边上，且前者的边分别平行于后者的两对角线，求平行四边形的中心的轨迹.

27. 设△ABC 相似于定三角形△$A'B'C'$，且点 A 固定，点 B 在定值线 l 上移动，求点 C 的轨迹.

28. 设四边形 $ABCD$ 相似于定四边形 $A'B'C'D'$，且 A，B，C 三点分别在三条定直线上移动，求点 D 的轨迹.

29. 求在定三角形内与三边（所在直线）的距离和为定长的点的轨迹.

31. 一已知大小的圆 $\odot O(r)$ 切于定射线 AX 而滚动，自 A 另引射线切该圆于 B，在这射线上有一点 C 合于 $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = r^2$，求点 C 的轨迹.

31. 在△ABC 中，设边 BC 固定，$AD \perp BC$ 于 D，而 $AB^2 = BC \cdot BD$，求点 A 的轨迹.

32. 在△ABC 中，设边 BC 固定，$AD \perp BC$ 于 D，而 $\dfrac{\overline{AB^2}}{\overline{AD^2}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$，求点 A 的轨迹.

33. △ABC 固定，M，N 分别是 AB，AC 两边的中点. 过 A 作直线 l，引 $BE \perp$

l 于 E, $CF \perp l$ 于 F,联结 EM 与 FN 设交于 P.今将 l 绕 A 自原位置起旋转一直角而止,求点 P 的轨迹.

34. 过两定圆 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 的一交点 A 作直线 l 交两圆于 P 与 P',联结 PO 与 $P'O'$ 设交于 Q.今将 l 绕 A 自原位置起旋转一直角而止,求点 Q 的轨迹.

35. 过两定圆的一交点 A 任作直线 l 交两圆于 B, C,在 l 上截线段 $AP = \frac{1}{2}BC$,求点 P 的轨迹.(提示:过 A 作两圆公弦的垂线.)

复习题 4

1. 两圆互相外切且又同切一定直线于定点,求证:两圆切点的轨迹是一圆.

2. 以定圆上的点为心作定半径的圆,并作这圆的定向切线,求证:切点的轨迹是两个等圆.

3. 一点至相交两定直线的距离差(绝对值)一定,求证:该点的轨迹是八条射线.

4. 求证:内接于定圆且两边各有定向的三角形,它的内心的轨迹是四个轮回相切的圆弧.

5. 三角形的三边(所在直线)分别通过共线的三点,且有两顶点分别落在两条定直线上,求证:第三顶点的轨迹是一条直线.

6. 设 P, Q, R 是共线的三定点.过 R 引直线交两定平行线 a, b 于 A, B,求连线 PA 与 PB 的公共点的轨迹.

7. 设三角形的三顶点分别落在三条定直线上,且两边各有定向,求第三边中点的轨迹.

8. 设定线段 AB 垂直于定直线 l,在 l 上取点 P 与 A, B 相连,并作 $AX \perp AP$ 及 $BY \perp BP$,求 AX 与 BY 的交点的轨迹.

9. 设射线 AX, BY 同垂直于定线段 AB 且在 AB 的同侧,在这两射线上分别有点 P, Q 合于 $AP \cdot BQ = AB^2$,求 AQ 与 BP 的交点的轨迹.

10. 设 O 是两定平行线 a, b 外的定点.过 O 引互相垂直的两直线 x, y,命 x 与 a, y 与 b 的交点分别为 X, Y,求 O 在 XY 上的射影的轨迹.

11. 设一线段嵌于定角两边之间而移动,且对定角内一定点张开一定大小的角,求定点在该线段所在直线上的射影的轨迹.

12. 设定长线段嵌于定角两边之间而移动,自线段的端点作所在边的垂线,求所作两垂线的交点的轨迹.

13. 在相交于点 P 的两定直线上各取一点 A, B,使 $PA + PB$ 等于定长,再过

P 引直线平行于 AB 而交 $\odot PAB$ 于 Q,求点 Q 的轨迹.

14. $\triangle ABC$ 内接于定圆,且边 BC 固定.设 M 是 BC 的中点,N 是 AM 的中点,P 是 CN 与 AB 的交点,求点 P 的轨迹.

15. AB 是定圆的定直径.设任意切线 t 切定圆于 T,而 $BC \perp t$,求直线 AT 与 BC 的公共点的轨迹.

16. AB 是定圆的定直径,过 A 作切线 AQ,过 B 作直线交定圆于 C.在 BC 上取一点 P,引 $PQ \perp AQ$,若 $PQ = PC$,求点 P 的轨迹.

17. 设 A 是定圆 $\odot O$ 上的定点,l 是过 O 且垂直于 OA 的直线.自 A 引直线交 $\odot O$ 于 B,交 l 于 C,求过 B 所作 $\odot O$ 的切线与过 C 所作 l 的垂线之公共点的轨迹.

18. 设 AB 是定半圆形的直径,射线 AX 垂直于 AB 且与半圆同在 AB 的一侧.以半圆上的点为心作圆使切于射线 AX,再自 A 向所作圆另引切线,求切点的轨迹.

19. 求至两定圆有相等切线的点的轨迹.

20. 正交于一定圆而径割另一定圆的圆,求其圆心的轨迹.

21. 设 A 是定圆上的定点,B 是这圆上的动点.在过 B 的切线上有点 P 合于 $\dfrac{PA}{PB} = k$,k 是正常数,求点 P 的轨迹.

22. C 是定线段 AB 上的定点,P 是直线 AB 外的点.若 $\angle APB$ 与 $\angle BPC$ 互补,求点 P 的轨迹.

23. 设两定点对一圆的视角各等于定角,求圆心的轨迹.

24. $\triangle ABC$ 内接于定圆,且边 BC 固定.以 AB 为弦作圆使切于 AC,又以 AC 为弦作圆使切于 AB,求所作两圆第二交点的轨迹.

25. A,B 分别是定直线 a,b 上的定点,P 是与 A,B 共线的定点.过 P 作直线交 a,b 于 X,Y,求 $\odot PAX$ 与 $\odot PBY$ 第二交点的轨迹.

26. 已知 $\triangle ABC$ 及一点 P,过 P 作直线交直线 AB,AC 于 Q,R,求:

(1)$\odot PQB$ 与 $\odot PRC$ 的第二交点的轨迹;

(2)$\odot PQA$ 与 $\odot PRC$ 的第二交点的轨迹;

(3)$\odot PRA$ 与 $\odot PQB$ 的第二交点的轨迹.

(提示:应用 §48 例题 49.)

27. P 是甲乙两定圆的一交点,B,C 各是这两圆上的定点.过 P 作直线交甲圆于 Q,交乙圆于 R,求连线 BQ 与 CR 的交点的轨迹.

28. 甲乙两定圆交于 P,Q,A 是甲圆上的动点,联结 AP,AQ 交乙圆于 B,C,

求弦 BC 的中点的轨迹.

29. 设矩形各边(所在直线)分别通过四定点,求各边中点和矩形中心的轨迹.(提示:应用习题 21 第 17 题.)

30. 设 P 是定圆内的定点.过 P 作定圆的弦 AB,又分别以 AP,BP 为弦作圆使切于定圆,求所作两圆第二交点的轨迹.

31. 自定圆外一定点 A 作割线 ABC,过弦 BC 的中点 M 引 $MP \perp BC$,若 $MP = MA$,求点 P 的轨迹.

32. 自定圆外一定点 P 作割线 PAB,在弦 AB 的两端引定圆的切线,求切线交点的轨迹.

33. A 是定圆上的定点,P 是这圆内的定点.过 P 作定圆的弦 BC,求 $\triangle ABC$ 的重心、垂心的轨迹.

34. 设 O 是两定直线 a,b 的交点,P 是线外的定点.通过 O,P 两点作圆设交 a,b 于 A,B,求:

(1) 弦 AB 的中点的轨迹;

(2) $\triangle OAB$ 的重心的轨迹;

(3) $\triangle OAB$ 的垂心的轨迹.

35. 设 P 是定凸四边形 $ABCD$ 内部的点,合于 $S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PBC}$,求点 P 的轨迹.(提示:轨迹通过对角线的中点.)

36. 已知两同心圆,P 是内圆上的定点,A 是内圆上的动点.过 P 且垂直于 PA 作外圆的弦 BC,求线段 AB 和 AC 的中点的轨迹.

37. 设 A,B 是两定点,P 是合于 $a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 = k$ 的点,其中 a,b,k 都是常数,求点 P 的轨迹.(提示:应用习题 18 第 20 题.)

38. 设 $\triangle ABC$ 是定三角形,P 是合于 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = k$ 的点,其中 k 是常数,求点 P 的轨迹.(提示:应用习题 18 第 21 题.)

39. 已知 $\triangle ABC$ 及一点 P.设 l 是过 P 点的直线,M 是 l 上当 $MA^2 + MB^2 + MC^2$ 极小时的点,求点 M 的轨迹.

40. 设 $\triangle ABC$ 是定三角形,P 是合于 $PA^2 = PB^2 + PC^2$ 的点,求点 P 的轨迹.

第六章　作　图

第一节　基本知识

§ 63　作图题与设定条件

以前所讨论的定理、轨迹命题等，都是先假设已知合乎一定条件的图形，然后研究这个图形可能有什么性质，这类命题总称属性命题. 假如预先给出一些条件，而后求作具备这些条件的图形，这类问题便叫做作图题. 后者正是本章要讨论的问题.

对某作图题完成了作图之后，我们便可以断定合乎某些条件的图形是存在的，因此，作图题实质上是"存在定理"的一种变态. 例如，"求作三角形的外接圆"是一个作图题，但当我们作出三角形的外接圆之后，就说明了三角形必有外接圆，也就是说三角形的外接圆存在.

存在定理是本门科学所论各种事理的根基，根基虚无，便属空中楼阁. 所以严格地说，每当提出定理的时候，首应讨论题设的图形是否存在，如其乌有，虽然论证不误，亦无价值可言. 而作图则是证实存在的一种方法，由此可见作图在几何学中实应居于首要的地位.

既然作图题是求作一个具备设定条件的图形的问题，那么问题之有无结果，或确定或不定，自然要看条件的选择是否得当. 因此设定条件，不能漫无边际，应该注意下列三点①：

(1) 条件要彼此和谐. 设定的条件，如果根本互相矛盾，势必任何图形，满足了这条，便抵触了那条，终而无法求得一个具备所有条件的图形. 例如，"求作对边不等的平行四边形"一题，既要所求四边形的"对边不等"，又要"对边平行"，这是根本不相容的.

---

① 设定的条件是否符合这三点要求，往往可从已知的定理或在作图的过程中发现出来.

(2) 条件要互相独立. 若乙条件是甲条件的必然推论, 则两者不独立, 而乙是赘余. 故设定条件, 务求个数最少, 避免不独立的条件并立其间. 例如, "求作对角线互相平分的平行四边形" 一题当中, 所求四边形的"对角线互相平分" 和"对边平行" 可以互推, 其中之一便是多余的条件.

(3) 条件要不多不少. 独立条件过多, 其实也就是条件矛盾的一种表现, 故此时当然不能作成适合条件的图形. 例如, "已知四边及两对角线的长, 求作四边形" 一题就是这种情形①. 但是条件过少, 则合条件的图形一般将有无限多个, 这亦不合作图的本意. 例如, "已知四边的长, 求作四边形" 一题便是如此. 所以设定条件要不多不少, 恰得其宜.

以上三点是拟定作图题时必须加以考虑的, 然而这三点并不是能够作图的充分理由. 有时设定条件虽然符合这三个要求, 但在初等几何的范围内仍然不能作图, 这类作图题, 叫做作图不能问题, 本章末将有概略的讨论. 此外设定条件不合适, 致使所求图形根本不存在, 当然也不能作图, 不过习惯上不算这是作图不能问题, 只可说是"不成立" 的问题. 如果一个作图题所设条件一般并不违背上述三点要求, 只是在某些场合下所求图形才不存在, 这是属于图形的变化范围问题, 不应认为此作图题有毛病. 例如, "已知三边的长, 求作三角形" 一题, 只有当其中一边不小于其他两边的和时才不成立, 因此我们并不视为它违背了以上三点要求. 在以后所讨论的许多作图题中, 绝大多数都有这种情形.

作图题视题中对于所求图形位置的要求不同而分为如下两类.

Ⅰ. 定位作图

如果求作的图形必须作在指定的位置, 这叫做定位作图. 例如, "过已知直线外一点作此线的垂线".

Ⅱ. 活位作图

如果对于所求图形的位置没有硬性的限制, 这叫做活位作图. 其中又分两种:

(1) 半活位作图. 限定在某范围内作图, 但在此范围内, 作图位置不加限制, 这叫做半活位作图. 例如, "在定圆中作内接正方形".

(2) 全活位作图. 不拘位置, 随处均可作图, 这叫做全活位作图. 例如, "知

① 若给定四边及两对角线的长恰好适合其应有的关系时, 则所求四边形可以存在, 但应辨别这是因其中有一条件不独立使然.

边长作正三角形”.

按一定方法把作图题所求图形作出的过程，叫做解作图题．凡定位作图，能作出多少个适合条件的图形，就说有多少个“解”；在活位作图里，若适合条件的图形彼此全等①，则不论能作出多少个都算一“解”，不全等的才算不同的“解”．无论哪类作图，当所求图形不存在时，便说这个作图题“无解”．

§64　作图工具与作图公法

初等平面几何的研究对象，不外直线、圆以及由它们（或其一部分）所组成的图形，因此作图的工具，习惯上限用直尺和圆规两种②．这两种工具，直尺假定其直而且长但上面无任何刻度，圆规则假定其两腿够长并能开闭自如（图438）．作图工具的这个限制是有历史根源的，可说是传统的惯例．限用直尺和圆规来完成的作图方法，叫做尺规作图法，也叫做初等几何作图法或欧几里得作图法．

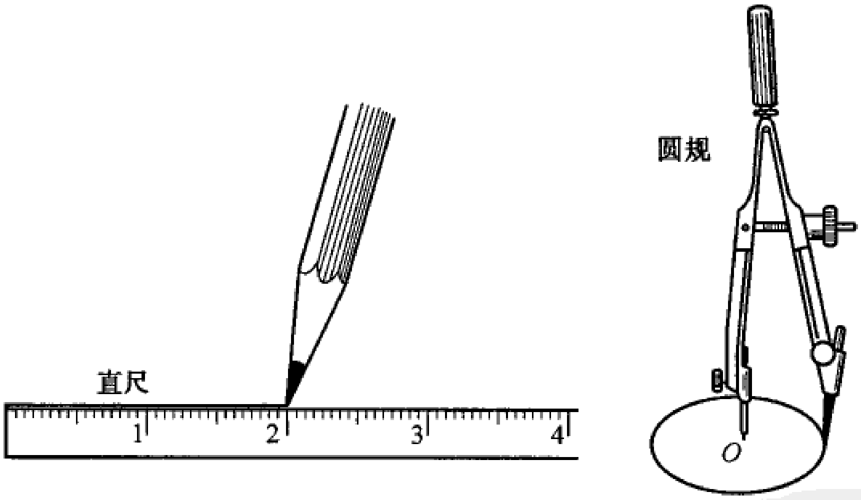


图 438

确定了作图工具之后，接着便发生这样的问题：究竟怎样使用直尺和圆规来解作图题呢?实质上这是直尺和圆规具有什么功能的问题．因此，我们不可不先明确怎样才算完成了一个作图的根本意义．在初等平面几何学里，约定所谓

① “全等图形”的一般定义，见 §70．

② 在实际行事时，为省事和减少误差起见，也可用有刻度的直尺、三角板、丁字尺、比例规、量角器等作为辅助工具，但使用这些工具作图应有“成法”为依据，不得随便扩大其作图，并且在使用过程中亦不宜明言．

完成了一个作图，就是说能把问题归结为有限次的如下几个认可的简单作图：

(1) 通过两个已知点可作一条直线(图 439)；

(2) 已知圆心和半径可作一圆(图 440)；

(3) 两已知直线，一已知直线和一已知圆，或两已知圆，如其相交，可求其交点(图 441)；

图 439

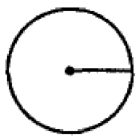


图 440

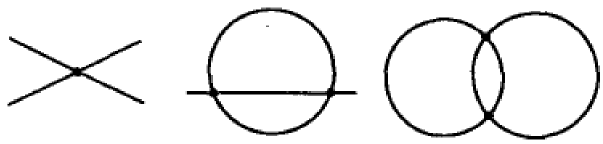


图 441

此外还附加一个规约：在已知直线上或外均可以任意取点，但所取的点不得附加任何特殊性质(图 442).



图 442

以上所谓已知的点、直线、圆等，要理解为问题的假设条件中所给定的点、直线、圆等，或者是在解问题的前一阶段中已经确定了的．又按上述规约所取的点也认为是已知点．

上面(1) ~ (3) 三条，叫做作图公法．我们假定直尺和圆规可以而且也只可以完成这三条公法所规定的作图，也就是说，我们承认亦只承认这两种作图工具具有下列三种功能：

(1) 画线．用直尺可以画出第一条公法所说的直线．

(2) 作圆．用圆规可以作出第二条公法所说的圆．

(3) 求交点．用直尺和圆规可以求得第三条公法所说的交点．

作图公法是一种公共规约，用以限定作图的可能范围．必须注意，公法只是作图的基础，它仅可附和公理，不能取而代之，譬如不能因为有了第一条公法而废除公理 I_1．

§ 65 作图成法

根据作图公法或一些已经解决的作图题而完成了的作图，叫做作图成法．下面胪列的都是一些作图成法，它们的作法认为读者已经知道，以后引用时就不再从头叙述了．

(1) 在已知射线上自端点起截一已知长的线段．(“迁线” 作图)

(2) 以一已知射线为一边，在指定的一侧作一已知大小的角.（“迁角”作图）

(3) 知边长作正三角形.

(4)① 已知三边(每两边的和大于余一边)作三角形；

② 已知两边及夹角作三角形；

③ 已知一边及两邻角(两角的和小于二直角)作三角形；

④ 已知两角及其中一角的对边(两角的和小于二直角)作三角形.

(5) 作已知线段的中点.(平分已知线段)

(6) 作已知线段的中垂线.

(7) 作已知角的平分线.(平分已知角)

(8) 作已知圆弧的中点.(平分已知圆弧)

(9) 过已知直线上一点作此线的垂线.

(10) 过已知直线外一点作此线的垂线.

(11) 过已知直线外一点作此线的平行线.

(12) 知斜边及一腰(斜边大于腰)，作直角三角形.

(13) 知边长作正方形.

(14) 已知弦及内接角，作弓形.

(15) 作已知三角形的外接圆、内切圆、旁切圆.

(16) 过圆上一点作此圆的切线.

(17) 过圆外一点作此圆的切线.

(18) 作两个已知圆的公切线.

(19) 作已知圆的内接正三角形、正方形、正六边形.

(20) 作已知圆的外切正三角形、正方形、正六边形.

(21) 作一线段使等于已知的 n 条线段之和.

(22) 作一线段使等于已知的两条线段之差.

(23) 作一线段使等于一已知线段的 n 倍(n 是自然数).

(24) n 等分已知线段.

(25) 作一线段使等于一已知线段的$\frac{m}{n}$(m，n 都是自然数).

(26) 内分或外分一已知线段，使所得分比等于已知的两线段之比.

(27) 按已知的 n 条线段所成的连比，将一已知线段分为 n 段.

(28) 作一线段 $x=\frac{ab}{c}$，其中 a，b，c 都是已知线段.（“比例第四项”作图）

(29) 作一线段 $x=\sqrt{ab}$,其中 a,b 都是已知线段.("比例中项"作图)

(30) 作一线段 $x=a\sqrt{p}$,其中 a 是一已知线段,p 是正有理数.

(31) 作一线段 $x=\sqrt{a^2+b^2}$,其中 a,b 都是已知线段.("勾股求弦"作图)

(32) 作一线段 $x=\sqrt{a^2-b^2}$,其中 a,b 都是已知线段,且 $a>b$.("弦勾求股"作图)

(33) 已知一边及一邻角,作一三角形,使与一已知三角形等积.("等积变形"作图)

(34) 作一正方形使与一已知三角形等积.

(35) 把一已知线段内分或外分成中外比.("黄金分割法")

所谓把已知线段 AB 内分或外分成中外比,是说求作内分点或外分点 C,使合于 $AC^2=AB\cdot BC$.

(36) 作已知圆的内接正五边形、正十边形、正十五边形.

§66　解作图题的步骤

任何作图题的内容,均可分为两部分:

(1) 设定部分 —— 给出的已知件;

(2) 求作部分 —— 所求适合条件的图形.

解题之初,首应罗列题中的设定件,务求全备.设定件除点、直线、射线有位置无大小外,其他如线段,或仅设其长而不指明它的位置,或二者兼备;角,或大小位置并皆指定,或仅设定大小;诸如此类,不一而足,题文纵未详细表明,我们亦应加以揣想辨别.凡设定件指定位置的,在作图之始即须预先画出,以后便就这位置上作图,不许移动变更;设定件只给定大小的,在作图之前仍须预先画出一线段或一角以代表它的大小,但习惯不就此作图;设定面积时,作一正方形为代表;设定比时,作两线段,以其比代表设定的比.其次对于求作的图形,必须详细叙明应具备的条件.

以上属于解题前的准备工作,这是一般的惯例.

准备工作作好之后,继即进行解题,一般可分下列四个步骤.

(1) 分析.在正式作图之先,首须寻求作图方法的线索,这步骤叫做分析.其程序如下:

① 假定所求图形已经作成,绘一草图设想已具备所要求的条件(草图所具的设定件不必是真的设定件).

② 在草图里添绘有关的点、线等.

③ 尽量考究图中各件的大小、位置以及相互间的关系.其有位置既定的,可用特种颜色或标志记出;其有大小已知的,另用他种颜色或标志记出;其余逐渐推知或算得的,一律逐渐标记出来[①].

④ 上项工作至所求图形能全然确定而止;如犹未成,可再添其他辅助线,继续考究.

(2) 作图.根据分析所得线索,按步设计作图的方法,其中敷陈动作的次序,务须记载详明.

进行作图的时候,每作出一点、一线或一角,即须分别定名.不许有名(字母记号)而不定义,亦不许一名而再定义.不定义的坏处,在于虽有名而人莫知所谓;再定义的弊病,在于名同而实异,势必混淆不清.二者都是谬误的来源,推理的大患,应该谨慎留意.

还须注意,作图亦类似于证定理,在须有根据,无成法不许动手[②],否则将往往不自觉地陷入"超公法"的错误.

(3) 证明.作图之后,应逐条核验所得图形确具所有要求的条件,用以证实作图无误.

注 或谓解作图题可省证明,然说是因为易证而从略可,若说无需证明则不可.

(4) 推究.作图时,一般只立通法,这叫做形式的作图.然而一个作图题的有解无解,本取决于设定件的大小、位置及其相互间的关系,不待作图实已内定,所以不能因为既有作图而说问题一定有解.那么分别设定件的大小、位置及其相互关系,以判定本题的解数情形 —— 一解多解,无解不定解等等,自属有其必要.这种通盘考虑问题种种可能情况据以作出肯定性的判断解数的条文,叫做推究.

作图题也有绝对有唯一解的,如"已知两边及夹角,求作三角形"及"求作已知三角形的内切圆"等题便是这样.故推究一项,有时亦可缺而不备.可是这类问题在作图题中究占少数,而需要推究的问题实属多多,因此解题时这项工作几乎不可免,必须时刻在意.

例题 85 已知两边及其中一边的对角,求作三角形.

---

① "颜色"不一,"逐渐标记"又系于时间先后,这在印刷品中都无法办到,但实际行事时(例如,讲解,练习)必须讲究.

② 例如,有人曾谓能三等分任意角,细究其实,大半是不守此诫,以致犯错而不觉.

设定　线段 a,b 及角 α(图 443).

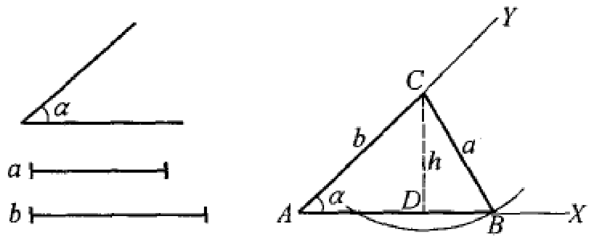


图 443

求作　$\triangle ABC$,使 $BC=a,CA=b,\angle BAC=\alpha$.

分析　假定 $\triangle ABC$ 已作成,在这个三角形中,$\angle A=\alpha$ 为已知,所以这个角可以先作,那么顶点 A 就出现了.其次在这个角的一边上截取 $AC=b$,于是顶点 C 也确定了.现在剩下的只有顶点 B 的位置,看看怎样安排才好.因为点 B 既要在 $\angle A$ 的另一边上,还要与点 C 的距离等于 a,可见以 C 为心,a 为半径所作的圆与 $\angle A$ 另一边的交点就是要求的顶点 B.

作图　作 $\angle XAY=\alpha$(§65(2));在边 AY 上截取 $AC=b$(§65(1));以 C 为心,a 为半径作圆(§64(2)),设这圆交① 射线 AX 于 B(§64(3)).联结 BC(§64(1)),则 $\triangle ABC$ 即所求的三角形.

证明　在 $\triangle ABC$ 中,根据刚才的作图,明明已有

$$\angle BAC=\alpha,CA=b,BC=a$$

所以这个三角形确合条件.

推究　A,C 两点的存在毫无疑问,因此本题的有解无解以及解数多少,完全系乎点 B 的有无以及其数多少.点 B 由 $\odot C(a)$ 与射线 AX 相交而产生,因而与 C 至直线 AX 的距离 $h=CD$ 有关,故推究的着眼点主要落在 a 与 h 的大小关系上.假如 $\odot C(a)$ 与直线 AX 有交点,交点必须落在射线 AX 上才合用,而此时交点非重合于 D 即分处 D 的两旁,于是 a 与 b 的大小关系和点 D 的位置都会影响解数.又点 D 在 AX 直线上的位置,当视乎 α 的大小而变动.这样一来,把所有的设定件都牵连到了.再系统地整理一下,各情形可分为三大类:

---

① 作图题所以有解无解,一解多解的分别,大抵系乎在作图过程中某些线的“交”与“不交”.须知两直线有相交、平行、重合三种情形,两圆有相交、相切、相离(外离或内含)、重合四种情形,一直线与一圆有相交、相切、相离三种情形,故当我们卧尺画线、旋规作圆的时候,应切实注意第三条公法约定的事项,切戒随便说“某与某相交于某点”,因为交与不交尚未分晓,交多交少未见究竟.我们每当下笔写“交”字时,必须特别慎重分辨有无多少之别,能断定则断定,不能断定则暂用“设”、“若”等字以假定之,等到推究项中再将这些情节详细讨论.

(1) 假定 α 是锐角(图 444):

① 当 $a \geqslant b$(因而 $a > h$)时,$\odot C(a)$ 与射线 AX 有一交点 B,故得一解;

② 当 $a < b$ 时,$\odot C(a)$ 与射线 AX 有无交点,视乎 a 与 h 的大小如何而定:

a.若 $a > h$,则得两交点 B 和 B',故此时有两解;

b.若 $a = h$,则得一交点 $B(= D)$,故此时有一解;

c.若 $a < h$,则交点乌有,故此时无解.

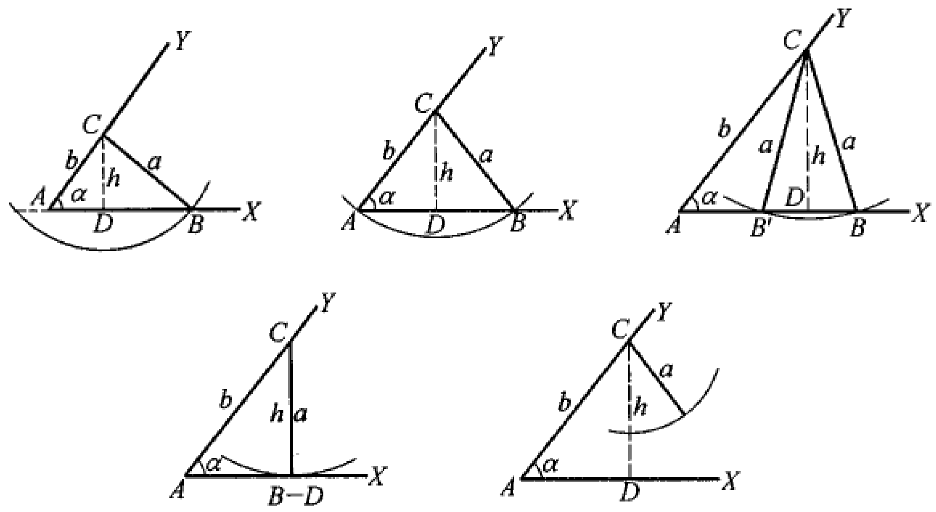


图 444

(2) 假定 α 是直角(图 445),则 $b = h$.所以:

①$a > b$ 时,$\odot C(a)$ 与射线 AX 有一交点 B,从而得一解;

②$a \leqslant b$ 时,$\odot C(a)$ 与射线 AX 无交点,因而无解.

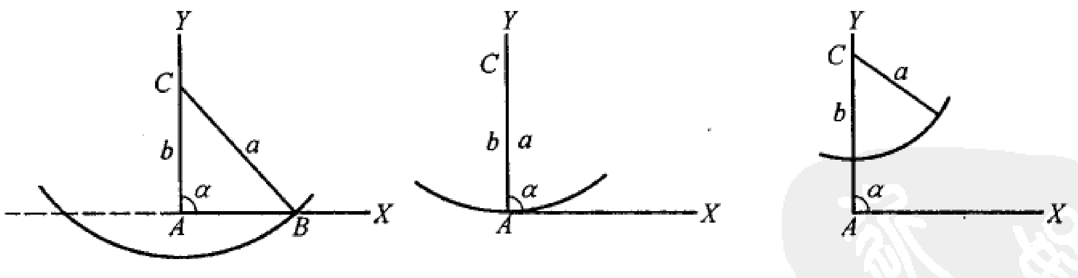


图 445

(3) 假定 α 是钝角(图 446):

① 当 $a > b$(因而 $a > h$)时,$\odot C(a)$ 与射线 AX 有一交点 B,故得一解;

② 当 $a \leqslant b$ 时(此时 $a \gtreqless h$ 均可能),$\odot C(a)$ 与射线 AX 无交点,故无解.

以上结果,可表列如下(表 10).

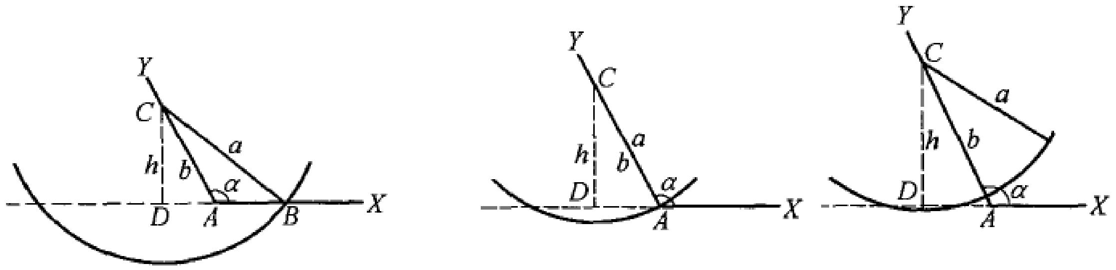


图 446

表 10

解数 \ a,b,h 的关系 α 的大小	$a>b$	$a=b$	$a<b$		
			$a>h$	$a=h$	$a<h$
锐　角	1	1	2	1	0
直　角	1	0	0		
钝　角	1	0	0		

注:当 $a>b$ 时,本题最多不过一解,这道理早已暗伏于 §5 定理 13(2) 之中了.

在具体问题的四个解题步骤当中,一般地说以分析和推究两项比较困难.分析是勘探问题的解决途径,要善于抓着问题的关键,才能看清里面的线索,此非熟习图形的性质不可.推究是对问题的全面综合,要善于将可能发生的情形分类,这在事先或难得其要领,常须在作图的实践中去寻求端倪.可见怎样克服困难,实无捷径可循,只有从实际解题中来锻炼本题.

解决问题的途径不一,因而分析的过程每因人而有异,于是同一作图题常常产生若干不同的作图法.作法有繁有简,当然以简为好.刚才说过,推究的道理常在作法里面求得,既然作法有繁简之别,是不是推究也因此而有详略之分呢?推究是就作图的效果立论,作法虽然不同,效果实际一样,所以推究中的各种情形应与作法无关.这就是说,按不同的作法而设计的推究,至多在形式上有所差异,但其实质还是一致的.譬如,以例题 85 为例,现在改用下述方法作图:

先作 $BC=a$(图 447),并以之为弦作一弓形,使其内接角等于 α(§65(14)).再以 C 为心,b 为半径作圆,设交弓形的弧于 A.最后联结 AB 和 AC.这样就得到所求的三角形 $\triangle ABC$.

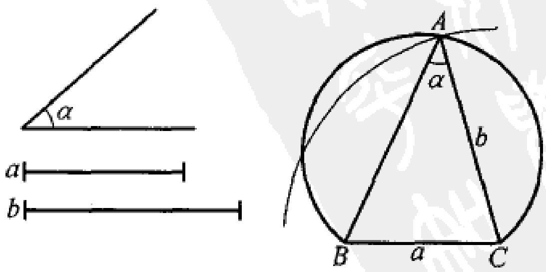


图 447

从这个作法来设计推究,着眼点将

转而落在点 A 的有无上面. 这和 a 的大小以及和 b 与弓形的半径 r 的大小关系都有关联,总起来情形也分三大类:

(1) 设 α 是锐角(图 448).

① 则在 $a \geqslant b$(因而 $b < 2r$) 时一解.

② 则在 $a < b$ 且:

(1′) $b < 2r$ 时两解;

(2′) $b = 2r$ 时一解;

(3′) $b > 2r$ 时无解.

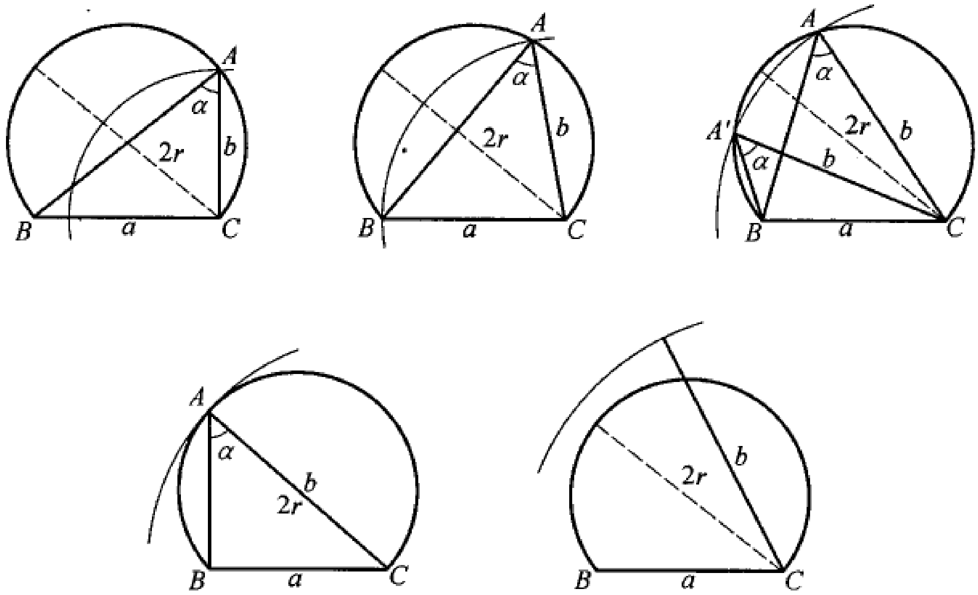


图 448

(2) 设 α 是直角(图 449),则 $a = 2r$. 故:

① 在 $a > b$ 时一解;

② 在 $a \leqslant b$ 时无解.

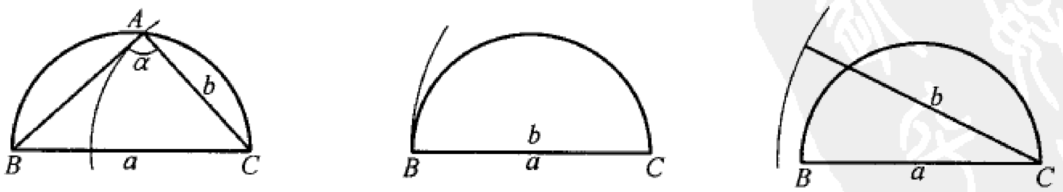


图 449

(3) 设 α 是钝角(图 450),则:

① 在 $a > b$(因而 $b < 2r$) 时一解;

② 在 $a \leqslant b$ 时(此时 $b \gtreqqless 2r$ 均可能) 无解.

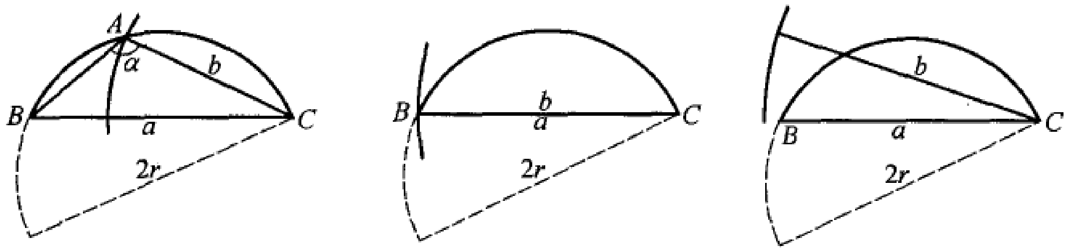


图 450

综合以上结果,有如表 11 所示.

表 11

解数 \ a, b, r 的关系 \ α 的大小	$a > b$	$a = b$	$a < b$		
			$b < 2r$	$b = 2r$	$b > 2r$
锐　　角	1	1	2	1	0
直　　角	1	0	0		
钝　　角	1	0	0		

比较表 10 和表 11,我们觉察到解数的情形彼此完全一样,仅在条件关系的表示形式上略有不同而已.事实上,表 10 中的 $a \gtreqqless h$ 和表 11 中的 $b \lesseqqgtr 2r$,如果其中的"派生已知量"h 和 r 都改用"原始已知量" 表示①,那么前者变成 $a \gtreqqless b\sin\alpha$,后者实为 $b \lesseqqgtr \frac{a}{\sin\alpha}$,可见二者在实质上毫无二致.

习 题 24

1. 什么叫做属性命题?什么叫做作图题?

2. 为什么说作图题实质上是存在定理的一种变态?

3. 作图在几何学中的地位如何?

4. 设定作图题的条件,须要注意哪些事项?

5. 什么叫做作图不能问题?不成立的问题习惯上是否视为作图不能问题?

6. 什么叫做定位作图和活位作图?后者又分为哪两种?关于它们的解数有何规定?

7. 初等几何里的作图工具,习惯上限用哪几种?

---

① 题中原设的已知量,叫做原始已知量;由原始已知量推知的其他的量,叫做派生已知量.

8. 什么叫做尺规作图法?它还有什么名称?
9. 试述作图公法的内容和直尺圆规的功能.
10. 什么叫做作图成法?
11. 每个作图题的内容,可分为哪几部分?
12. 解作图题之前有哪些准备工作?
13. 解作图题一般可分几个步骤?试述每个步骤的要点.
14. 一个作图题,按不同的作法而设计的推究,是否彼此迥然不同?
15. 复习 §65 里所列诸作图成法.

第二节 常用的作图方法

§67 轨迹交点法

利用轨迹来解作图题,是经常用的一种重要的作图方法.如果解决一个作图题归结起来是要确定某一个点的位置,那么可以暂时放弃这点所应满足的条件之一,于是满足其余条件的点便因其位置不定而形成一个轨迹,这个轨迹往往是我们所熟知的;得了这个轨迹之后,再调换一个条件如法施行,我们将另得到一个轨迹;所求点既然满足所有条件,必然兼在得到的两个轨迹上,可见它应是这两个轨迹的交点.所以只要有法作出那两个轨迹,问题便解决了.像这样利用轨迹的交点来解决作图题的方法,叫做轨迹交点法.

轨迹交点法在作图中应用最广,凡属作图,几乎没有不用到它的①.用我们既有的轨迹知识常常可以很快地发现所求点应该落在什么地方,这说明娴熟于种种轨迹对于作图是件多么重要的事情.

有时欲确定某一个点,而这点在题中已明白指出系在某图形上,那么只要求出一个轨迹就足够了,这情形叫做单轨法;例如,§66 例题 85 的第一种作图法便是如此.如果需要作出两个轨迹才能确定所求点的位置,便叫做双轨法;例题 85 的第二种作图法即是这种情形.

能确定某一个点的轨迹,常常有若干个,为使作图简易,我们应该选取那些最熟知而且便于作出的轨迹.现在举三个例题如下:

例题 86 过三角形一边上某定点作一直线,要把三角形的面积二等分.

① 其他各种作图方法里面,大都含有轨迹交点法.

设定　△ABC 及边 BC 上一点 P(图 451).

求作　通过点 P 的直线 l,要把 △ABC 的面积二等分.

分析　假设所求直线 l 交折线 BAC 于 Q,则问题的关键在于如何确定点 Q 的位置.一般地说,点 Q 在 AB,AC 两边之一上,现在假定 Q 在边 AC 上,于是 B 与 Q 分在直线 AP 的两侧.根据问题对 l 的要求,应该四边形 ABPQ 的面积等于 △ABC 面积的一半.设若保留这关系而放弃"Q 在边 AC 上"的条件,并把 Q 看做动点,试看它会生出什么轨迹来.因 △ABP 已固定,故 △APQ 的面积为定量 $\left(\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABP}\right)$;那么很容易知道点 Q 的轨迹是平行于 AP 的一条直线(Q 距 AP 定远).命这轨迹与边 BC 的交点为 M,则 △ABM 一条直线(Q 距 AP 定远).命这轨迹与 BC 边的交点为 M,则 △ABM 的面积将等于四边形 ABPQ 的面积,亦即等于 △ABC 面积的一半.由此可见 M 必然是边 BC 的中点.点 M 既定,点 Q 也就随之而定了.

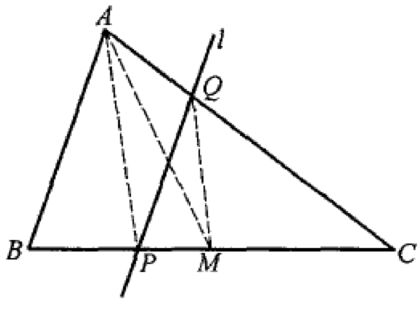


图 451

作图　联结 PA,过边 BC 的中点 M(§65(5))引直线平行于 PA(§65(11))而交折线 BAC 于 Q,则过 P,Q 的直线就是所求的直线 l.

证明　联结 AM,因 M 是边 BC 的中点,故 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}$(§22 定理 138 推论),即 △ABM 的面积是 △ABC 面积的一半.现为叙述确定起见,假定 Q 在边 AC 上.据作图,MQ // PA,于是 $S_{\triangle APQ}=S_{\triangle APM}$;两端再加 $S_{\triangle ABP}$,便知道四边形 ABPQ 与 △ABM 等积.所以直线 PQ 确合条件.

推究　本题永有一解.特别地,当 P 重合于边 BC 的中点 M 时,中线 AM 恰是所求的直线.

例题 87　已知两边的积、夹角大小、第三边的长,求作三角形.

设定　线段 a,p,角 α(图 452).

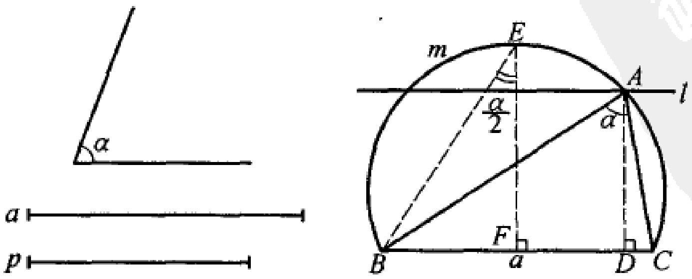


图 452

求作 $\triangle ABC$,使合于

$$AB \cdot AC = p^2 \qquad ①$$

$$\angle BAC = \alpha \qquad ②$$

$$BC = a \qquad ③$$

分析 假定$\triangle ABC$已经作得.现在把边BC看做固定的线段,即是先把条件③肯定下来.当我们放弃条件①的时候,条件②就要使点A生出轨迹,这轨迹是以BC为弦而内接角等于α的弓形弧m.既得了这个轨迹,若再求得另一个轨迹,问题便可解决.要寻求第二个轨迹,如果只是机械地放弃②而看①,那将要碰到很大的困难,因为按照①,点A的轨迹是什么,我们还没有知道①.为此我们应该设法把①加以变化,使易于求得第二个轨迹.我们知道,a和α定后,弓形BAC的半径r的大小也就随着而定.作$AD \perp BC$于D,则有$AB \cdot AC = 2r \cdot AD$(习题4第11题);因此

$$AD = \frac{p^2}{2r} \qquad ④$$

式中右端是常数,可见弃②而取④,点A的轨迹应是平行于BC的直线l.这样一来,由l和m即可确定点A了.

作图 首先作线段$BC = a$;其次以BC为弦作弓形弧m,令这弓形的内接角等于α;然后作直线l令平行于BC,并且使它们之间的距离等于$\frac{p^2}{2r}$(如何作?),此处的r乃是刚才所作弓形的半径.假设l和m交于A,则$\triangle ABC$就是所求的三角形.

证明 作$\triangle ABC$时,条件②和③已经满足,毋庸待言.欲证$\triangle ABC$也满足①,可作$AD \perp BC$于D,据作图,$AD = \frac{p^2}{2r}$,但$AB \cdot AC = 2r \cdot AD$,故$AB \cdot AC = p^2$.证完.

推究 命弧m的中点为E,引$EF \perp BC$于F,易知$BF = \frac{1}{2}a$且$\angle BEF = \frac{\alpha}{2}$;由此$EF = \frac{1}{2}a\cot\frac{\alpha}{2}$.又$2r = a\csc\alpha$,所以:

(1) 在$\frac{p^2}{2r} \leqslant EF$,即$p^2 \leqslant \frac{1}{2}a^2\csc\alpha\cot\frac{\alpha}{2}$时,有一解②;

① 这时点A的轨迹叫做卡西尼(Cassini)卵形线,要画出这个曲线,实非直尺圆规所能胜任.

② 本题属于全活位作图,这时点A虽出现两个或四个可能位置,但因所得各三角形均彼此全等,故仍算一解.

(2) 在$\frac{p^2}{2r} > EF$,即 $p^2 > \frac{1}{2}a^2\csc\alpha\cot\frac{\alpha}{2}$ 时,无解.

例题 88　已知四边的长,求作有外接圆的凸四边形.

设定　四线段 a,b,c,d(图 453).

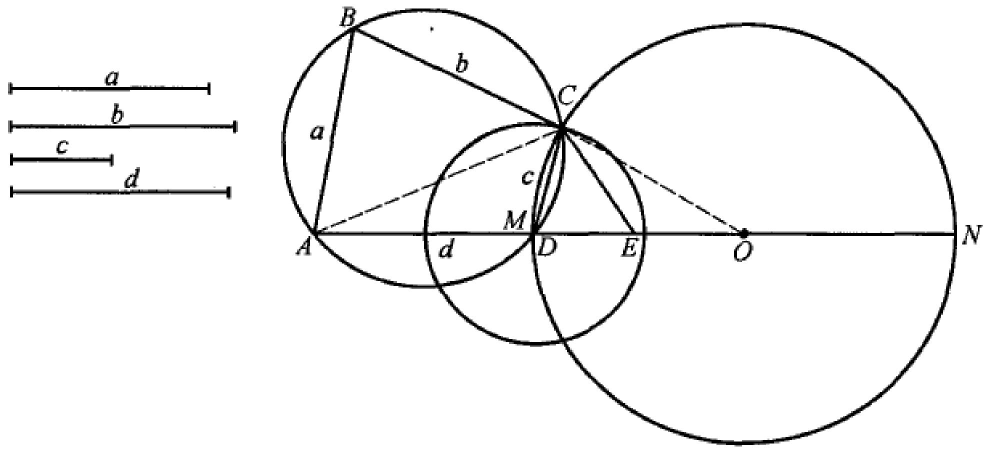


图 453

求作　有外接圆的凸四边形 $ABCD$,使 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d$.

分析　假定所求的四边形 $ABCD$ 已经作成.连 AC,作$\angle DCE=\angle BCA$,设 CE 交 AD 的延长线于 E;又知道$\angle EDC=\angle ABC$,可见$\triangle EDC\backsim\triangle ABC$.于是由$\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{BC}$,得

$$DE=\frac{AB\cdot CD}{BC}=\frac{ac}{b}$$

此式的末端是常数,故点 E 得以确定.从刚才的两个相似三角形中,又知

$$\frac{CA}{CE}=\frac{BC}{CD}=\frac{b}{c}$$

也是常数,若点 C 不受其他条件的限制,便要生出轨迹,这轨迹是一个圆,圆心 O 在直线 AE 上(§57 例题 64).另一方面

$$DC=c$$

是定长,那么点 C 又必须在另一个圆上,这圆的中心是 D,半径等于 c.由此知道,C 恰好是$\odot O$ 和$\odot D$ 的交点.点 C 确定后,进而便很易确定点 B 的位置.

作图　先作一线段 $AD=d$;在 AD 的延长线上求一点 E,使(§65(28))

$$DE=\frac{ac}{b}$$

再内外分线段 AE 于 M,N,令适合(§65(26))

$$\frac{MA}{ME}=\frac{NA}{NE}=\frac{b}{c}$$

以 MN 为直径作一圆，命圆心是 O. 之后以 D 为心，c 为半径作圆；设这圆交 $\odot O$ 于 C. 更以 A 为心、a 为半径画弧，又以 C 为心、b 为半径画弧；设这两弧相交于 B，但注意取这交点使与 D 分在 AC 的两侧，最后联结 $ABCD$，这便是我们所要求的四边形.

证明 四边形 $ABCD$ 是凸的而且四边分别等于设定的四条线段，据作图已很明白，所以现在只要证明这四边形有外接圆就行了. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中，由作图得知

$$\frac{BC}{DC}=\frac{b}{c},\frac{CA}{CE}=\frac{MA}{ME}=\frac{b}{c},\frac{AB}{ED}=\frac{a}{\frac{ac}{b}}=\frac{b}{c}$$

故该两三角形相似（§17 定理 114(3)）. 由此

$$\angle ABC=\angle EDC$$

因而四边形 $ABCD$ 有外接圆无疑.

推究 若 $a=b=c=d$，则所求的四边形显然就是正方形，这情形有一解毫无疑义. 今设给定的四条线段不全相等，此时我们无妨假定 $b>c$. 在这个场合中，点 N 一定存在且在 AE 的延长线上. 目前的首要任务，在于考究直线 AE 外有无点 C，而此事系乎 $\odot O$ 与 $\odot D$ 的是否相交. 为此我们必须计算这两个圆的半径与圆心距的大小. 由

$$\frac{MA}{ME}=\frac{NA}{NE}=\frac{b}{c}$$

得

$$\frac{MA}{AE}=\frac{b}{b+c},\frac{NA}{AE}=\frac{b}{b-c}$$

于是

$$MA=\frac{b}{b+c}\cdot AE=\frac{b}{b+c}(AD+DE)=\frac{b}{b+c}\left(d+\frac{ac}{b}\right)=\frac{ab+bd}{b+c}$$

$$NA=\frac{b}{b-c}\cdot AE=\frac{b}{b-c}(AD+DE)=\frac{b}{b-c}\left(d+\frac{ac}{b}\right)=\frac{ac+bd}{b-c}$$

从而

$$OA=\frac{1}{2}(MA+NA)=\frac{1}{2}\left(\frac{ac+bd}{b+c}+\frac{ac+bd}{b-c}\right)=\frac{b(ac+bd)}{b^2-c^2}$$

由此

$$OD=OA-DA=\frac{b(ac+bd)}{b^2-c^2}-d=\frac{c(ab+cd)}{b^2-c^2}$$

$$OM = OA - MA = \frac{b(ac+bd)}{b^2-c^2} - \frac{ac+bd}{b+c} = \frac{c(ac+bd)}{b^2-c^2}$$

欲⊙O与⊙D相交,无异于希望$\triangle ODC$存在,而这三角形存在的条件则为(§12定理80推论(2))

$$\begin{cases} c+OM>OD \\ c+OD>OM \\ OD+OM>c \end{cases}$$

以OD及OM的值代入,这组条件可化为

$$\begin{cases} b+c+d>a & ① \\ a+b+c>d & ② \\ a+c+d>b & ③ \end{cases}$$

又依据$b>c$的假定,也应

$$a+b+d>c \qquad ④$$

这就是说,①,②,③,④是保证直线AE之外存在点C的条件.

当点C作得后,还要问点B是否存在.点B存在与否,视乎AC,a,b三线段能否构成三角形而定,而它们可以构成三角形的条件已知为(§12定理80推论(1))

$$\begin{cases} a+b>AC \\ |a-b|<AC \end{cases} \qquad ⑤$$

现在先计算AC的长度.在$\triangle CAE$中,因

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DE}} = -\frac{d}{\frac{ac}{b}} = -\frac{bd}{ac}$$

故有(习题18第20题)

$$bd\cdot CE^2 + ac\cdot AC^2 = (ac+bd)CD^2 + bd\cdot DE^2 + ac\cdot AD^2$$

将此式简化后,得

$$AC^2 = \frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd}$$

以AC的值代入⑤,结果仍然得到①,②,③,④四个不等式.这说明了点B和点C的存在条件是一致的,即若点C能求得,点B也一定能求得.

总结上面所述,我们得出结论:

(1)当a,b,c,d四条已知线段中的最长者小于其余三者的和时,本题有一解;

(2)当a,b,c,d四条已知线段中的最长者不小于其余三者的和时,本题无解.

注 如果不限定所求四边形的四边按一定次序分别等于四条已知线段，则当本题有解的时候，所求四边形一般具有三种形式，而且它们的面积及外接圆分别彼此相等(参看习题 18 第 11 ~ 12 题).

§ 68 游移切线法

若是作图的关键在于确定某一直线，也和轨迹交点法的原理一样，可暂放弃这直线所应满足的条件之一，于是这直线可能因位置不定而常切于某曲线，而这曲线实际就是点的轨迹(如圆)，这样一来，只要先把这轨迹作出，然后作它的某切线使合于所放弃的条件，问题就解决了. 这种作图方法，叫做游移切线法.

除上述情形外，有的问题需要求出两个轨迹，而后化为求作这两个轨迹的公切线问题.

游移切线法里所要作的轨迹，在初等几何范围内一般都是圆或圆弧；如果轨迹是别的曲线，那么此法就不适用了，而且常常要逸出初等几何作图的范围之外.

例题 89 在定圆中求作内接三角形，使两边分别平行于定圆外两已知直线，第三边(所在直线) 通过一已知点.

设定 一点 P，一圆 $\odot O$，此圆外两直线 l_1，l_2(图 454).

求作 $\odot O$ 的内接三角形 $\triangle ABC$，使 $AB \parallel l_1$ 且 $AC \parallel l_2$，而直线 BC 通过点 P.

分析 假设 $\triangle ABC$ 已经作成. 由于 $AB \parallel l_1$ 且 $AC \parallel l_2$，可见 $\angle BAC$ 的角度一般有两个可能值，而这两个可能值的和恰好等于二直角(§ 7 定理 34). 这就决定了 $\triangle ABC$ 的第三边 BC 必然有一定的长度. 如果不要求"直线 BC 通过点 P"，但保留其他条件，显然因为弦 BC 的位置不定，其中点 M 应生出一个轨迹，这轨迹是与 $\odot O$ 同心且切于 BC 的一圆. 这样一来，问题的主要关键便落在"过点 P 作该轨迹的切线" 这一着的上面了.

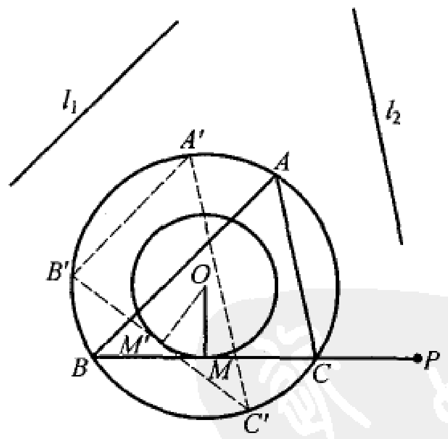


图 454

作图　在 $\odot O$ 上任取一点 A'，作弦 $A'B'$，$A'C'$ 使分别平行于 l_1，l_2；联结 $B'C'$. 引 $OM' \perp B'C'$ 于 M'（§65(10)）；以 O 为心，OM' 为半径作一圆. 通过点 P 作 $\odot O(OM')$ 的切线（§65(16) ~ (17)）而交设定圆于 B，C，并假定 $\overset{\frown}{BB'}$ 与 $\overset{\frown}{CC'}$ 同向（沿着圆周的方向）. 在设定圆上截一弧 $\overset{\frown}{A'A}$ 使与 $\overset{\frown}{BB'}$ 同向且相等，至是联结 AB 及 AC 所成的 $\triangle ABC$ 便合所求.

证明　据作图，$\overset{\frown}{A'A}$ 与 $\overset{\frown}{BB'}$ 同向且相等，那么必然 $AB \parallel A'B'$；从而 $AB \parallel l_1$. 又 BC，$B'C'$ 距圆心 O 等远，于是 $BC = B'C'$；由此 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{B'C'}$. 但 $\overset{\frown}{BB'}$ 与 $\overset{\frown}{CC'}$ 同向，可见它们也相等. 因知 $\overset{\frown}{A'A}$ 与 $\overset{\frown}{CC'}$ 也同向且相等. 所以 $AC \parallel A'C'$；亦即 $AC \parallel l_2$. 这就证明了 $\triangle ABC$ 合乎所求的条件.

推究　本题的解数情形视 l_1 与 l_2 的相互位置而分三大类.

(1) l_1 与 l_2 斜交[①].

① 若 P 在 $\odot O(OM')$ 的外部，则有两解；

② 若 P 在 $\odot O(OM')$ 的上面，则有一解；

③ 若 P 在 $\odot O(OM')$ 的内部，则无解.

(2) l_1 与 l_2 垂直.

① 若 P 不重合于 O，则有两解；

② 若 P 重合于 O，则有无限多解.

(3) l_1 与 l_2 平行. 此时无解.

例题 90　通过已知角内一定点求作一直线，使它截角的两边成周长一定的三角形.

设定　一定长线段 l，已知角 $\angle XAY$ 及其内的一点 P（图 455）.

求作　一直线，通过点 P 而交射线 AX，AY 于 B，C，使 $\triangle ABC$ 的周长等于 l.

分析　假定 $\triangle ABC$ 已成. 凡涉及三角形周长的问题，往往可借助于旁切圆而获得解决. 试作 $\triangle ABC$ 对着 A 的旁边圆 $\odot O$，设它切 BC，AX，AY 于 D，E，F，则

$$AB + BD = AE = AF = AC + CD = \frac{1}{2}l$$

这等式表明 E，F 都是定点，因而如果放弃 BC 过 P 的条件但使 $\triangle ABC$ 保持

① 两直线相交但不垂直，这情形叫做斜交.

一定的周长 l，那么边 BC 上合于 $AB+BD=AC+CD$ 的那个点 D 将要生成轨迹 $\overset{\frown}{EDF}$. 这弧的圆心 O 是一个确定的点，所以不难作出. 当该弧作出后，问题即转变为过 P 而作该弧的切线了，这是我们所熟知的.

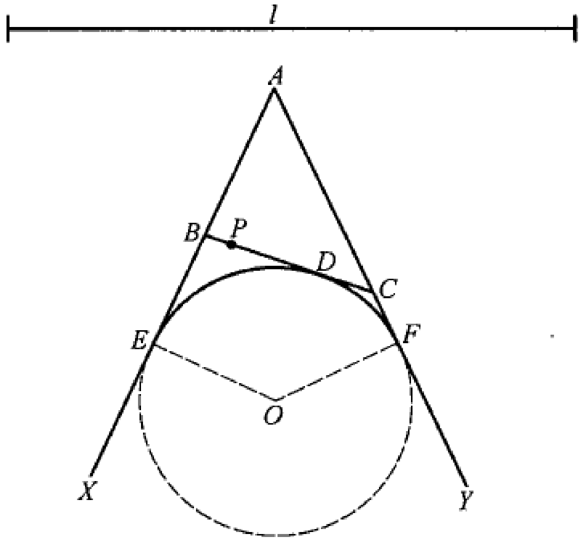


图 455

作图 在 $\angle XAY$ 的两边上各截 AE, AF，使

$$AE = AF = \frac{1}{2}l$$

自 E, F 各引直线垂直于 AX，AY(§65(9))而交于 O. 以 O 为圆心作劣弧 $\overset{\frown}{EF}$(因有 $OE=OF$). 最后，过 P 作 $\overset{\frown}{EF}$ 的切线，设交 AX, AY 于 B, C，至此 $\triangle ABC$ 便作成了.

证明 命 BC 与 $\overset{\frown}{EF}$ 的切点为 D. 因 $OE \perp AX$，$OF \perp AY$，故 AX, AY 切于 $\odot O(OE)$(§12 定理 73(1)). 由此

$$BD = BE, CD = CF$$

从而

$$AB + BC + CA = AB + BD + DC + CA = AB + BE + CF + AC = AE + AF = l$$

可见作图无误.

推究 P 在线段 AE, AF 和 $\overset{\frown}{EF}$ 所围成的图形的内部时，本题有两解；在 $\overset{\frown}{EF}$ 上时，有一解；在外部时，无解.

习题 25

1. 什么叫做轨迹交点法?其中可分哪两种情形?
2. 什么叫做游移切线法?它和轨迹交点法有无类似之处?
3. 自定圆外一已知点 P 求作割线交定圆于 A, B，使 $PA = AB$.
4. 在已知直线上求一点，自它向一定圆引切线，使两切点的距离等于定长.
5. 在已知直线上求一点，使它对两个定圆的视角相等.
6. 设 A 是定直线 a 上的定点，B 是线外的定点. 在 a 上求一点 P，使 $PA +$

PB 等于定长.

7.在已知三角形一边上求一点,使它至其他两边的距离和等于定长.

8.在已知三角形一边上求一点,自它引其他两边的平行线,使与其他两边交成的平行四边形有一定的周长.

9.在直角三角形的弦上求一点,自它引勾股的平行线,使与勾股交成的矩形合于下列条件之一:

(1) 两邻边的差(绝对值) 等于定长;

(2) 两邻边的平方和等于常数.

10.设 AB, CD 是固定的两线段.在已知直线 l 上求一点 P,使 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 等积.

11.过三角形一边上某定点作两直线,要把三角形的面积三等分.

12.设 P, Q 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上两定点,先过 P 求作一直线把 $\triangle ABC$ 划分为两块,再过 Q 求作一直线把含有 Q 的一块又划分为两块,使前后所得三块均等积.

13.在定圆中,求作内接三角形,使一边有定长,其他两边分别通过定圆内的两个已知点.

14.设 l 是通过定圆的中心 O 的定直线,A, B 是这圆上的两定点且同在 l 的一侧,在定圆上求一点 P,联结 PA, PB 交 l 于 M, N,使 $OM = ON$.

15.在一圆形撞球台上有两球恰位于一直径上,试问应循什么方向击其中一球使碰台边反射后正好撞着另外一球?

16.求作已知扇形的内切圆.

17.已知一定圆及一定直线,求作一圆,令切定圆于定点,而且切于定直线.

18.求定一点,使对三已知圆的视角均相等.

19.一直线上有 A, B, C, D 四点排成 $\{ABCD\}$ 的顺序,在线外求一点 P,使 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$.

20.已知 $\triangle ABC$ 及三线段 l, m, n,求一点 P 使合于 $PA : PB : PC = l : m : n$.

21.已知 $\triangle ABC$,求一点 S 使合于 $SA \cdot BC = SB \cdot CA = SC \cdot AB$.(这样的点 S 叫做 $\triangle ABC$ 的等力点.一般三角形都有两个等力点,唯正三角形只有一个这样的点.)

22.在 $\triangle ABC$ 的 BC 边上求一点 P,使 AP 是 BP 与 CP 的比例中项.

23.设 a, b 是平行的两定直线,P 是 a 上的定点,Q 是 a, b 外的定点.求过 Q 作直线 l 交 a, b 于 A, B,使 $PA = PB$.

24. 过定圆 $\odot O$ 内一定点 P 作弦 AB，使 A，B 至直线 OP 的距离差(绝对值)等于定长.

25. 已知边长，求作菱形，使边长恰为两对角线的比例中项.

26. 已知三边的长，求作四边形，使它同时有外接圆和内切圆.

27. 在定圆中，求作定长的弦，使被一已知弦平分.

28. 已知两同心圆及一点 P，求过 P 作一直线 l 交外圆于 A，B，使自这两交点所作 l 的垂线恰好切于内圆.

29. 以一固定线段为一边求作平行四边形，使这边的对边恰好是一定圆的弦.

30. 在定圆中，求作内接三角形，使两边各等于定长，第三边(所在直线)通过一已知点.

31. 已知一顶点的位置及三边的长，求作三角形，使定顶点的对边(所在直线)通过一定点.

32. 已知周长、一角及这角的平分线，求作三角形.

33. 已知周长、一角及夹这角的两边之比，求作三角形.

34. 已知周长、一角及对边的高，求作三角形.

35. 已知周长、一角及内切圆半径，求作三角形

36. 已知内切圆半径、一角及对边的高，求作三角形.

§69 三角形奠基法

三角形是最简单的多边形，在很少的条件下，只要这些条件适当即可把它作出来(§65(4)，(12)；§66 例题 85). 有些作图题，若是先作成所求图形中的某个三角形，往往便奠定了全部图形的基础，由此按部就班地，就可以陆续建设其余部分了. 这样的三角形，有奠基的作用，因称奠基三角形. 利用奠基三角形作为基础来解作图题，叫做三角形奠基法. 这个方法在作图中的应有也是很广泛的，许多问题常常借它而获得解决.

例题 91 已知三条中线的长，求作三角形.

设定 三线段 l, m, n(图 456).

求作 $\triangle ABC$，使它的中线 $AL = l, BM = m, CN = n$.

分析 假设 $\triangle ABC$ 已经作成，G 是它的重心. G 最显著的性质，是它把每条中线分为两段，其中一段是另一段的 2 倍. 各中线将原三角形分成了六个小三角形，随便作成它们里面的一个，便可以作成全图. 可惜的是，虽然它们各有

两边之长已知（中线的$\frac{2}{3}$或$\frac{1}{3}$），但因尚欠一个条件（一边或一角）而不能确定．既然独立地作出这些小三角形有困难，我们便不得不从它们彼此间的关系去另想办法．譬如，看$\triangle GBL$与$\triangle GCL$吧，除了已知长度的两边外，第三边BL与CL虽未知其长，然而它们彼此相等．基于这个关系，如果把$\triangle GCL$迁移到图中$\triangle KBL$的位置，这样就和$\triangle GBL$凑成一个三角形$\triangle GBK$．显然，$\triangle GBK$的三边分别等于三条中线的$\frac{2}{3}$，因此它是确定的．现在L是GK的中点，由此可以求C；$GA = GK$，由此可以求A．至此所求三角形便完成了．

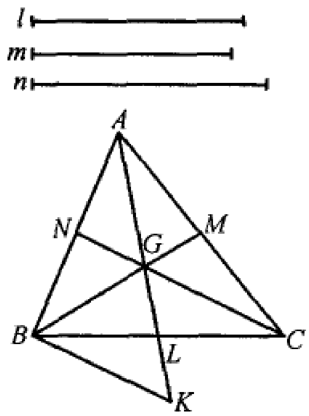


图 456

作图　先作$\triangle GBK$，令（§65(25)）

$$GK = \frac{2}{3}l, BG = \frac{2}{3}m, BK = \frac{2}{3}n$$

再取GK的中点L，联结BL并延长至C，使$LC = LB$；又延长KG至A，使$GA = GK$．最后联结AB，AC，则$\triangle ABC$是所求的三角形．

证明　按作图，L是BC的中点，即AL是$\triangle ABC$的中线；又因$AG = GK = 2GL$，故知G是$\triangle ABC$的重心．那么设BG交AC于M，CG交AB于N，BM和CN自然是$\triangle ABC$的中线了．这时很易知道

$$AL = 3GL = \frac{3}{2}GK = \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}l = l$$

$$BM = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}m = m$$

$$CN = 3GN = \frac{3}{2}KB = \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}n = n$$

所以$\triangle ABC$确合条件．

推究　本题有解无解，系乎$\triangle GBK$是否存在，而这个三角形存在的条件为

$$\begin{cases} m + n > l \\ n + l > m \\ l + m > n \end{cases}$$

这就是说，当三已知线段l, m, n的最长者小于余二者的和时，本题有一解；否则无解．

在上例的作图里，最主要的一点，是先寻求奠基三角形$\triangle GBK$作为基础，然后逐步完成所求三角形$\triangle ABC$．一般说来，凡用三角形奠基法，在进行分析

时，其步骤如下：

(1) 在草图中，标记已知件，先标明设定的，依次标记逐渐推定的；

(2) 寻求奠基三角形，要它的三边及三角中有三件是带有标志的，但这三件中最少有一件是边；

(3) 奠基三角形在草图中有时就已自己形成了，如其不然，可以设法添辅助线来帮助寻觅；

(4) 以奠基三角形为基础，推求建设其余部分的方法.

例题 92 已知自同一顶点所引出的高、中线、平分角线的长，求作三角形.

设定 三线段 h, m, t（图 457）.

求作 $\triangle ABC$，使它的高 $AH = h$，中线 $AM = m$，角平分线 $AT = t$.

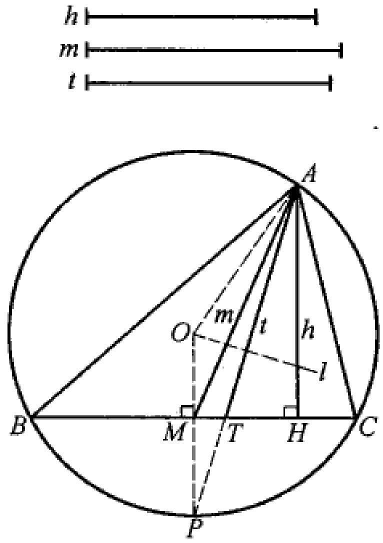


图 457

分析 假定 $\triangle ABC$ 已经求得. 图中的 Rt$\triangle AHM$，有已知长度的两边 $AH = h$ 和 $AM = m$，因此这个直角三角形得以确定. 再由于 $AT = t$，而点 T 也就随着确定下来了.

希望 AT 是 $\angle BAC$ 的平分线，它就得通过 $\triangle ABC$ 外接圆的 $\overset{\frown}{BC}$（非 $\overset{\frown}{BAC}$）的中点 P；又希望 M 是边 BC 的中点，那么垂直 BC 于 M 的直线也得要通过点 P. 现在 AT 和 HM 既经确定，可见点 P 能够求得.

点 P 求得以后，AP 便是 $\triangle ABC$ 外接圆的弦，于是圆心 O 应在 AP 的中垂线上. 但是圆心 O 又应在直线 PM 上，这样一来，点 O 的位置便完全确定.

$\triangle ABC$ 的外心 O 既求得，OA 就是外接圆的半径，因此外接圆可以画出来. 画出外接圆后，B, C 两顶点便随着显出了，至此问题即告解决.

作图 先作 Rt$\triangle AHM$，令

$$\angle AHM = 90°, AH = h, AM = m$$

次在射线 HM 上求一点 T，使

$$AT = t$$

然后自 M 引直线垂直于 HM 而交 AT 于 P，并作 AP 的中垂线 l 交 PM 于 O. 最末以 O 为心且通过点 A 画圆，设它交直线 HM 于 B, C，则 $\triangle ABC$ 即合所求.

证明 点 O 既在 AP 的中垂线 l 上，当然 $OP = OA$，可见点 P 在 $\triangle ABC$ 的

外接圆上.现在直线 OMP 垂直于 BC,那么 M 是 BC 边的中点,P 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点;从而 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线,AP 是 $\angle BAC$ 的平分线.于是在 $\triangle ABC$ 中,有高 $AH = h$,中线 $AM = m$,平分角线 $AT = t$,所以它合乎条件.

推究　(1)h,m,t 不全相等时.从上面的作图可以知道,首先要能作得 Rt$\triangle AHM$,其次要能求得点 P,第三还要 P 与 A 分在 HM 的两侧,然后 B,C 两点才存在.要保证这几件事成立,就非得点 T 介于 H,M 两点之间不可.故:

①$h < t < m$,本题有一解;

②h 不小于 t 或 h 不小于 m 或 t 不小于 m,均无解.

③$h = m = t$ 时.本题有无限多解,此时 $AB = AC > h$.

例题 93　已知三个角的大小及一双对边的长,求作凸四边形.

设定　三角 α,β,γ 及两线段 m,n(图 458).

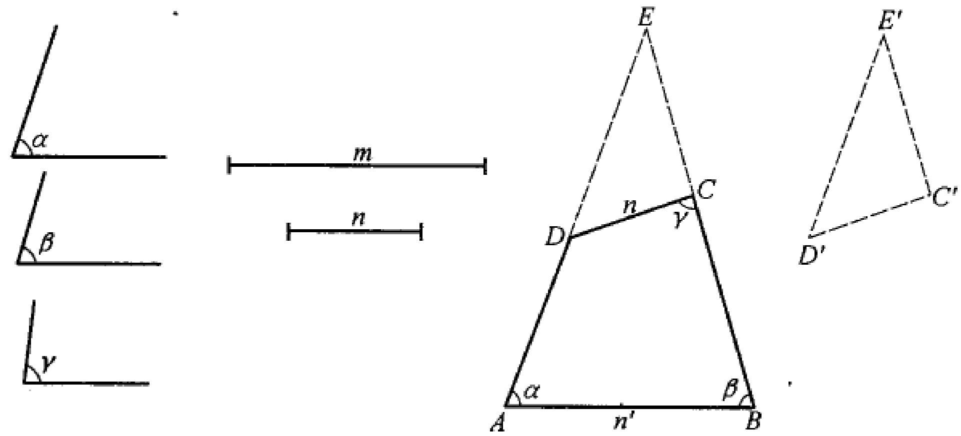


图 458

求作　凸四边形 $ABCD$,使 $\angle DAB = \alpha$,$\angle ABC = \beta$,$\angle BCD = \gamma$ 及 $AB = m$,$CD = n$.

分析　设图已成.为使叙述确定起见,可暂假定延长 AD 与 BC 时相交于 E.①试看 $\triangle EAB$,已有 $AB = m$,$\angle EAB = \alpha$,$\angle EBA = \beta$,因而它完全确定.又看 $\triangle ECD$,其中 $CD = n$,$\angle ECD = 180° - \gamma$,$\angle EDC = 180° - \angle CDA = 180° - (360° - \alpha - \beta - \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - 180°$,所以它也完全确定.由此 $BC = EB - EC$ 及 $DA = EA - ED$ 均可求得,至是四边形 $ABCD$ 定局.

作图　作 $\triangle EAB$,使

① 其他情形,俟到推究时讨论.

$$AB = m, \angle EAB = \alpha, \angle EBA = \beta$$

又作 $\triangle E'C'D'$，使

$$C'D' = n, \angle C' = 180^\circ - \gamma, \angle D' = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

以 E 为圆心，分别以 $E'C'$，$E'D'$ 为半径画弧，设分别交线段 EB，EA 于 C，D，并联结 CD，则 $ABCD$ 是所求的四边形.

证明 按作图，$ABCD$ 显然已是凸四边形，而且

$$AB = m, \angle DAB = \alpha, \angle ABC = \beta$$

再则 $\angle E = 180^\circ - \alpha - \beta$，$\angle E' = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) - (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) = 180^\circ - \alpha - \beta$，于是 $\angle E = \angle E'$；添上 $EC = E'C'$ 和 $ED = E'D'$，便知 $\triangle ECD \cong \triangle E'C'D'$. 因而

$$CD = C'D' = n$$

且 $\angle BCD = 180^\circ - \angle ECD = 180^\circ - \angle C' = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) = \gamma$，故四边形 $ABCD$ 合条件.

推究 讨论这个作图题要从三处着眼：第一，凸四边形的任何三个角的和永在 180° 与 360° 之间. 第二，点 E 的位置如何？是否存在？这与 $\alpha + \beta$ 的值有关. 第三，得到的四边形是不是凸的？这要看 EB 与 $E'C'$，EA 与 $E'D$ 的长短如何，此事又系乎 α, β, γ 及 m, n 的大小关系. 综合各种可能情形，其分类如下.

(1) $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$.

① $\alpha + \beta < 180^\circ$ 时（图 458），若 $EB > E'C'$ 且 $EA > E'D'$，即 $m\sin\alpha + n\sin(\alpha + \beta + \gamma) > 0$ 且 $m\sin\beta - n\sin\gamma >$，则有一解；若 $EB \leqslant E'C'$ 或 $EA \leqslant E'D'$，即 $m\sin\alpha + n\sin(\alpha + \beta + \gamma) \leqslant 0$ 或 $m\sin\beta - n\sin\gamma \leqslant 0$，则无解.

② $\alpha + \beta > 180^\circ$ 时（图 459），若 $EB < E'C'$ 且 $EA < E'D'$，即 $m\sin\alpha + n\sin(\alpha + \beta + \gamma) < 0$ 且 $m\sin\beta - n\sin\gamma < 0$，则有一解；若 $EB \geqslant E'C'$ 或 $EA \geqslant E'D'$，即 $m\sin\alpha + n\sin(\alpha + \beta + \gamma) \geqslant 0$ 或 $m\sin\beta - n\sin\gamma \geqslant 0$，则无解.

③ $\alpha + \beta = 180^\circ$ 时（图 460），若 $m\sin\alpha = n\sin\gamma$，则有无限多解；若 $m\sin\alpha \neq n\sin\gamma$，则无解.

(2) $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 180^\circ$ 或 $\alpha + \beta + \gamma \geqslant 360^\circ$，此时无解.

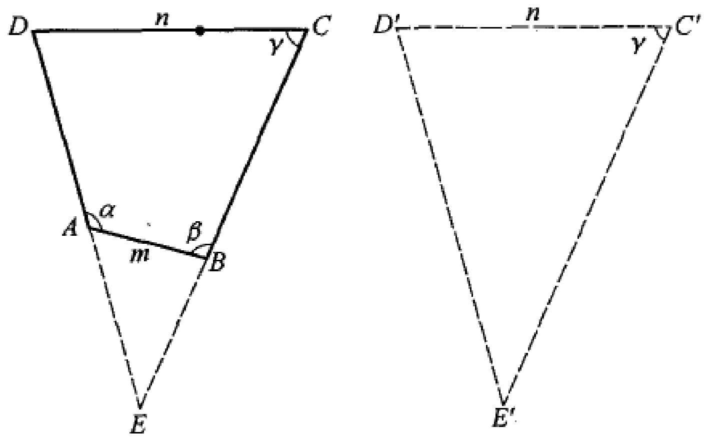


图 459

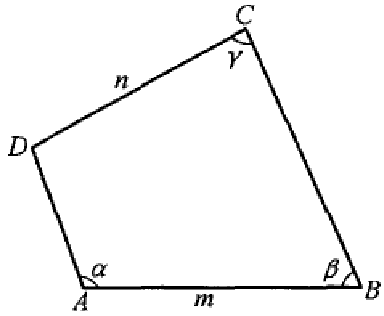


图 460

习题 26

1. 什么叫做三角形奠基法?此法在进行分析时其步骤如何?

2. 已知一底、一腰、高、中位线,求作梯形.

3. 已知高及两对角线,求作平行四边形.

4. 已知腰的高及底边,求作等腰三角形.

5. 已知两边的中线及第三边,求作三角形.

6. 已知两边的中线及这两边中的一边,求作三角形.

7. 已知两边的中线及第三边的高,求作三角形.

8. 已知两边的中线及其中一边的高,求作三角形.

9. 已知两边的高及其中一边的中线,求作三角形.(提示:自已知中线的边的中点向另一边引垂线.)

10. 已知第一边的长、第二边的高、第二第三两边的和,求作三角形.

11. 已知第一边的长、第二边的高、第三边的中线,求作三角形.

12. 已知一边、这边的中线、另一边的高,求作三角形.

13. 已知第一边的对角、第二边的长、第三边的中线,求作三角形.

14. 已知第一边的高、第二边的对角、第三边的中线,求作三角形.

15. 已知一角及对边的高与中线,求作三角形.

16. 已知一边的长、另一边的高、外接圆的半径,求作三角形.

17. 已知外接圆半径及一边的高与中线,求作三角形.

18. 已知一边的高、对角的平分线、内切圆的半径,求作三角形.

19. 已知一边的高、对角的平分线、另两边的积,求作三角形.

20. 已知自同一顶点所引出的高、中线、外角平分线的长,求作三角形.

21. 已知一边的高及中线,又知这边与另一边之比,求作三角形.

22. 已知腰的高及中线,求作等腰三角形.

23. 已知顶角的平分线,两底角的差、两腰的和与底边之比,求作三角形.(提示:应用习题 11 第 18 题.)

24. 已知底边的长、两腰的差、两底角的差,求作三角形.(提示:应用 §38 例题 20.)

25. 已知底边、顶角、两腰的高之和,求作三角形.(提示:延长一高(过高线足)使延长部分等于另一高,再自延长部分的端点引垂线使与一腰的延长线相交.)

第三节　全等变换与变位法

§70　全等变换

甲乙两图形的点之间,假如有一对一的对应关系,并且甲形上每两点间的距离等于乙形上两对应点间的距离,我们便称这两个图形做全等图形,或者说此形全等于彼形.显然,全等图形的对应角必然相等(§5 定理 2(3)).在两个全等图形中,视乎对应三角形是真正全等抑镜像全等,而也说这两图形真正全等或镜像全等.

假设有一个图形 F,经过某种变换而变为与自己全等的图形 F',那么这个变换叫做全等变换.实质上,全等变换即是两个全等图形的点与点之间存在的那种对应.全等变换有下列三型:

Ⅰ.反射

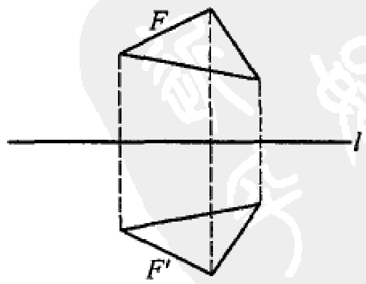


图 461

设图形 F 与 F' 关于直线 l 对称(图 461),则 F 与 F' 镜像全等,这是我们早已知道的.当 F 按这样方式变成 F' 时,我们特别称这种全等变换做线镜反射,或简称反射;其中的直线 l 叫做反射轴.

显然,在任何一个反射中,反射轴上的点虽经反射而不变,反射轴和它的任何垂线也不因反射而

变位.凡经过某种变换而保持不变的点,叫做二重点或不变点;不变的直线叫做二重线或不变线.但应注意,一般的通过二重点的直线未必是二重线,二重线上的点未必是二重点.

把接连施行若干个变换总起来看成一个变换,这个变换叫做该若干个变换的积.例如,变换 T_1 把图形 F 变做 F_1,变换 T_2 把 F_1 变做 F_2,…,变换 T_n 把 F_{n-1} 变做 F_n,总起来可以看做 F 变为 F_n,这个变换便是 n 个变换 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 的积.

现在让我们来考虑两个反射的积.假设反射 S_1 把图形 F 变做 F',反射 S_2 把 F' 变做 F'',那么 S_1, S_2 的积把 F 变做 F''.因为 F 与 F',F' 与 F'' 都镜像全等,所以 F 与 F'' 必然真正全等;这就是说,两个反射的积是一个全等变换.这个全等变换按两条反射轴平行或相交而分为两种情形,它们正是我们要讨论的第二和第三型的全等变换.

Ⅱ.平移

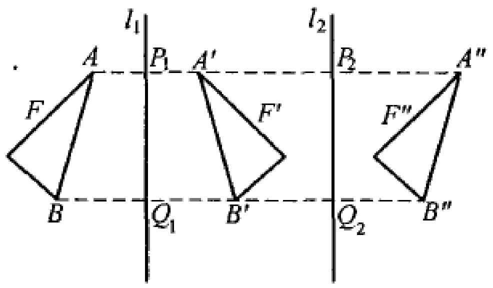


图 462

设 l_1 是反射 S_1 的反射轴,l_2 是反射 S_2 的反射轴,而 $l_1 \parallel l_2$(图 462).假定 S_1 把图形 F 变成 F',S_2 把 F' 变成 F'',A 与 B,A' 与 B',A'' 与 B'' 三对点分别属于 F, F', F'' 而双双对应.显而易见,A, A', A'' 三点及 B, B', B'' 三点分别共线(两线可能合一),这两线同垂直于 l_1 及 l_2.若命这两线与 l_1, l_2 的交点为 P_1, P_2 及 Q_1, Q_2,则

$$\overline{AA''} = \overline{AA'} + \overline{A'A''} = 2(\overline{P_1A'} + \overline{A'P_2}) = 2\,\overline{P_1P_2}$$

$$\overline{BB''} = \overline{BB'} + \overline{B'B''} = 2(\overline{Q_1B'} + \overline{B'Q_2}) = 2\,\overline{Q_1Q_2}$$

但
$$\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$$

故
$$\overline{AA''} = \overline{BB''}$$

由此可见 $ABB''A''$ 是一个平行四边形(可能退缩为一线段).这说明了当 F 变到 F'' 时,其中所有点移动的方向都一致(垂直于反射轴),移动的距离都相等(等于两反射轴间的距离的 2 倍),而对应线段[①]同向平行(或共线)且相等.

像上述把 F 变到 F'' 的全等变换,称为平移.其中每一点移动的方向叫做平移方向,移动的距离叫做平移距离.

平移没有二重点,但有无限多条二重线,即是所有平行于平移方向的直线.

---

① 一般地说,除线段的端点外,线段上的点不必属于图形 F 及 F''.以后再有类此情形,将不另说明.

Ⅲ. 旋转

设 l_1, l_2 分别是反射 S_1, S_2 的反射轴，而它们交于点 O(图 463). 假定 S_1 把图形 F 变成 F'，S_2 把 F' 变成 F''，A, A', A'' 三点分别属于 F, F', F'' 而互相对应. 由轴对称的性质，得知

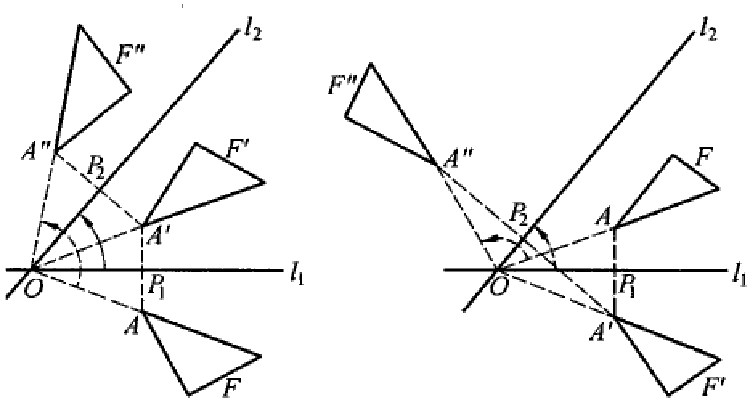


图 463

$$OA = OA' = OA''$$

及

$$\angle AOA'' = |\angle AOA' \pm \angle A'OA''| = 2|\angle P_1OA' \pm \angle A'OP_2| = 2\angle P_1OP_2$$

其中 P_1, P_2 分别是 AA' 与 l_1，$A'A''$ 与 l_2 的交点. 这就是说，当 F 变到 F'' 时，其中所有点(点 O 除外)都绕着一定点(点 O)转动，并且转动的角度一定(若仅取劣角，则等于两反射轴所成锐角的 2 倍).

像上述把 F 变到 F'' 的全等变换，称为旋转，其中的定点叫做旋转中心，转动的角度叫做旋转角.

旋转中有一种特殊情形，发生于两反射轴 l_1 与 l_2 互相垂直的时候(图 464). 此时旋转角等于二直角，于是 O 成为 AA'' 线段的中点. 这样一来，F 与 F'' 便是关于点 O 的中心对称图形了. 这个特殊的旋转，叫做点镜反射；点 O 叫做反射中心. 点镜反射中的对应线段反向平行(或共线)且相等.

旋转或点镜反射仅有一个二重点，即旋转中心或反射中心. 旋转若非点镜反射，则无二重线；但点镜反射可有无限多条二重线，即是通过反射中心的所有直线.

上面讨论了三种全等变换，进一步就应该问：如果已知两个图形 F 与 F' 全等，那么使它们彼此互变的是哪种全等变换呢？现在我们分两种情形来研究.

第一，假定图形 F 与 F' 真正全等，这时可能发生三种情况.

(1) F 与 F' 中至少有一对对应线段同向平行(包括共线[1]). 设 AB 与 $A'B'$ 就是这样的一对对应线段(图 465),那么 AA' 与 BB' 显然也同向平行且相等. 今取 F 与 F' 的任意一对对应点 C, C' 来看:若它们各在直线 $AB, A'B'$ 上,很容易知道 CC' 同向平行且等于 AA' 及 BB';如其不然 $\triangle ABC$ 便真正全等于 $\triangle A'B'C'$,而此时若作线段 CC'' 同向平行且等于 AA' 及 BB', 势必 $\triangle ABC$ 也真正全等于 $\triangle A'B'C''$,于是 C'' 重合于 C',可见 CC' 还是同向平行且等于 AA' 及 BB'. 由此得知:在本场合下,经过一次平移可以把 F 变换为 F',并且这个变换是唯一的.

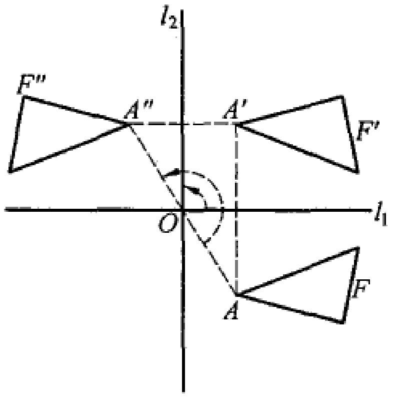


图 464

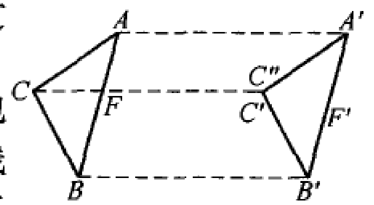


图 465

(2) F 与 F' 中至少有一对对应线段反向平行(包括共线[2]). 我们仍然假定 AB 与 $A'B'$ 是这对对应线段, C 与 C' 是任意一对对应点(图 466). AB 与 $A'B'$ 反向平行且相等,这就使得 AA' 与 BB' 必然互相平分于一点 O. 如果 C, C' 各在直线 $AB, A'B'$ 上,易知它们关于点 O 对称;不然, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 便真正全等,而此时若取 C 关于点 O 的对称点 C'',则不难知道 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C''$ 也真正全等,可见 C'' 与 C' 一致,即是 C, C' 关于点 O 仍然对称. 这就是说:在本场合下,经过一次点镜反射可以把 F 变换为 F',并且这个变换是唯一的.

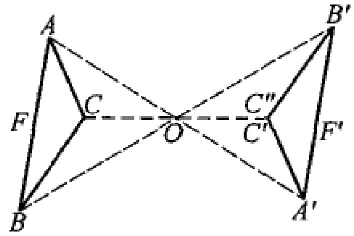


图 466

(3) F 与 F' 中没有平行的对应线段. 今以 AB 与 $A'B'$ 代表其中任意一对对应线段. 联结 AA', BB',这两条连线或者不平行(图 467(a))或者平行(图 467(b)). 若是前者的情形,可作 AA', BB' 的中垂线 a, b,命 a 与 b 的交点为 O;如果是后者的情形,则 $AA'B'B$ 必然是等腰梯形,因而 a 与 b 合而为一,这时可取直线 AB 与 $A'B'$ 的交点 O 代替 a 与 b 的交点. 不论在哪种情形里,都有

$$OA = OA', OB = OB'$$

---

① 这时只需将下面的叙述稍稍修改一下,便可适用.
② 这时只需将下面的叙述稍稍修改一下,便可适用.

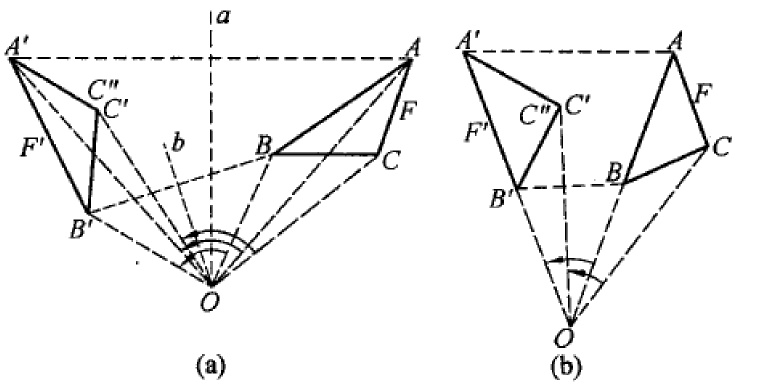


图 467

因此在图 467(a) 中,$\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$;从而 $\angle AOB = \angle A'OB'$.那么

$$\angle AOA' = \angle BOB'$$

再在图 467(b) 中,这等式是明明成立的.现在取 F 与 F' 的任意一对对应点 C,C' 来看:假若它们各在直线 AB,$A'B'$ 上面,则容易察知

$$OC = OC'$$

且
$$\angle COC' = \angle AOA'$$

如其不然,即得真正全等三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$,而此时若以 O 为旋转中心,$\angle AOA'$ 为旋转角,将 C 旋转至 C'',则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C''$ 也应该是真正全等三角形,可见 C'' 与 C' 实际是一个点.至此我们立得结论:在本场合下,经过一次旋转可以把 F 变换为 F',并且这个变换是唯一的.

在前面已经知道,平移和旋转(包括点镜反射) 都等于两个反射的积,所以上述三种情况可以总括成为一个命题:

定理 154 任意给出两个真正全等图形,总可以接连施行两次反射使得此形变成彼形.

又从上面的讨论过程中,我们获知真正全等图形的一个本质上的特性;

定理 155 两真正全等图形中,对应点联结线的中垂线共点或互相平行.

第二,假定图形 F 与 F' 镜像全等.设 A 与 A',B 与 B' 是它们的任意两对对应点,并通过 AA',BB' 的中点 M,N 作直线 l[①](图 468).联结 AB',取它的中点 P 与 M,N 相连,那么 $PN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A'B' = PM$;因而 $\angle PNM = \angle PMN$.命 AB,$A'B'$ 与 l 的交点为 L,L',则因 $AB \parallel PN$ 且 $A'B' \parallel PM$,得知

$$\angle ALM = \angle A'L'M$$

① 万一 M 和 N 重合,只需所作的 l 垂直于 AB(因而也垂直于 $A'B'$) 即可.

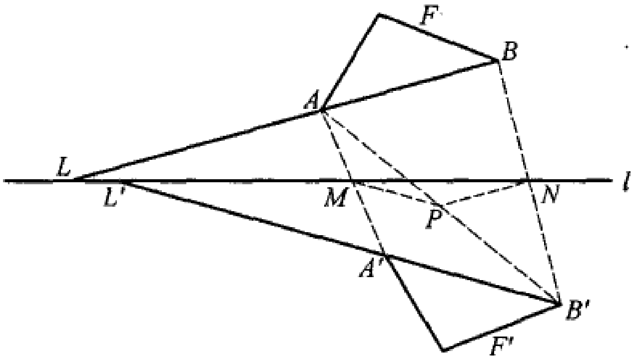


图 468

现在根据这个等式，分别研究下述两种情况.

(1) 当 L 与 L' 合而为一点时，显然 A 与 A'，B 与 B' 关于 l 对称(图 469). 这时 F 与 F' 的任意一对对应点 C, C' 必然也关于 l 对称. 若谓不然，可设 C 关于 l 的对称点为 C''. 这样一来，$\triangle ABC$ 应镜像全等于 $\triangle A'B'C''$. 但 $\triangle ABC$ 原镜像全等于 $\triangle A'B'C'$，可见 C'' 应与 C' 一致. 至于 C，C' 分别在直线 AB，$A'B'$ 上面的时候，这情形更属显然. 所以，在本场合下，经过一次反射可以把 F 变换为 F'.

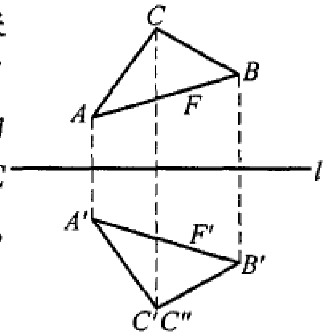


图 469

(2) 当 L 与 L' 是相异的点时，则 A 与 A'，B 与 B' 关于 l 不对称(图 470). 设 F 关于 l 的对称形为 F_1，A_1B_1 是 F_1 中对应于 AB 的线段. 由于 F_1，F' 都镜像全等于 F，可见 F_1 与 F' 真正全等；又从上面已知的角的关系，极易推得 $A_1B_1 \parallel A'B'$. 根据 l 的作图，A 与 A' 应分在 l 的两侧且与 l 等距；现在 A 与 A_1 也分在 l 的两侧且与 l 等距，那么 A_1 与 A' 当同在 l 的一侧且与 l 等距. 因此得知 $A_1A' \parallel l$. 同理，$B_1B' \parallel l$. 这些结果说明了 A_1B_1 与 $A'B'$ 不但平行而且是同向的. 从而按照上面(第一(1))讨论过的事实，就立刻知道经过一次平移可以把 F_1 变换为 F' 了. 总起来说：在本场合下，接连施行一次反射和一次平移便可以把 F 变换为 F'. 同时我们还见到，这两个变换是可以交换的，即是先行平移后行反射结果仍然一样，这道理从图 470 看来十分明白.

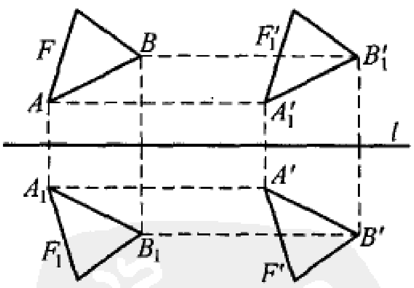


图 470

像这样把 F 变到 F' 的变换，叫做滑行反射；其中的 l 直线叫做滑行反射轴. 滑行反射没有二重点，只有一条二重线，即是滑行反射轴.

由上面的讨论,我们得到下列两命题:

定理 156 任意给出两个镜像全等图形,可以施行一次或接连施行三次反射使得此形变成彼形.

定理 157 两镜像全等图形中,对应点联结线的中点共线.

这后一个关于镜像全等图形的本质上的特性,决定了在上述两种场合下所施行的那个反射和平移都是唯一的.

§71 变位法

研究了全等变换的原理,我们不但深刻地认识全等图形间的基本关系,还可以应用它来解作图题.把全等变换用于作图题的具体作法,是将图形的某些元素旋行全等变换,然后借各元素的新旧位置关系发现作图的方法.这种解题方法叫做变位法.由于所用的全等变换不同,变位法又分为以下几种.

Ⅰ.翻折法

此法中所用的全等变换是反射,举例如下:

例题94 设 A,B 是定直线 XY①同侧的两定点(图471),在 XY 上求一点 O,使 $\angle AOX = 2\angle BOY$.

设定 直线 XY 及其同侧两点 A,B.

求作 在 XY 上的一点 O,要它合于 $\angle AOX = 2\angle BOY$.

分析 假定图已作成.试取 B 关于 XY 的对称点 B',并延长 AO 至 A',则见

$$\angle A'OY = \angle AOX = 2\angle BOY = 2\angle B'OY$$

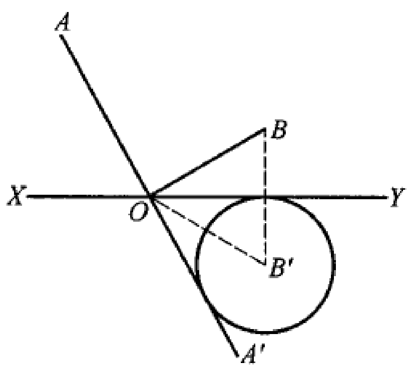


图 471

因而 OB' 是 $\angle A'OY$ 的平分线.这样便知 B' 与 AA',XY 等距,故以 B' 为心可以作圆切于这两直线.但 B' 为定点,于是 $\odot B'$ 一定.这圆确定后,AA' 是它的切线,那么点 O 也就随着确定了.

作图 先求 B 关于 XY 的对称点 B',并以 B' 为心作切于 XY 的圆,然后自 A 引射线 AA' 切于 $\odot B'$ 而交 XY 于 O.若 X,B' 两点分别在 AA' 的两侧,则 O 是所求点.

证明 因 $\odot B'$ 切于 AA',XY,可见 $\angle A'OB' = \angle B'OY$.又因 B,B' 关于 XY

① X,Y 两点在这直线上的位置,由人目看起来,设想各处于两方相当远的地方.

对称,得知 $\angle BOY=\angle B'OY$. 由此 $\angle AOX=\angle A'OY=2\angle B'OY=2\angle BOY$;故点 O 合条件.

推究　A,B' 分别在 XY 的两侧,故 AA' 必然交于 XY,即点 O 一定存在. $\odot B'$ 的切线虽然有两条通过点 A,但只有把 X,B' 两点分开在两侧的那一条合用,因此本题仅有一解.

注　自 A 所引 $\odot B'$ 的另一条切线 AA'',适用于 X 与 Y 互换位置的情形,如图 472 所示.

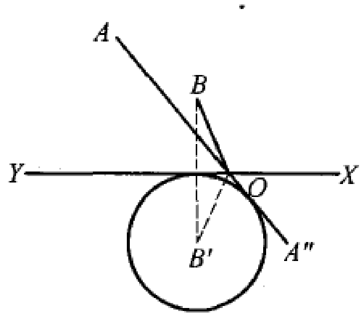


图 472

Ⅱ. 平移法

此法中所用的全等变换是平移. 当需要集中图形中某些分散元素以观察其关系时,用此法颇能见效. 例如,两线段可经过平移使有一端相合,平移一直线而令通过一定点,等等,诸如此类,不胜枚举,都是有助于解题的. 施行平移法时,宜注意下列几点:

(1) 取哪个平移方向?

(2) 平移距离要多远?

(3) 把什么东西平移?

例题 95　在 $\triangle ABC$ 内(图 473),求作一平行于 BC 而两端分别着于 AB,AC 两边的线段 EF,并且使得 $AE=CF$.

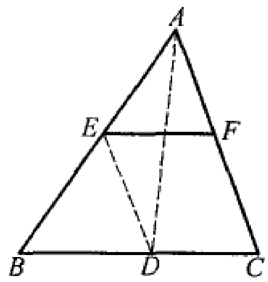


图 473

设定　$\triangle ABC$.

求作　线段 EF,使 $EF\parallel BC$, E,F 分别在 AB,AC 两边上,且 $AE=CF$.

分析　设图已成. 当平移 FC 至 ED 时, $CDEF$ 即形成一个平行四边形,因而 $AE=CF=DE$. 若连 AD,则 $\angle EAD=\angle EDA=\angle FAD$;可见 AD 应是 $\angle A$ 的平分线. 这样一来,点 D 是确定了,而 EF 也就因此可求了.

作图　先作 $\angle A$ 的平分线(§65(7)),设交 BC 于 D;次作 DE 平行于 CA 而交 AB 于 E;又作 EF 平行于 BC 而交 AC 于 F. 这 EF 便是所求的线段.

证明　因 AD 平分 $\angle A$ 且 $DE\parallel CA$,故 $\angle EAD=\angle FAD=\angle EDA$;于是 $AE=DE$. 又因 $EF\parallel BC$,知 $CF=DE$. 由此推得 $AE=CF$.

推究　本题永有一解.

注　本题若允许 E,F 分别落在 AB,AC 边的延长线上,则当 $AB\neq AC$ 时,

利用$\angle A$的外角平分线,可再得一解(建议读者绘图一试);但若$AB = AC$,此解便消失.

Ⅲ.旋转法

此法中所用的全等变换是旋转.使用此法时,首要条件是寻觅得适当的旋转中心,否则将无从施展此法.找到旋转中心后,再决定旋转角的大小以及旋转的方向.

例题 96 求作一正三角形,使它的三个顶点分别落在三个已知的同心圆上.

设定 三个同心圆$\odot O(a)$,$\odot O(b)$,$\odot O(c)$(图 474).

求作 正三角形$\triangle ABC$,使A,B,C三点分别落在$\odot O(a)$,$\odot O(b)$,$\odot O(c)$上.

分析 设所求的$\triangle ABC$已求得.联结OA,OB,而后将$\triangle ABO$绕A旋转$60°$,如图 474 所示,使至$\triangle ACP$的位置(因$\angle BAC = 60°$且$AB = AC$).若联结OP,则因$\angle OAP = 60°$且$AO = AP$,可知$\triangle OAP$是正三角形;从而$OP = OA = a$,于是P在$\odot O(a)$上.那么点P得以确定.得点P后,由于$PC = OB = b$,便随着求得点C.$\triangle ACP$确定了,将它旋转回去,即获得点B.

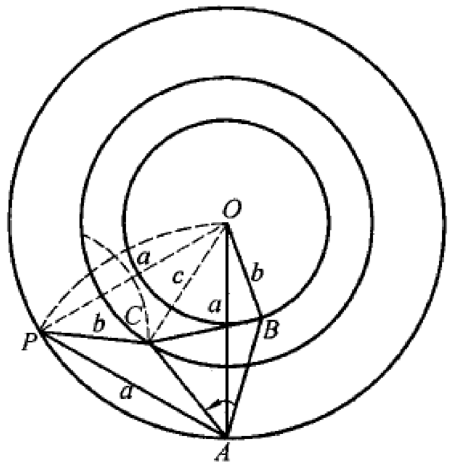


图 474

作图 先以$\odot O(a)$上的任一点A为心,a为半径画弧截$\odot O(a)$于P;再以P为心,b为半径画弧设交$\odot O(c)$于C;最后将$\triangle ACP$绕A旋转$60°$,使P重合于O(因$\angle PAO = 60°$),而设C移到点B.此时$\triangle ABC$即合所求.

证明 据作图,$\triangle ABO \cong \triangle ACP$,于是$OB = PC = b$而点$B$在$\odot O(b)$上.现在$AB = AC$且$\angle BAC = 60°$,故$\triangle ABC$是正三角形.

推究 上述作图的步骤有三:先求P,次求C,最后求B.点P存在自不待言,点B存在与否,要看点C的有无,故C应是推究的着眼点.而点C存在与否,则和三圆半径的大小有关.由此,得知本题的解数情形如下[①]:

---

① 注意本题属于半活位作图.

(1)a,b,c 中最大者小于其余二者的和时，两解；
(2)a,b,c 中最大者等于其余二者的和时，一解；
(3)a,b,c 中最大者大于其余二者的和时，无解．

Ⅳ.中心对称法

此法中所用的全等变换是点镜反射．这是特殊的旋转法(180°的旋转)，特别适用于涉及线段中点的问题．用时注意下列两个关于点镜反射的性质：

(1) 奇数个点镜反射的积仍是点镜反射；

(2) 偶数个点镜反射的积是平移或恒等变换①．

例题97　已知各边中点的位置，求作五边形．

设定　五点 K,L,M,N,P(图475)．

求作　五边形 $ABCDE$，使 K,L,M,N,P 依次是 AB,BC,CD,DE,EA 五边的中点．

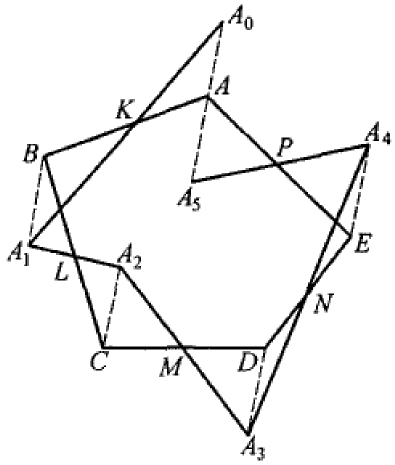


图475

分析　希望 K,L,M,N,P 依次是未知五边形 $ABCDE$ 的边 AB,BC,CD,DE,EA 的中点，无异于求一点 A，接连以 K,L,M,N,P 为反射中心施行五次点镜反射后，使 A 仍变回自己．我们知道，五个点镜反射的积还是点镜反射，而在点镜反射之下，只有反射中心是不变点(二重点)，那么点 A 非是这个点镜反射的中心不可了．于是本题变而为怎样去求这个点镜反射的中心的问题．要求一个点镜反射的中心，但能求得随便一对对应点即可．因此可以随便取一点 A_0，而接连施行上述的五个点镜反射，设将 A_0 变成 A_5，则 A_0A_5 线段的中点就是所要的 A．点 A 即得，其他顶点 B,C,D,E 自可顺序作出来．

作图　任取一点 A_2，作折线 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$，使 K,L,M,N,P 依次是 $A_0A_1,A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_5$ 的中点．取锁线 A_0A_5 的中点 A，作折线 $ABCDE$，使 K,L,M,N 依次是 AB,BC,CD,DE 的中点；联结 EA，五边形 $ABCDE$ 便合所求．

证明　按作图，K,L,M,N 已经依次是 AB,BC,CD,DE 的中点，故现在只需证 P 是 EA 的中点即可．据点镜反射的性质(§70Ⅲ)晓得

① 使得每个点都变回自己的变换，叫做恒等变换．

$$A_0A \parallel A_1B \parallel A_2C \parallel A_3D \parallel A_4E$$

且
$$\overline{A_0A} = -\overline{A_1B} = \overline{A_2C} = -\overline{A_3D} = \overline{A_4E}$$

但$\overline{A_5A} = -\overline{A_0A}$,可见线段 A_5A 与A_4E 反向平行且相等.这样一来线段 A_5A_4 与 AE 必然互相平分;然而 P 是A_5A_4 的中点(作图),因知 P 也是AE 的中点.

推究 一般地说,本题有一解.但在某些情况下,所得五边形可能有一些顶点要共线.

注 上述作图原理适用于一切奇边数多边形的情形.

Ⅴ.混合变位法

此法中所用的全等变换不止一种,举例如下:

例题 98 求作一圆,使切已知角的一边于定点,而在另一边上截下定长的弦.

设定 线段 a,$\angle XOY$ 及边OX 上一点 A(图 476).

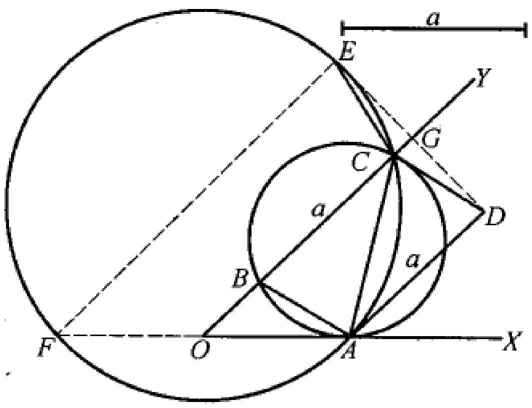


图 476

求作 一圆,使切 $\angle XOY$ 的边 OX 于A,在边 OY 上截下弦$BC = a$.

分析 设图已成.试将线段 BC 平移到AD,又关于 OY 取D 的对称点E,则见

$$\angle ACE = \angle ACO + \angle OCE = \angle OAB + \angle OCD =$$
$$\angle OAB + \angle OBA = 180° - \angle XOY \quad ①$$

因 DE 的中点G 在直线OY 上,故若关于 O 取A 的对称点F,必然 $EF \parallel OG$;于是(就图 476 来看)

$$\angle AFE = \angle XOY \quad ②$$

由 ① 和 ②,得知$\angle ACE + \angle AFE = 180°$,因而 A,C,E,F 四点共圆.但是这圆由 A,E,F 三点即已确定,那么点 C 可求.点 C 既得,其余就不成问题了.

作图 作 $AD \parallel OY$且使$AD = a$;关于 OY求D 的对称点E.延长 AO 至F,令 $OF = OA$.过 A,E,F 三点作圆(§65(15)),设交射线 OY于C.在射线 OY上按 DA 的方向截$CB = a$,得点 B.⊙ABC 便是所求的圆.

证明 按作图,已合 $BC = a$,现在只要证 ⊙ABC 与OX 相切就行了.D,E 关于 OY对称,当然 DE 的中点G 在OY上;又 O 是AF 的中点且$AD \parallel OG$,可见

$FE /\!/ OG$,由此(就图 476 来看)

$$\angle AOB = \angle AFE$$

又据作图,知道 $BA /\!/ CD$;于是

$$\angle OBA = \angle OCD = \angle OCE$$

但 $\angle AOB + \angle OBA$ 与 $\angle OAB$ 互补,而 $\angle AFE + \angle OCE$ 与 $\angle ACO$ 也互补,故必

$$\angle OAB = \angle ACO$$

因而 OA 切于 $\odot ABC$(§13 定理 91(1)).

推究　本题有一解.

注　上面的解法,妙在不用比例.

习 题 27

1. 什么叫做全等图形?什么叫做全等变换?
2. 全等变换有哪几种?各有什么特点?
3. 已知两图形真正全等,用哪一种全等变换可以使它们彼此互变?
4. 已知两图形镜像全等,用哪一种全等变换可以使它们彼此互换?
5. 两个平移的积仍是平移否?两个平移交换施行,结果是否一样?
6. 两个旋转的积仍是旋转否?两个旋转交换施行,结果是否一样?
7. 奇数个反射的积是哪一种全等变换?偶数个反射的积呢?
8. 什么叫做变位法?分哪几种?
9. 已知四边的长,且知一角被对角线平分,求作四边形.
10. 求作一正方形,使一对对顶点同落在一条定直线上,另一对对顶点分别落在另外两条定直线上.
11. 设两定点 A,B 分在定直线 l 的两侧,P 是 l 上的定点,在 l 上求另一点 Q,使合于 $\angle PAQ = \angle PBQ$.
12. 在已知三角形中,求作周长极小的内接三角形,但有一顶点是已经指定的.
13. 设 OX,OY,OZ 是三条定射线,P 是 $\angle YOZ$ 内一定点,求作 $\triangle ABC$,使 A,B,C 三顶点分别落在 OX,OY,OZ 上,边 BC 通过点 P,而 O 恰是 $\triangle ABC$ 的内心.
14. 求作一三角形,使共点的三条已知直线恰是它的三边的中垂线,并且有一边(所在直线)通过一已知点.(提示:参看第 7 题.)
15. 已知四边的中垂线的位置,求作四边形.(提示:参看第 7 题.)
16. 已知一底、两对角线及其交角,求作梯形.

17. 已知一腰、两对角线及其交角，求作梯形.

18. 已知一对对边及两对角线，求作四边形，但须使两对角线互相垂直.

19. 求作一等于定长且平行于定直线的线段，使它的两端分别落在两个定圆上.

20. 求作一圆，使通过一定点，且切于已知的两平行线.

21. 在两岸平行的河的两侧各有一村庄，试问在什么地点搭桥(桥身垂直于河岸)，才使得两村间的路径最短？

22. 已知 $\triangle ABC$，求作长度一定而两端分别着于直线 AB，AC 的线段 EF，并且使得 $AE = CF$.

23. 设 l 是定直线，A，B 是定圆 $\odot O$ 上两定点. 在 $\odot O$ 上求一点 P，使连线 PA 与 PB 在 l 上截下定长的线段.

24. 在定圆中求作定长的弦，使一已知点对这弦的视角等于定角.

25. 求作一正三角形，使它的三个顶点分别落在三条互相平行的定直线上.

26. 已知一顶点的位置，求作一正三角形，使其他两顶点同落在一定圆上.

27. 求作一正方形，使它的一对对边分别是两已知同心圆的弦.

28. 求作一正方形，使它的顶点依次落在一已知平行四边形各边所在的直线上.

29. 已知两直线 a，b 及一点 O，求以 O 为心作圆，使在 a，b 上所截两弦的和等于定长.(提示：以 O 为中心旋转一已知直线使平行于另一已知直线.)

30. 过两圆的一交点作一直线，使被两圆所截的弦相等.

31. 在定圆中求作内接矩形，使一对对边(所在直线)分别通过一已知点.

32. 设 A，B 是两定点，在定圆中求作一直径 PQ，使 $AP = BQ$.

33. 已知一顶点及重心的位置，求作三角形，使其他两顶点分别落在两定直线上.

34. 已知两边的高及第三边的中线，求作三角形.(提示：自第三边的中点向另两边引垂线.)

35. 已知四边的中点位置，求作五边形，使第五边的两端分别落在两定直线上.

36. 设 A，B 是在定直线 l 同侧的两定点. 今有一定长线段 PQ 在 l 上滑动，试问这线段停在什么位置，才使得折线 $APQB$ 的长最短？

37. 在 $\triangle ABC$ 内，求作一平行于 BC 而两端分别着于 AB，AC 两边的线段 EF，并使合于下列条件之一：

(1) $BE + CF$ 等于定长；

(2) $AE + CF$ 等于定长.

38. 设 A,B 各是两已知平行线 a,b 上的定点,O 是 a 与 b 间的定点.过点 O 求作一直线交 a,b 于 P,Q,使 $AP + BQ$ 等于定长.

第四节 位似变换与放大法

§72 位似变换

假如有两个图形 F 与 F'(图 477),它们的点之间存在一对一的对应关系,并且这个对应具有下列性质:

(1) 凡联结任一对对应点的直线都通过同一点 O;

(2) 设 A 与 A' 是任一对对应点,则 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$ 为常数,那么 F 与 F' 叫做位似图形,或者说 F' 位似于 F.

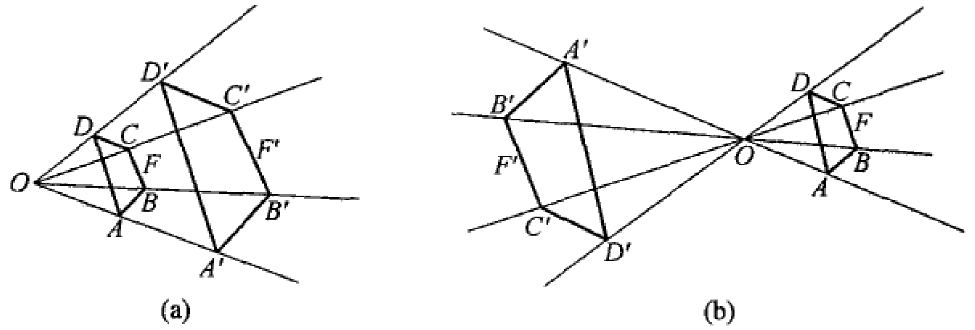


图 477

在这个定义中所说的点 O,叫做相似中心;定比 k 叫做 F' 对于 F 的相似率.显然,相似率 k 不能等于零,但却可正可负.当 $k > 0$ 时(图 477(a)),F 与 F' 称为顺位似图形;$k < 0$ 时(图 477(b)),则称为逆位似图形.在前一种情形里的相似中心,称为外相似心;在后一种情形里的则称为内相似心.

上面的图形 F',如果看做是借着相似中心 O 和相似率 k 由图形 F 经过上述那种对应关系变换而来的,我们便把这种变换叫做位似变换.$|k| > 1$ 的位似变换,可以说是把 F 放大为 F';$|k| < 1$ 的位似变换,可以说是把 F 缩小为 F'.特别地,当 $k = -1$ 时的位似变换,实际就是点镜反射.位似变换若非恒等变换,则有一个唯一的二重点,即相似中心.位似变换有无限多条二重线,即所有通过相似中心的直线,而且只有这些直线才能是二重线.

位似变换具有下列显著的性质：

(1) 凡图形可以位似于本身(反身性)；

(2) 若图形 F' 位似于 F，则 F 也位似于 F'(对称性)；

(3) 共线点与共线点对应；

(4) 不通过相似中心的任一对对应直线必互相平行；

(5) 设 A 与 A'，B 与 B' 是任意两对对应点，则 $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=k$.

其中性质(4)可以代替位似图形定义中的性质(2). 这就是说，下命题是成立的：

定理 158 若联结两个图形的任一对对应点的直线都通过同一点，而且不通过这点的任一对对应直线各相平行，则该两个图形必是位似的.

这只要观察一下图 477 便十分明白. 因为由于 $A'B' \parallel AB$，$B'C' \parallel BC$，…，可以推得 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\cdots$，然而这结果实际就是(2).

如果把上定理中的条件规定得广泛一点，那便形成：

定理 159 在甲乙两个图形的点之间(每形的点不全共线)，若是存在这样性质的一一对应：联结甲形任两点的直线与联结乙形两对应点的直线各相平行或重合①，则这种对应或是位似变换或是平移.

假定 F 与 F' 是所设的图形(图 478)，并设 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C'，D 与 D' 是任意四对对应点，但其中 C 不在直线 AB 上，而 D 在直线 AB 上，且直线 AB 与 $A'B'$ 不重合. 今联结 AA' 与 BB'，这两直线不外有平行和相交两种可能：

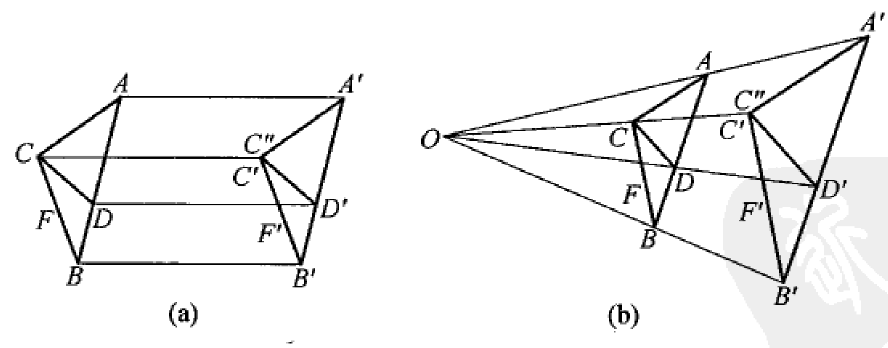


图 478

如果 $AA' \parallel BB'$(图 478(a))，则按假设可知其能借平移将 AB 转变为 $A'B'$. 这时若设 C 平移至 C''，那么将发生 $AC \parallel A'C'$ 且 $BC \parallel B'C'$(或其中一双直线

① 这里不假定所有对应直线均各重合，不然的话，甲图形实际就是乙图形了.

重合)；可见 C'' 实际就是 C'. 同理，利用 AC 与 $A'C'$ 或 BC 与 $B'C'$，得知在所行的平移中，D 要变为 D'. 这说明了当 $AA' \parallel BB'$ 时借平移可把 F 变换为 F'.

倘若 AA' 与 BB' 相交于点 O(图 478(b))，则用 O 为相似中心，A 与 A' 作为一对对应点而施行位似变换时，B 与 B' 显然也是这个位似变换的对应点，因为我们有 $AB \parallel A'B'$ 的假设. 现在假定在这个位似变换中，C'' 是 C 的对应点，于是就有 $AC \parallel A'C''$ 且 $BC \parallel B'C''$(或其中一双直线重合)；由此可见 C'' 与 C' 必然一致. 这样一来，利用 AC 与 $A'C'$ 或 BC 与 $B'C'$，同理可知在刚才所行的位似变换中，D 与 D' 也是对应点. 至于万一直线 AC 与 $A'C''$，BC 与 $B'C''$ 各相重合，那么 C，C'' 将同重合于 O，于是 C' 也要重合于 O，这时，由题设极易知道，所有原来属于 F 与 F' 的每一对对应点都各与点 O 共线，从而它们也是上述位似变换的对应点可以明白了. 这些结果证实了在 AA' 与 BB' 相交的情形下用位似变换能够使 F 变换为 F'.

推论　在三个图形中，若第一与第二，第二与第三图形之间都可借位似变换或平移由此变为彼，则第一与第三图形之间也有这种性质.

注　位似变换具有反身性和对称性，唯传递性不常成立，但如果把位似变换的概念扩充使包含平移在内，那就可以弥补这个缺陷了.

在上面的推论中，如果我们抛弃平移这方面的情形，那么所说的三个图形具有下述著名的性质：

定理 160　三个互相位似的图形之中，每两形的相似中心是共线的三点.

假设图形 F_1, F_2, F_3 两两彼此位似，O_1, O_2, O_3 依次是 F_2 与 F_3，F_3 与 F_1，F_1 与 F_2 的相似中心(图 479). 现在通过 O_1，O_2 两点作一直线 l. 对于 F_2 与 F_3 来说，l 通过它们的相似中心 O_1，可见 l 是这个位似变换的二重线，即 l 自己对应于自己. 同样对于 F_3 与 F_1 来说，l 因通过 O_2 而仍自对应. 由此可见，如果把 l 看做 F_2 的直线，那么在 F_1 中和它对应的直线正是 l 自己. 所以对于 F_2 与 F_1 来说，l 应是二重线，因而它非通过点 O_3 不可. 这便证明了 O_1, O_2, O_3 三点是共线的.

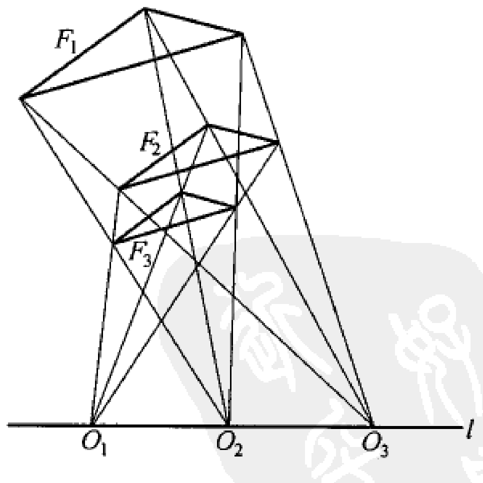


图 479

三个互相位似的图形的三个相似中心所在的直线，叫做这三个图形的**相似轴**.

在相似轴上的三个相似中心，可能三个都是外相似心，或者有一个是外相似心而其他两个是内相似心. 这是因为三个互相位似图形，或者彼此都是顺位似，或者有一组是顺位似而其他两组是逆位似的缘故.

§73　相似图形

甲乙两图形的点之间，假如有一对一的对应关系，并且甲形上任两点的距离与乙形上两对应点的距离之比，对于两图形所有的点都有同一的值，我们便称这两个图形做相似图形，或者说此形相似于彼形；所说的比叫做甲形对于乙形的相似比. 显然，相似图形的对应角必然相等（§17 定理 114(3)）. 在两个相似图形中，视乎对应三角形是真正相似或镜像相似，而也说这两图形真正相似或镜像相似.

由相似图形的定义和 §72 所说位似变换的性质(5)，我们得到如下命题：

定理 161　位似图形必彼此真正相似.

这说明了位似图形实际是相似图形的一种特殊情形. 又由 §72 的定理 159 可以推得：

定理 162　若两非全等的真正相似图形有一对对应直线互相平行或重合，则它们必是位似图形.

注　必须注意，即使两真正相似图形的每对对应顶点连线共点，但这两图形未必是位似的. 例如，在图 480 中所绘的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，它们不但真正相似，且有透视中心 O，然而它们明明就不是位似图形.

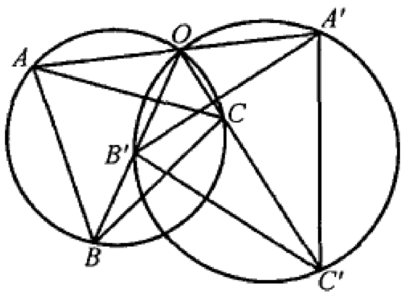


图 480

现在让我们来讨论任意两个相似图形 F 与 F' 互相变换的法则，这样将使我们对于相似图形间的关系获得更明确更深刻的了解. 由于 F 与 F' 有真正相似与镜像相似之别，故分下列两种情形来研究.

第一，假定 F 与 F' 真正相似，但是彼此既不全等也不位似(图 481). 设 A 与 A'，B 与 B' 是任意两对对应点，P 是直线 AB 与 $A'B'$ 的交点. 作 $\odot PAA'$ 与 $\odot PBB'$，命它们的第二交点为 O（图 481(a)）. 联结 OA，OB，OA'，OB'，则见

$$\angle OAB = \angle OA'B', \angle OBA = \angle OB'A'$$

因而

$$\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$$

由此 $$\angle AOB = \angle A'OB'$$
那么 $$\angle AOA' = \angle BOB'$$
万一 O 点重合于P(图 481(b)),这等式的成立更不成问题.今若以 O 为相似中心、$\frac{A'B'}{AB}$$\left(或 -\frac{A'B'}{AB}\right)$为相似率施行位似变换,将 F 变为 F_1,则显而易见,F_1 必然真正全等于 F',同时

$$OA_1 = OA', OB_1 = OB'$$

可见以 O 为旋转中心,能将 F_1 旋转使其变为 F'(§70 第一(3)),这就是说:

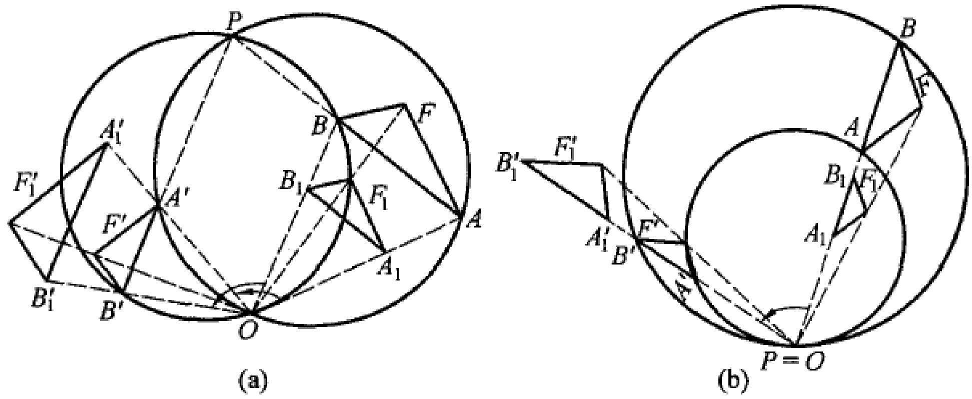


图 481

定理 163 既不全等也不位似的两个真正相似图形,可以接连行一次位似变换和一次旋转将其一形变为他形,其中相似中心和旋转中心是同一点.

定理中所说的两个变换是可以交换的,即是先行旋转后行位似变换结果也一样,看图 481 自明.这两个变换所依据的同一中心,叫做该两真正相似图形的二重点或自对应点.不难知道,这样的点在两个不全等的真正相似图形中是唯一存在的.因此,下命题必然成立(§57 例题 64):

定理 164 设图形 F 与 F' 真正相似但不全等,A 与 A' 是任一对对应点,k 是相似比.若内外分线段 AA' 于 M, N,使$\frac{MA}{MA'} = \frac{NA}{NA'} = k$,则直径为 MN 的圆恒过一定点.

第二,假定 F 与 F' 镜像相似,但是彼此不全等(图 482).设 AB 与 $A'B'$ 是既不平行也不共线的对应线段①.联结 AA', BB', AB' 三线段,并内分它们于 M, N, P,使

① 这种情形是可能的,因为如果 F 与 F' 中所有对应线段都各相平行或共线,F 与 F' 便是位似图形了(§72 定理 159).

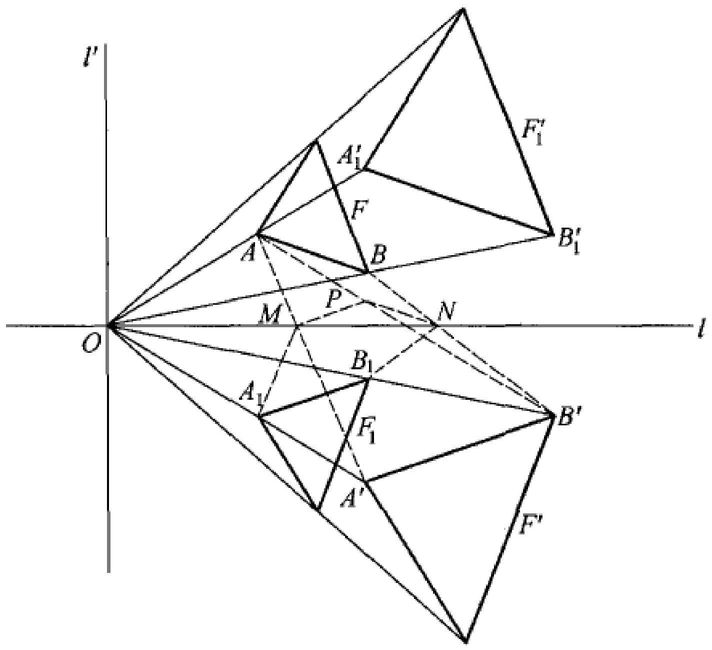


图 482

$$\frac{MA}{MA'}=\frac{NB}{NB'}=\frac{PA}{PB'}=\frac{AB}{A'B'}$$

通过 M,N 两点作直线 l. 联结 PN,PM, 则 $PN\parallel AB,PM\parallel A'B'$(§16 定理 111(1)),且 $PN=\dfrac{AB\cdot A'B'}{AB+A'B'}=PM$,因而

$$\angle PNM=\angle PMN$$

这式子说明了 $AB,A'B'$ 与 l 的交角也相等.

命 F 关于 l 的对称形为 F_1,而 A_1B_1 是 F_1 中对应于 AB 的线段. 由上面所得的结论,易见直线 A_1B_1 与 $A'B'$ 平行或重合. 因为 F_1 镜像全等于 F,F' 镜像相似于 F,所以 F_1 与 F' 真正相似. 这样一来,F_1 与 F' 必然是位似图形(定理 162).

设 O 是 F_1 与 F' 的相似中心. 联结 A_1M,B_1N. 由于 l 平分 $\angle AMA_1$,知 l 外分 A_1A' 的分比等于 MA_1 与 MA' 之比(§16 定理 113),这比显然等于 $\dfrac{AB}{A'B'}$. 同理,l 也外分 B_1B' 成 AB 与 $A'B'$ 之比. 那么,如果 l 不通过 O 点,势必 $l\parallel A'B'$(§16 定理 109);从而 $l\parallel AB$,以至 $AB\parallel A'B'$. 这和当初的假定不合,故 l 一定通过点 O.

至此我们得知:

定理 165 非全等的两个镜像相似图形,可以接连行一次反射和一次位似变换将其一形变为另一形,其中反射轴通过相似中心.

很易看出，定理中所说的两个变换是可以交换的，即是先行位似变换后行反射结果也一样(参看图 482)．在这两个变换的积中，点 O，直线 l 以及过 O 且垂直于 l 的 l' 直线都不变动，因此，这点 O 称为 F 与 F' 的二重点或自对应点，l，l' 两直线均称二重线或自对应线．不难知道，任何两个不全等的镜像相似图形有且只有一个二重点、两条二重线，这两条二重线同通过二重点且互相垂直．两条二重线有下述性质：

定理 166　非全等的两个镜像相似图形的两条二重线，内外分每对对应点的联结线所得的分比，都等于两形的相似比．

§ 74　圆和圆的位似

上面(§ 72)曾经按一般图形讨论了位似变换，现在我们专来研究圆和圆的位似，这样将使我们对于圆和圆的关系了解得更透彻．

定理 167　圆在经过位似变换后仍是圆，而且两圆心是这个位似变换中的对应点．

假设 $\odot O(r)$ 是已知圆(图 483)．现在我们取 S 为相似中心，k 为相似率，将 $\odot O(r)$ 施行位似变换．在这个位似变换中，设 O' 对应于 O，则 O' 是一个确定的点．又说 A 是 $\odot O(r)$ 上的任意点，A' 是对应于 A 的点，那么(§ 72(5))

$$\frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = k$$

由此

$$O'A' = |k| \cdot r$$

这式子表明 A' 在以 O' 为心的一个圆上，此圆的半径等于 $|k| \cdot r$．

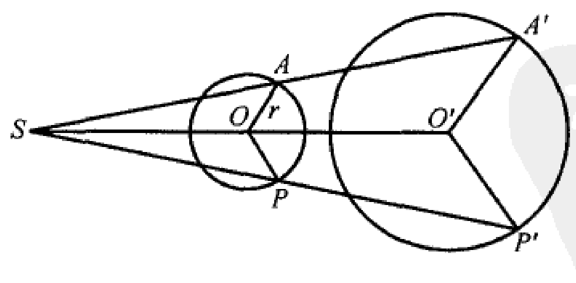


图 483

现在设 P' 是 $\odot O'$ 上的任意点，而 P 是直线 SP' 上合于关系 $\frac{\overline{SP'}}{\overline{SP}} = k$ 的点，则

$$\frac{\overline{O'P'}}{\overline{OP}} = k$$

但 $O'P' = |k| \cdot r$,可见 $OP = r$;因而 P 在 $\odot O$ 上.这就是说,$\odot O'$ 上的任何点 P',都对应着 $\odot O$ 上的一个确定的点 P.

由上所论,得知在我们所施行的位似变换下,$\odot O$ 变成了 $\odot O'$.这就是我们所要证的.

在 S 重合于 O 的特殊情形下,所得的圆与已知圆同心.

证明了位似于圆的图形仍是圆之后,接着便要解决两个已知圆是不是位似图形的问题.

定理 168 任意两个不等的圆可以看做位似图形,并且有两个看法.

证明 假设 $\odot O(r)$ 和 $\odot O'(r')$ 是任意两个不等的圆(图 484).今在 $\odot O$ 中作一半径 OA,而在 $\odot O'$ 中作半径 $O'A'_1$ 使与 OA 同向平行,又作半径 $O'A'_2$ 使与 OA 反向平行.因为 $r \neq r'$,所以直线 AA'_1,AA'_2 都和两圆的连心线 OO' 相交.命交点为 S,S',则 S 是线段 OO' 的外分点,S' 是内分点,且

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{O'A'_1}}{\overline{OA}} = \frac{r'}{r}, \frac{\overline{S'O'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{O'A'_2}}{\overline{OA}} = -\frac{r'}{r}$$

这说明了 S,S' 两点的位置,又因点 A 的选择而变动.

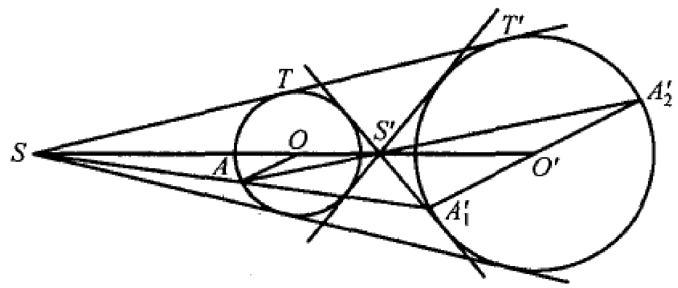


图 484

如果我们以 S 为相似中心,$k = \frac{r'}{r}$ 为相似率施行位似变换于 $\odot O(r)$,那么 O' 是对应于 O 的点,A'_1 是对应于 A 的点.这样一来,同证明定理 167 的过程那样,即知在所施行的位似变换下,$\odot O(r)$ 将被变成 $\odot O'(r')$.

同理,以 S' 为相似中心,$k' = -\frac{r'}{r}$ 为相似率施行位似变换,也可将 $\odot O(r)$ 变成 $\odot O'(r')$.

定理的证明完成了.

对于 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 来说,S 叫做外相似心,S' 叫做内相似心,统称相似中心.

任意两个不等的圆有两个相似中心，这是一般的位似图形所没有的特性.

若两圆相切，则切点显然是两圆的相似中心之一：内切时是外相似心，外切时是内相似心.

当两圆同心的时候，它们的两个相似中心都重合于公共的圆心，即是说，公共圆心具有双重资格，既是两圆的外相似心，又是内相似心.

注 如果两圆相等，外相似心即行消失，但此时却可施行平移使得此圆变为彼圆. 可见用扩充的位似变换概念（§72定理159推论下的注）来看定理168，即便两圆相等仍然一样有效.

在图484中，假定 S 在 $\odot O$ 之外，则过 S 可作 $\odot O$ 的切线；命切点为 T. 于是在以 S 为相似中心，$k=\frac{r'}{r}$ 为相似率的位似变换下，直线 ST 上有唯一的点 T' 属于 $\odot O'$ 而对应于 T. 可见 STT' 应是 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 的外公切线. 同样对于 S' 来说也有类似的情形. 由此一举可得两命题如下：

定理 169 过两圆的相似中心之一，且切于其中一圆的直线，必是两圆的公切线.

定理 170 如果两个不等圆有公切线的话，则两条外公切线相交于两圆的外相似心，两条内公切线相交于内相似心.

注 在两圆相等的特殊情形下，两条外公切线互相平行.

在上面我们已知任意两个不等圆有两个相似中心，那么假如给定三个不等圆，它们两两之间就一共有六个相似中心. 这时和 §72定理160相当的有如下的命题：

定理 171 若三圆各不相等且圆心不共线，则它们两两之间的六个相似中心，分布在四条直线上，每线上有三点.

证明 假设 $\odot O_1,\odot O_2,\odot O_3$ 各不相等且圆心不共线（图485），而 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$，$\odot O_3$ 与 $\odot O_1$，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的外相似心各为 S_1,S_2,S_3，内相似心各为 S'_1,S'_2,S'_3.

当我们把 $\odot O_1,\odot O_2,\odot O_3$ 中每两个都看做是顺位似图形时，那么据 §72的定理160，便知 S_1,S_2,S_3 三点共线.

如果把 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 各看做是逆位似图形，这种 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 便须是顺位似图形，因此 S_1,S'_2,S'_3 三点共线.

再把看法在各圆中调换一下，我们还得到两组相似中心 S'_1,S_2,S'_3 和 S'_1,S'_2,S_3 也各是共线的.

这就是定理的证明.

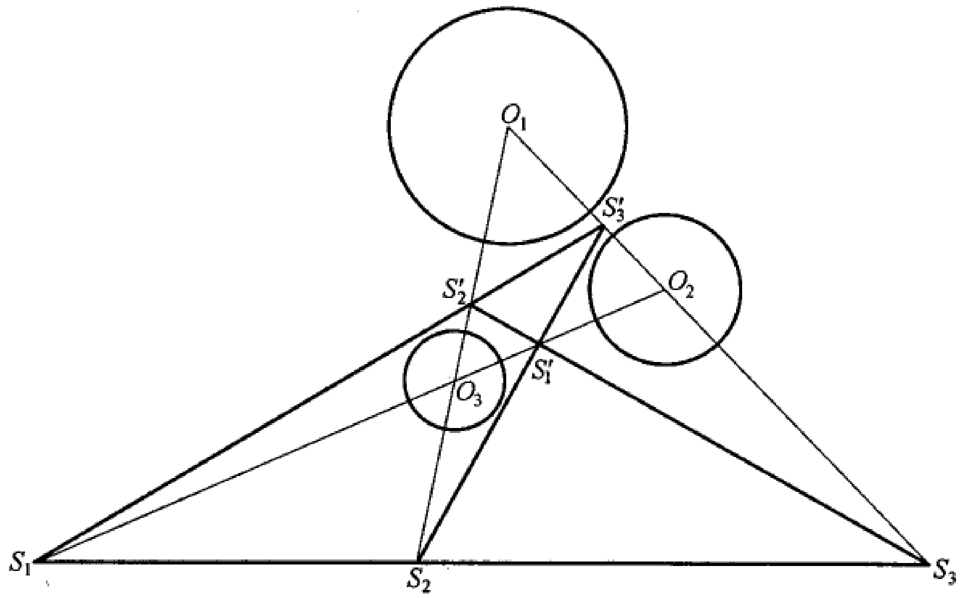


图 485

所得的四条直线,都叫做原来三个圆的相似轴.

注 在所设圆中有两个相等的特殊情形下,有一个外相似心消失,而有两条相似轴平行;如果三个圆都相等,则有一条相似轴消失.

推论 设一圆切于两个不等的已知圆,则两切点的连线必通过两已知圆的相似中心之一.

上面的定理 171,也可以用梅涅劳斯定理(§43 定理 147)来证明.建议读者用塞瓦定理(§46 定理 150)来证明下列四组直线个个共点或互相平行(图 485,各组直线图中未画):

(1) $O_1S'_1, O_2S'_2, O_3S'_3$;

(2) $O_1S'_1, O_2S_2, O_3S_3$;

(3) $O_1S_1, O_2S'_2, O_3S_3$;

(4) $O_1S_1, O_2S_2, O_3S'_3$.

§75 放大尺

根据位似变换的原理,可以制造一种器械来画相似于已知图形的图形,这种器械普通称为放大尺.下面介绍两种放大尺的构造,用法及其原理.

(1) 用螺旋钉把四根直尺在 A, B, C, D 四处互相联结起来(图 486),使联结处可以转动,并使 $ABCD$ 形成一个平行四边形.在 CB 尺上选一点 O,使 B 介于

C,O 之间，而于 O 处装上一针；这针的作用在于能把其固着于图板上的某一点．再于 CD 尺上定一点 E，使得 O,A,E 三点共线．然后在 A 处装上一针，E 处装上一铅笔，这个放大尺便制成了．

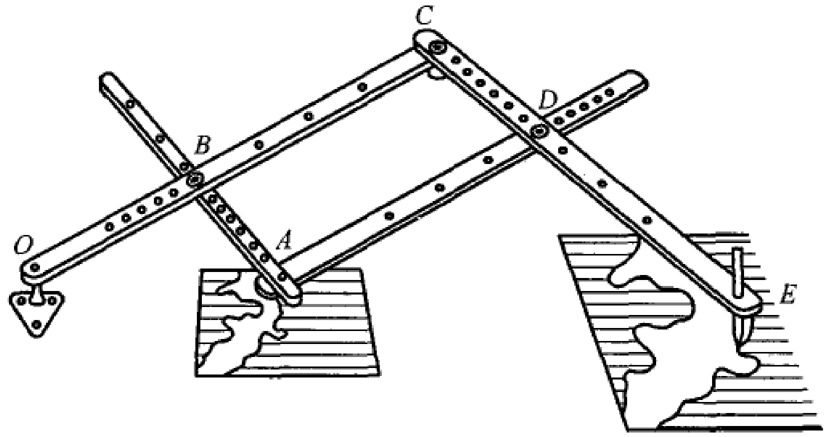


图 486

使用的时候，将点 O 固定，令 A 处的针描画已知图形，那么 E 处的铅笔便会随着绘出相似的图形来．

这是什么缘故呢？假设 $OABCDE$ 是放大尺原来放好的位置（图 487），$OA'B'C'D'E'$ 是转动后的位置．转动时，$ABCD$ 的边长并没有改变，所以 $A'B'C'D'$ 仍是平行四边形．现在的问题是：当一次选定 O,A,E 三点共线后，经过转动是不是永远保持这种关系呢？在原来的位置时，$\triangle OBA$ 与 $\triangle OCE$ 显然是相似的，因此

$$\frac{OB}{BA}=\frac{OC}{CE}$$

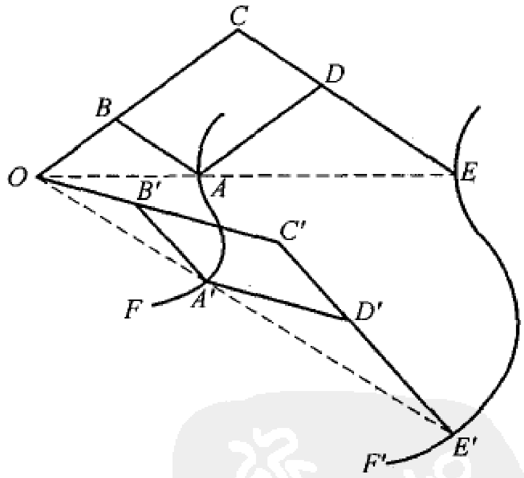


图 487

转动后，这个比例式中的四条线段没有改变长度，故仍有

$$\frac{OB'}{B'A'}=\frac{OC'}{C'E'}$$

但 $\angle OB'A'=\angle OC'E'$，可见 $\triangle OB'A'$ 与 $\triangle OC'E'$ 依然相似．因知

$$\angle B'OA'=\angle C'OE'$$

这便说明了 O,A',E' 三点仍旧保持共线的关系.由此

$$\frac{\overline{OE'}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}=k$$

而 k 明明是一常数.于是根据位似变换的原理(§72),当 A 描画已知图形 F 时,E 自然要随着绘出位似于 F 的图形 F' 来.

如果想使 F' 的大小适合我们的需要,可将 B,D 两处联结点在尺上作适当的调整,使$\frac{OC}{OB}$等于所需要的相似率便得.

上面所绘出的图形 F',可视为把 F 放大到 k 倍的结果.这意思是说,F 上任两点间的距离 a 与 F' 上两对应点间的距离 a',恰好适合 $a'=ka$ 的关系.

放大尺的功用,不但可以放大,还可以缩小.假如把 A,E 两处所装的针和铅笔调换一下位置,而令 E 处的针描画已知图形,那么 A 处的铅笔将绘出缩小的图形,缩小的程度,恰为已知图形的$\frac{1}{k}$.

(2) 取四根金属棒或木棒联结成 ▱$ABCD$(图 488),使联结处仍能活动,并把一个针固定在点 A.在 CD 棒上选一点 P,使它介于 C,D 之间,而于 P 处装上一针.另在 BC 棒上定一点 Q,使 A,P,Q 三点共线,而于 Q 处装上一铅笔.这样也可以装置成一个放大尺.

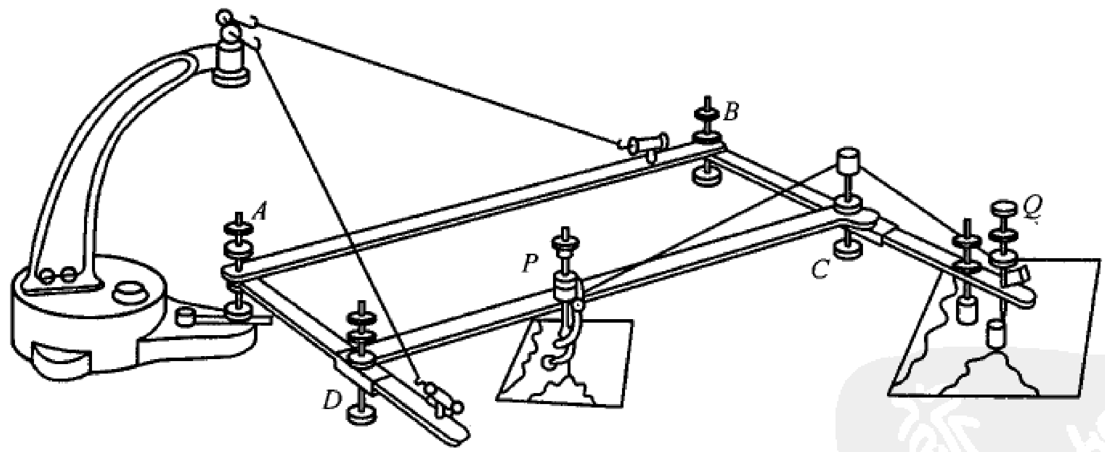


图 488

使用的方法同前一个差不多.首先将 A 固定,然后令 P 处的针描画已知图形,那么 Q 处的铅笔也就随着绘出相似的图形来了.

事实上,只要我们一次选定 A,P,Q 三点共线后,无论经过怎样转动,它们还是保持这种关系的(图 489).因为 $\triangle ADP$ 与 $\triangle QCP$ 相似,所以

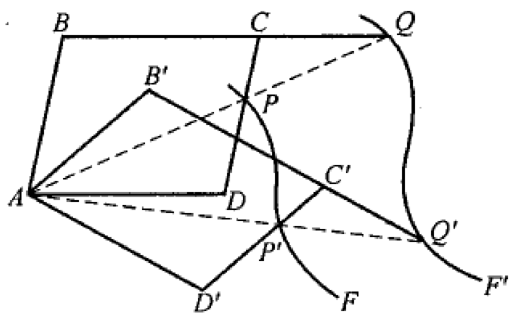


图 489

$$\frac{AD}{DP}=\frac{QC}{CP}$$

但转动后,这个比例式依然成立,而且永有 $\angle ADP=\angle QCP$,从而该两三角形的相似关系仍得保持.由此

$$\angle DPA=\angle CPQ$$

永远真确,于是 A,P,Q 三点永远共线.进一步,我们又知

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=k$$

为一常数,可见这个放大尺的构造是符合位似变换的原理的.

同前一样,我们但把 C,P 两点作适当的调整,便可使得到的新图形合于所需要的大小.

这个放大尺也同时具有放大和缩小的功用.

§76　放大法

根据位似变换的原理,还可以建立一种作图方法来解决某些作图题,这种作图方法叫做放大法.同放大尺的功用相类,放大法也含有缩小之义.

为说明放大法在作图题上的具体应用,我们举下列几个例子.

例题 99　求作一圆,使过一定点且切于两条已知的相交直线.

设定　一点 P,两相交直线 a,b(图 490).

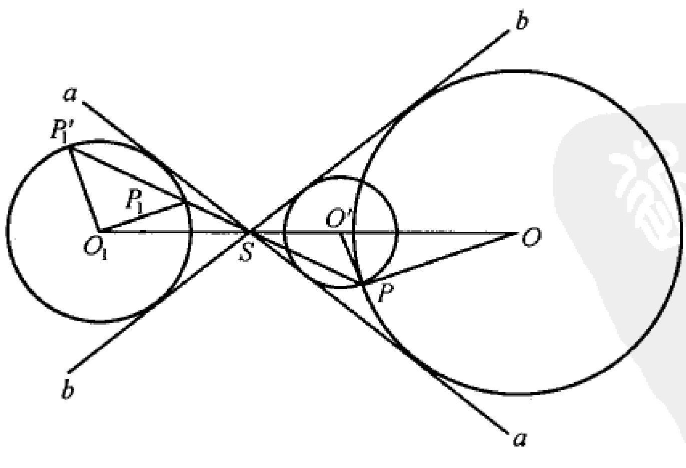


图 490

求作 $\odot O$,使过 P,且切于 a 及 b.

分析 假定 $\odot O$ 已作得.命 a 与 b 的交点为 S,则 SO 应是 a,b 的交角之一的平分线.如果能够确定点 O 的位置,那么问题就得到解决了.以 S 为相似中心施行位似变换,设 $\odot O$ 变为 $\odot O_1$,其中 P_1 是 P 的对应点.因为相似率可以随便选取,所以实际上 O_1 乃是在直线 SO 上任意取定异于 S 的点.取定点 O_1 后,$\odot O_1$ 即可作出,从而 P_1 得由 $\odot O_1$ 与直线 SP 确定(P_1 即 $\odot O_1$ 与直线 SP 的交点).由位似变换的性质(§72(4)),知 $OP \parallel O_1P_1$;但 P 是设定的点,O_1,P_1 是如刚才所说的已确定的点,因此,点 O 得以确定.

作图 两直线 a,b 交成四个角,点 P 将落在其中一角的内部(特殊情形见下面的注),作出这角的平分线.在这射线或其反向延长线上任意取定一点 O_1 为心作一圆使切于 a,b.命 a 与 b 的交点为 S,联结 SP 直线,设与 $\odot O_1$ 的交点之一为 P_1.自 P 引直线平行于 P_1O_1 而交直线 SO_1 于 O,则以 O 为心且通过点 P 的圆就是所求的圆.

证明 据作图,$OP \parallel O_1P_1$,因知 S 是 $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的相似中心(参看 §74 定理 168 的证明).现在 $\odot O_1$ 切于直线 a 和 b(作图),那么 $\odot O$ 必然也切于这两直线(§74 定理 169),故 $\odot O$ 合条件.

注 当点 P 恰好落在 a,b 的交角之一的平分线上时(图 491),上面的作法失效.此时可改用这样方法作图:过 P 作直线垂直于 SP 而交 a,b 于 A,B,得等腰三角形 $\triangle SAB$;作出这三角形的内切圆 $\odot O$ 和对着 S 的旁切圆 $\odot O'$(§65(15)),这两个圆便是所求的.

如果 P 点落在直线 a,b 之一上(图 492),那么作图就更简单:过 P 作所在直线的垂线,设交 a,b 的交角的平分线于 O,O',这两点便是所求圆的中心.

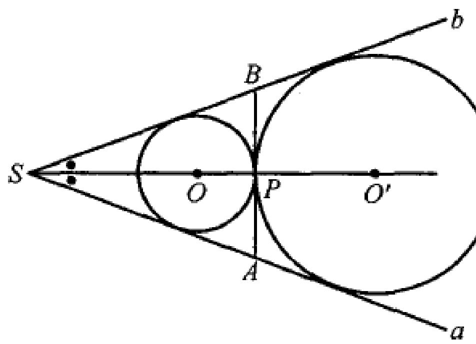


图 491

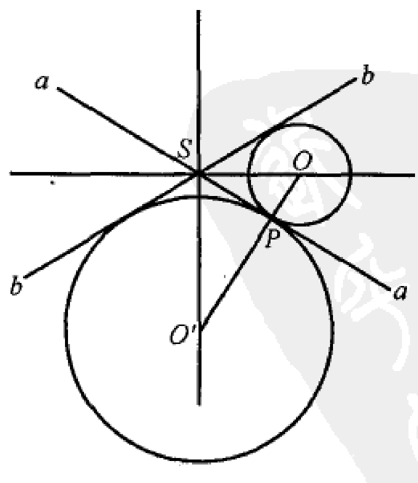


图 492

推究　定点非两已知直线的交点,有两解;否则无解.

例题 100　已知三个高的长,求作三角形.

设定　三线段 h_1, h_2, h_3(图 493).

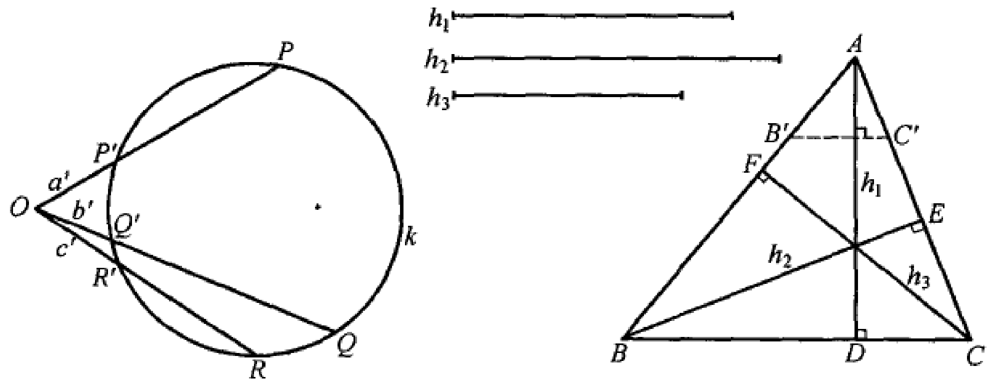


图 493

求作　$\triangle ABC$,使它的高 $AD = h_1$, $BE = h_2$, $CF = h_3$.

分析　设图已成.令 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$,则

$$a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3} \qquad ①$$

由此式,知 $\triangle ABC$ 的形状已确定,故本题适于采用放大法来作图,现在的问题是怎样作出相似于 $\triangle ABC$ 的图形来,亦即如何作出三个线段,使得 a, b, c 成比例.若将 ① 改书如

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 \qquad ②$$

那么不由得想到圆幂定理(§19 定理 127)可以利用一下.作一圆 k,并取一点 O,自 O 到 k 上引三线段 OP, OQ, OR,使

$$OP = h_1, OQ = h_2, OR = h_3$$

设直线 OP, OQ, OR 与 k 再交于 P', Q', R',而令

$$OP' = a', OQ' = b', OR' = c'$$

则

$$a'h_1 = b'h_2 = c'h_3 \qquad ③$$

以 ② 除 ③,得

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

故用 a', b', c' 为边构成的三角形必然和 $\triangle ABC$ 相似.有了这个三角形,就可以用位似变换把它放大或缩小,使它的高恰合于设定的大小.至于相似中心的选择,则以取这三角形的顶点为最简便.

作图 作一适当大的圆 k①，并择一适当点 O②，自 O 到 k 上引三线段

$$OP = h_1, OQ = h_2, OR = h_3$$

设直线 OP, OQ, OR 与 k 再交于 P', Q', R'，令

$$OP' = a', OQ' = b', OR' = c'$$

作 $\triangle AB'C'$，使

$$B'C' = a', C'A = b', AB' = c'$$

引 $AD \perp B'C'$，且令

$$AD = h_1$$

过 D 作直线平行于 $B'C'$ 而交 AB', AC' 于 B, C，则 $\triangle ABC$ 即为所求三角形.

证明 $AD = h_1$ 显然已是 $\triangle ABC$ 的高，若再作其余二高 BE, CF，则有

$$BC \cdot AD = CA \cdot BE = AB \cdot CF$$

因 $\triangle AB'C' \backsim \triangle ABC$，故

$$\frac{a'}{BC} = \frac{b'}{CA} = \frac{c'}{AB}$$

以之乘上式，得

$$a'h_1 = b' \cdot BE = c' \cdot CF$$

但

$$a'h_1 = b'h_2 = c'h_3$$

可知

$$BE = h_2, CF = h_3$$

这证明了 $\triangle ABC$ 合乎条件.

推究 由式①，知本题的可能条件为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} > \dfrac{1}{h_1} \\ \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_1} > \dfrac{1}{h_2} \\ \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} > \dfrac{1}{h_3} \end{cases}$$

或者说，合此条件者有一解；否则无解.

例题 101 自已知三角形的一个顶点求作一直线，把已知三角形分成两个

---

① 要 k 的直径不小于 h_1, h_2, h_3 中最长者与最短者的差.

② 这样的点 O 总是存在的，读者不难把它发现出来.

三角形,使得这两个三角形有相等的内切圆.

设定　$\triangle ABC$(图 494).

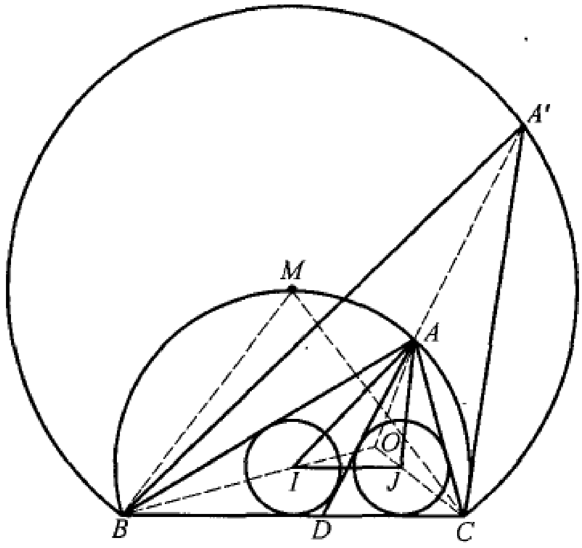


图 494

求作　直线 AD,交 BC 边于 D,使得 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 有相等的内切圆.

分析　假定图已作成.命 $\triangle ABD$,$\triangle ACD$ 的内心为 I,J,则 BI 与 CJ 的交点 O 就是 $\triangle ABC$ 的内心.把 A,I,J 联结成三角形;显然这三角形的角 $\angle IAJ=\frac{1}{2}\angle BAC$,边 IJ 由于 $\odot I$ 和 $\odot J$.相等而平行于 BC.现在的难处是边 IJ 尚未确定.但是如果我们用 O 做相似中心施行位似变换,把 $\triangle AIJ$ 放大成为 $\triangle A'BC$,便可以免去这个困难.因为经过这个变换,问题将转为如何去确定点 A' 的位置,而这问题要容易得多.由 $\angle BA'C=\frac{1}{2}\angle BAC$,知点 A' 落在以 BC 为弦的一个弓形弧上,但它又要落在射线 OA 上,这就完全确定了点 A' 的位置.得了 $\triangle A'BC$ 后,将所行的位似变换还原(即施行"逆变换"),便可求得 $\triangle AIJ$.这时要作 AD 就是容易的事了.

作图　作 $\triangle ABC$ 的内心 O 和外接圆的 $\overparen{BAC}$,以这弧的中点 M(§65(8))为圆心,$MB(=MC)$ 为半径画弧设交射线 OA 于 A'.以 O 为相似中心,作出 $\triangle A'BC$ 的位似图形 $\triangle AIJ$.末作 AB 关于 AI 的对称线 AD(交 BC 于 D),这 AD 便是所求的直线.

证明　据作图,I 应是 $\triangle ABD$ 的内心.因

$$\angle IAJ=\angle BA'C=\frac{1}{2}\angle BMC=\frac{1}{2}\angle BAC$$

故

$$\angle JAD = \angle IAJ - \angle IAD = \frac{1}{2}(\angle BAC - \angle BAD) = \frac{1}{2}\angle DAC$$

由此知 AJ 是 $\angle DAC$ 的平分线，因而 J 是 $\triangle ACD$ 的内心. 已知 $IJ \parallel BC$，可见 I，J 与 BC 的距离相等，这就证明了 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的内切圆是一般大小的.

推究 本题永有一解. 但若不限制自己知三角形的哪个顶点作直线，则共有三解.

例题 102 在 $\triangle ABC$ 的 AB，AC 两边上各求一点 D，E，使 $BD = DE = EC$（图 495）.

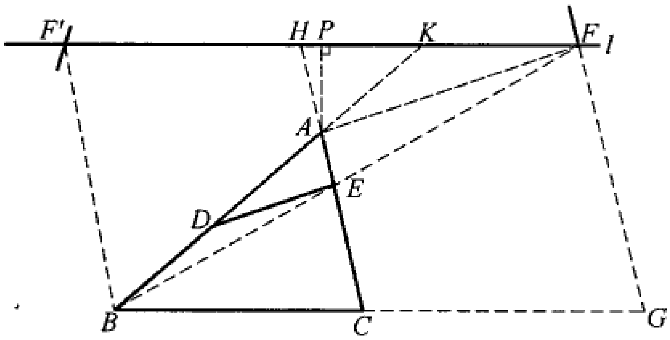


图 495

设定 $\triangle ABC$.

求作 两点 D，E，前者在边 AB 上，后者在边 AC 上，且合于 $BD = DE = EC$.

分析 作这图的难处是 D，E 两点不易同时确定，要克服这个困难，就得设法把其中一点换为定点，然后才能专思其另一点与设定件间的关系. 譬如看点 D 吧，它和点 B 间的线段 BD 是所求图形的一部分，所以最好把 D 换为固定的 A 点，使 BD 变为定长线段 BA. 这便启示我们，也许用位似变换可以解决问题.

现在设图已成. 我们以 B 为相似中心施行位似变换，令点 D 变为点 A，而相应的假定点 E 变为点 F，点 C 变为点 G. 由于

$$BD = DE = EC$$

可见

$$BA = AF = FG$$

即是 AF，FG 均有定长. 如果我们能够确定点 F 的位置，则点 E 可得，因而点 D 亦得，所以现在的问题主要在于如何把点 F 求出来. AF 既有定长，点 F 就得落在以 A 为心而半径等于这个定长的圆上. 又 GF 有定长和定向（平行于 CA），想

见点 F 又须落在平行于 BC 的一条直线上，而这条直线是可以求得的．一个圆和一条直线已经足够确定点 F，于是解决问题的关键被发现了．

作图　在射线 CA 上截一段 $CH = BA$，过 H 引直线 l 使平行于 BC．以 A 为心，AB 为半径画弧，设交 l 于 F．联结 BF，假定交边 AC 于 E；过 E 引 ED 平行于 FA，假定交边 AB 于 D．得到的 D,E 就是所求点．

证明　作 FG 平行于 HC 而交 BC 于 G，则

$$FG = HC = BA$$

于是

$$BA = AF = FG$$

显然，$BDEC$ 与 $BAFG$ 是以 B 为相似中心的位似图形（§72 定理 159），由此可见

$$BD = DE = EC$$

故 D,E 两点合条件．

推究　要推求本题的可能条件，可从两方面去考察：

(1) 有解的必要条件．在 $\triangle ADE$ 中，有

$$AD + AE > DE$$
$$|AD - AE| < DE$$

即

$$(AB - BD) + (AC - EC) > DE$$
$$|(AB - BD) - (AC - EC)| < DE$$

或

$$AB + AC > 3DE$$
$$|AB - AC| < DE$$

由此

$$AB + AC > 3|AB - AC|$$

即

$$\left.\begin{matrix} 2AC > AB \\ 2AB > AC \end{matrix}\right\} \qquad ①$$

这就是有解的必要条件．

(2) 有解的充分条件．现在我们证明上述的 ① 也是有解的充分条件，即是假设 $\triangle ABC$ 合于条件 ①，而证明 D,E 两点存在．下面分三种情形来讨论．

① 假定 A 介于 C,H 之间（图 495）．这时

$$AH < CH = AB$$

于是 A 到 l 的距离 $AP \leqslant AH < AB$ 可见以 A 为心，AB 为半径的圆一定和 l 相交于两点 F,F'，并且这两点要分居于直线 AC 的两侧．今设 F 与 B 分居于 AC 的两

侧,而 F' 与 B 同居于 AC 的一侧.因

$$AH = HC - AC = AB - AC < 2AC - AC = AC$$

故若延长 BA 交 l 于 K,则必 $AK < AB$.由此可以断定点 F 落在 HK 的延长线上,于是 F 应在 $\angle ABC$ 的内部;由此得知 BF 必交边 AC 于 E.又已知 E 介于 B,F 之间,因而 D 必介于 B,A 之间,即是 D 在边 AB 上.这事实告诉我们,利用点 F 可以获得一解.另外,点 F' 显然不合用,因为 BF' 不与边 AC 相交,所以在本情形下,本题有唯一解.

② 假定 H 和 A 重合(图 496).这时 A 在 l 上,故以 A 为心,AB 为半径的圆一定和 l 相交于两点 F,F'.同上理可知,这两点中只有与 B 分居于直线 AC 两侧的点才合用.因此在本情形下,本题也有唯一解.

③ 假定 H 介于 A,C 之间(图 497).这时 A,B 一定分居于 l 的两侧,可见 A 到 l 的距离 $AP < AB$,因此,以 A 为心,AB 为半径的圆一定和 l 相交于两点 F,F',并且这两点分居于直线 AB 的两侧.今设 F 与 C 同居于 AB 的一侧,F' 与 C 分居于 AB 的两侧.因 H 在边 AC 上,故 l 必然交边 AB 于 K.由此得知 F 落在 $\angle ABC$ 的内部,从而 BF 交边 AC 于 E.再因

$$AH = AC - HC = AC - AB < 2AB - AB = AB$$

且
$$AK < AB$$

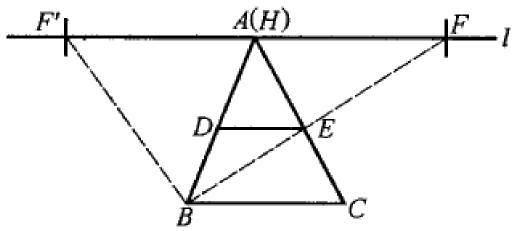


图 496

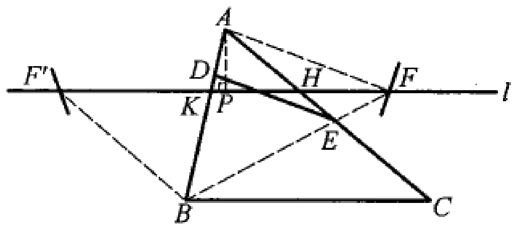


图 497

故知 F 在 KH 的延长线上.这样一来,B,F 便分居于 AC 的两侧,即 E 介于 B,F 之间;于是 D 必在边 AB 上.这就是说,利用点 F 可以获得一解.同上知点 F' 不合用.所以在本情形下,本题仍有唯一解.

综合以上所述,我们得到这样的结论,当

$$\begin{cases} 2AC > AB \\ 2AB > AC \end{cases}$$

时,本题有一解;否则无解.

注 如果把条件放宽为 D,E 两点各在 AB,AC 两直线上,则本题的解数情形如何?建议读者分别绘图详加考证.

习题 28

1. 什么叫做位似图形?什么叫做位似变换?

2. 试解释相似中心、相似率、顺位似图形、逆位似图形、外相似心、内相似心、相似轴等名词的意义.

3. 什么叫做相似图形?为什么说位似图形是相似图形的一种特殊情形?

4. 既不全等也不位似的两个真正相似图形,接连行哪两种变换可以将其一形变为另一形?

5. 非全等的两个镜像相似图形,接连行哪两种变换可以将其一形变为另一形?

6. 已知两不等线段 AB 和 $A'B'$,试问:使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PA'B'$ 真正相似、$\triangle QAB$ 与 $\triangle QA'B'$ 镜像相似的点 P 及点 Q 如何求法?

7. 设 S 是 $\odot O(r)$ 与 $\odot O'(r')$ 的相似中心之一,p 与 p' 分别是 S 对于该两圆的幂.现在看 $\odot O(r)$ 与 $\odot O'(r')$ 是关于 S 的位似图形,自 S 引一直线交两圆于 A,B 与 A',B',令 A 与 A',B 与 B' 是两圆上的对应点,求证:

(1) $\dfrac{p}{p'}=\dfrac{r^2}{r'^2}$;

(2) $\overline{SA}\cdot\overline{SB'}=\overline{SB}\cdot\overline{SA'}=\pm\dfrac{r}{r'}\cdot p'=\pm\dfrac{r'}{r}\cdot p$;

(3) $\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}=(r\mp r')\left(\dfrac{p}{r}\mp\dfrac{p'}{r'}\right)$

(2) 中的 $\pm$ 号,$+$ 号适用于 S 为外相似心的情形,$-$ 号适用于 S 为内相似心的情形;(3) 中的 $\mp$ 号则与(2) 的情形相反.

8. 在上题中,除 A 与 B,A' 与 B' 各相重合的情形外,求证:可作一圆分别与 $\odot O(r)$,$\odot O'(r')$ 相切于 A,B' 或者相切于 B,A'.

9. 自两圆的等幂轴上一点向两圆各引一条切线,求证:两切点的连线必通过两圆的相似中心之一.

10. 试述两种放大尺的构造及其原理.

11. 已知两直线 a,b 及线外一点 P,求过 P 作直线 l 交 a,b 于 A,B,使 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{m}{n}$,其中 m,n 是给定的两线段.

12. 已知共点的三直线 a,b,c 及线外一点 P,试过 P 作直线 l 交 a,b,c 于 A,B,C,使 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{m}{n}$,其中 m,n 是给定的两线段.

13. 过圆内一已知点 P 作弦 AB，使 $AP=\frac{1}{2}BP$.

14. 过圆外一已知点 P 作割线交圆于 A,B，使 $\frac{PA}{AB}=\frac{m}{n}$，$m,n$ 是给定的两线段.

15. 已知共点的三直线 a,b,c，试以 a 上一点为心作圆，使与 b 相切而在 c 上截下定长的弦.

16. 已知两直线 a,b 及线外一点 P，在 a 上求一点 A，使与 b 及 P 等距.

17. 已知相交的两直线 a,b 及线外一点 P，求作定向直线 l 交 a,b 于 A,B，使 $\angle APB$ 等于定角 φ.

18. 已知三直线 a,b,c 及 a 上一点 A，在 b,c 上各求一点 B,C，使直径为 BC 的圆切 a 于 A.（提示：作 B 关于 A 的对称点，然后应用上题.）

19. 在定圆中作一弦，使被两条定半径三等分.

20. 已知一梯形，求作平行于底边的直线，使被两腰及两对角线（所在直线）截下三个相等的线段.

21. 求作一三角形，使三边分别平行于一已知三角形的三边，并使三顶点分别落在另一已知三角形三边所在的直线上.

22. 已知一边，这边的一邻角，这角的对边与其中线的交角，求作三角形.

23. 已知一角及两夹边的中线，求作三角形.

24. 已知一边与其中线的交角及其他两中线的长，求作三角形.

25. 已知一双底角及两对角线，求作梯形.（提示：应用习题 4 第 9 题.）

26. 已知底与高的和及顶角的大小，求作等腰三角形.

27. 在等腰三角形 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中垂线上求一点 O，使合于 $OA=OB+OC$.

28. 已知交于 O 的两直线 a,b 及线外一点 P，求过 P 但不过 O 作直线 l 交 a,b 于 A,B，使 $OA+OB=2AB$.（提示：作 $\angle AOB$ 的平分线.）

29. 在给定的半圆形中，求作已知周长的内接矩形.（所谓半圆形的内接矩形，是说后者有一边落在前者的直径上，其他两顶点落在弧上.）

30. 已知三角形两底角均非钝角，求作周长一定的矩形，使它有一边落在已知三角形的底边上，其他两顶点分别落在两腰上.

31. 在 $\triangle ABC$ 内，求作一平行于 BC 而两端分别着于 AB,AC 两边的线段 EF，并使适合下列条件之一：

(1) $EF^2=AE\cdot BE$;

(2) $EF^2 = BE \cdot CF$;

(3) $EF^2 = BE^2 + CF^2$.

第五节　反演变换与反演法

§ 77　反演变换

假设 O 是定点(图 498),A, A' 是满足下列条件的点:

(1) O, A, A' 三点共线;

(2) $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k \neq 0$, k 是常数.

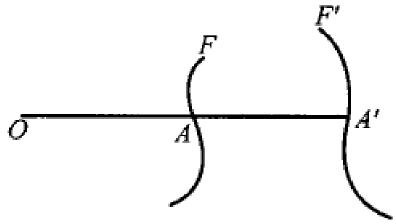


图 498

那么我们说 A 与 A' 互为反演点.在这样的对应关系下,定点 O 称为反演中心,常数 k 称为反演幂.

如果把点 A 看做是平面上的已知点,A' 是按着上述的对应关系由 A 变换而来的点,我们便叫这个变换做反演变换,或简称反演.在反演变换下,当点 A 异于反演中心时,一定有反演点 A' 对应于 A(也许 A' 就是 A),唯独反演中心没有反演点和它对应.所以反演变换中的点和点的对应,并不是一对一的.但是可以这样说,在去掉反演中心的平面上,反演变换是一一对应的.

在某个反演变换中,若图形 F 被变换为图形 F'(当然也可看做 F' 被变换为 F),则我们说 F 和 F' 互为反像(图 498).如上所述,当反演中心均不属于 F 和 F' 时,F 和 F' 的点与点之间是一一对应的;但当反演中心属于 F 和 F' 之一或兼属于二者时,这两个图形的点与点之间在反演变换的对应下便不是一对一的了.以后我们说到互为反像的两个图形时,对于这两种情形不再加以区别.

因此,我们有下面的定理:

定理 172　通过反演中心的直线虽经反演而不变,或者说,这样的直线是反演变换的二重线.

反演变换分两种:反演幂 $k > 0$ 的,叫做双曲反演变换;$k < 0$ 的,叫做椭性反演变换.在前者的情形下,k 可表为

$$k = r^2$$

这 r 叫做反演半径.由此可见以反演中心 O 为心,r 为半径所作的圆上的所有点都是二重点(图 499).这个圆在双曲反演变换中占着很重要的地位,我们特地把

它叫做反演基圆.由于存在这个圆,所以双曲反演变换往往也叫做关于某圆(反演基圆)的反演.在椭性反演变换中,显然没有二重点.

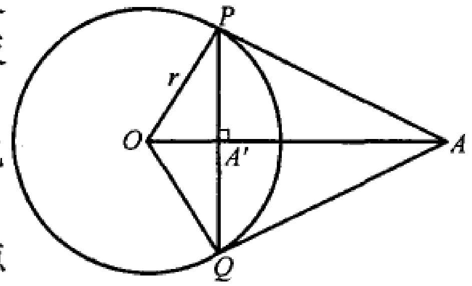


图 499

在反演变换里首先碰到的问题是如何求已知点的反演点.这问题常表现于下述两方面:

第一,给出反演基圆 $\odot O(r)$,要求已知点 A 的反演点 A'(图 499).

这问题视点 A 的位置不同而求法亦不同:①若 A 在 $\odot O(r)$ 上,则 A' 就是 A 自己.②若 A 在 $\odot O(r)$ 外,可自 A 向反演基圆引切线 AP 和 AQ,联结切点 P,Q 的直线便交 OA 于所求的点 A'.这是因为在 Rt$\triangle POA$,PA' 显然是斜边 OA 的高,所以 $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=r^2$(§18 定理 123(2)).③若 A 在 $\odot O(r)$ 内,则可反②之道以求之.事实上,过 A 且垂直于 OA 作 $\odot O(r)$ 的弦 PQ,在这弦的两端引反演基圆的切线,这两切线的交点就是 A 的反演点.

第二,给定反演中心 O 和一对对应点 A,A'(当然这三点必须共线),要求已知点 B 的反演点 B'(图 500).

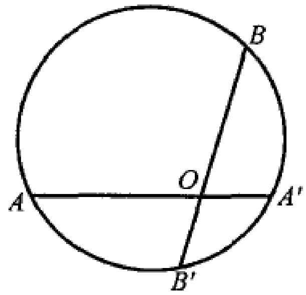


图 500

当 A,A',B 三点不共线时,通过这三点可以作一圆,这圆与直线 OB 的第二交点 B'(也许会和 B 重合)便是所要求的点.万一 A,A',B 三点共线,则可按比例第四项作图定出 OB' 的长度.

由这问题,引得一命题如下:

定理 173 在反演变换中,不共线的任意两对反演点必然共圆.

如果这定理中的反演变换是双曲的,那么所得的圆和反演基圆有重要的关系.设所得的圆为 $\odot S$,自 O 引直线切 $\odot S$ 于 P(图 501),则

$$\overline{OP}^2=\overline{OA}\,\overline{OA'}=r^2$$

因而 $$OP=r$$

可见点 P 落在反演基圆 $\odot O(r)$ 的上面.这样一来,由于 $\angle OPS=90°$,我们即知 $\odot S$ 正交于 $\odot O(r)$.因为 A,A' 及 B,B' 是随意的两对反演点,所以无妨略去其中一对而把这件事实叙成下面的

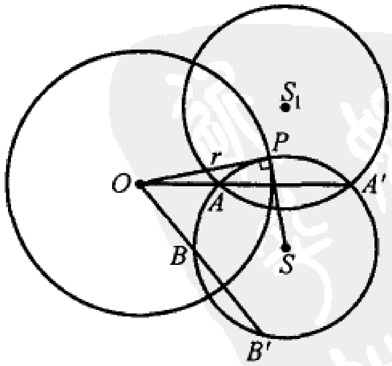


图 501

命题：

定理 174　在双曲反演变换中，凡通过任一双反演点的圆①都和反演基圆正交.

倒过来看，假定 ⊙S 正交 ⊙$O(r)$ 于 P(图 501)，则自 O 任引一直线交 ⊙S 于 A，A'，总有

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OP}^2=r^2$$

这就是说，⊙S 上的任何点 A，经过反演后仍然变为 ⊙S 上的点 A'. 因此我们又得：

定理 175　凡和反演基圆正交的圆，虽经反演而不变.

由这定理，很易导出：

定理 176　同时正交于反演基圆的两圆，如果它们相交的话，那么两交点必互为反演点.

假设 ⊙S，⊙S_1 都和 ⊙$O(r)$ 正交(图 501)，A，A' 是 ⊙S 与 ⊙S_1 的交点. 根据定理 175，在以 ⊙$O(r)$ 为反演基圆的反演变换下，A 要变为 ⊙S 的点，也要变为 ⊙S_1 的点. 所以 A 的反演点不是 A 自己就是 A'. 但当 A 不在 ⊙$O(r)$ 上时，A 不能变为自己；而当 A 在 ⊙$O(r)$ 上时，A 和 A' 必然合而为一. 这说明了 A 和 A' 互为反演点无疑.

§78　保角性

假设曲线 u 和 v 交于点 A(图 502)，AX 是切 u 于 A 的切线，AY 是切 v 于 A 的切线，则 AX 与 AY 做成的角叫做 u 与 v 在 A 点的交角. 若 u，v 本身就是直线，AX，AY 便分别与 u，v 重合，可见曲线的交角与直线的交角在意义上是统一的.

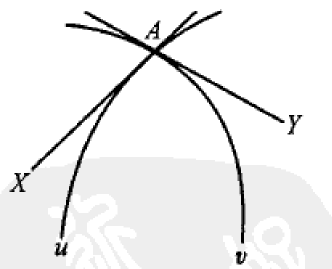


图 502

曲线的交角在反演变换里有一个极其重要的性质：

定理 177　在反演变换之下，两条曲线 u，v 在某交点 A 的交角，等于反像 u'，v' 在 A 的反演点 A' 的交角.

设 AX，AY 分别是 u，v 在点 A 的切线，$A'X'$，$A'Y'$ 分别是 u'，v' 在点 A' 的切

① 如该双反演点一旦重合为一点 P，则这圆应视为是切 OP 于点 P 的. 这时定理很显然.

线(图 503).过反演中心 O 任作一直线交 u,v 于 U,V,而设 U',V' 分别是 U,V 的反演点,则 U',V' 分别在 u',v' 上.联结 $AU,AV,A'U',A'V'$,因 A,A',U,U' 四点及 A,A',V,V' 四点分别共圆(§77 定理 173),故知

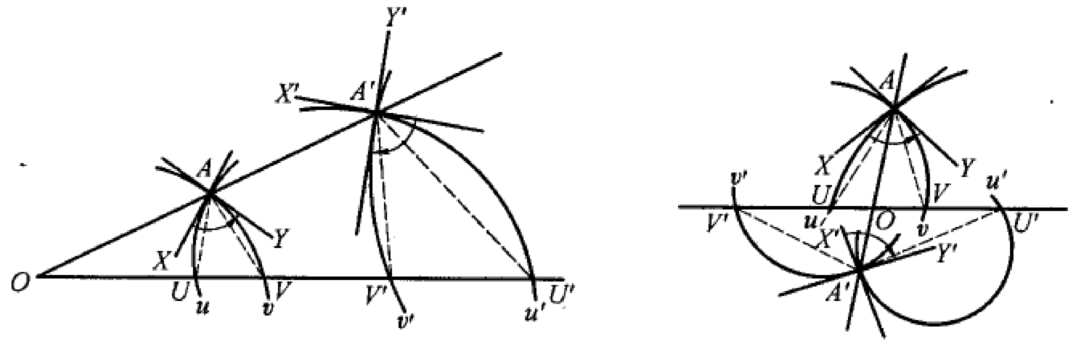


图 503

$$\angle OAU = \angle A'U'O \qquad ①$$

$$\angle OAV = \angle A'V'O \qquad ②$$

当 U 趋近于 A 时,U' 随着趋近于 A',此时

$$\lim_{U\to A}\angle OAU = \angle OAX,\ \lim_{U\to A'}\angle A'U'O = \angle X'A'O$$

因而由 ① 晓得

$$\angle OAX = \angle X'A'O \qquad ③$$

同理由 ② 可以推得

$$\angle OAY = \angle Y'A'O \qquad ④$$

由 ③ 和 ④,得

$$|\angle OAX \pm \angle OAY| = |\angle X'A'O \pm \angle Y'A'O|$$

所以

$$\angle XAY = \angle X'A'Y'$$

如果把角看成是有"方向"的("逆时针"或"顺时针"),我们从图 503 就看出 $\angle XAY$ 与 $\angle X'A'Y'$ 方向相反.因此,上定理也可以叙述为:两条曲线的交角,经过反演后,仍然保持原来的大小,但改变了方向.

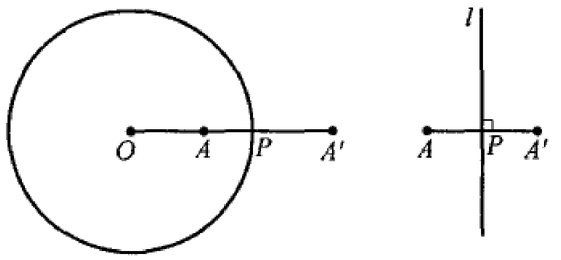
反演变换的这个重要的不变性,叫做**保角性**.这个特性使得反演变换成为几何证题和作图中的利器.

§79　变态的反演变换

为了使反演变换在应用上不受到阻碍,我们现在要把反演变换的概念加以

扩充.

假设 A, A' 关于反演基圆 $\odot O(r)$ 互为反演点(图 504(a)),P 是线段 AA' 与 $\odot O(r)$ 的交点,则因



(a)　　　　(b)

图 504

$$r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = (\overline{OP} + \overline{PA})(\overline{OP} + \overline{PA'}) = (r + \overline{PA})(r + \overline{PA'}) = r^2 + (\overline{PA} + \overline{PA'})r + \overline{PA} \cdot \overline{PA'}$$

而得

$$\overline{PA'} = -\frac{\overline{PA}}{1 + \frac{\overline{PA}}{r}} \qquad ①$$

今固定 A, P 两点,而令 r 渐趋于无限大,于是 $\odot O(r)$ 便趋近于垂直 AA' 于 P 的一直线 l(图 504(b)).此时

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\overline{PA}}{r} = 0$$

从而由 ① 知

$$\lim_{r \to \infty} \overline{PA'} = -\overline{PA} \qquad ②$$

式 ② 表明,当反演基圆变态成直线时,反演变换(双曲的)就要变态成反射.因此,反射实际可以看成是双曲反演变换的极限状态,而称它为变态的反演变换,并把它归入反演变换的概念之内.

这个变态的反演变换(反射)没有反演中心和反演幂,而用直线(反射轴)来代替反演基圆,除此而外,关于双曲反演变换的许多性质仍旧保存.例如,§77 的定理 173 ~ 176 和 §78 的定理 177,在反射中依然成立.

§80　直线和圆的反像

上面获得了一些关于反演变换的性质,现在我们再来作进一步的探求.直

线和圆是初等平面几何的主要研究对象，因此以下要专从这方面来作研究.

我们首先证明下一命题：

定理 178 不通过反演中心的任一直线，它的反像是通过反演中心的一圆.

证明 假设 O 是反演中心(图 505)，l 是不通过点 O 的已知直线.引 $OA \perp l$ 于 A，命 A 的反演点为 A'，那么

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$$

k 是反演幂.因此，A' 是定点.今以 P 表 l 上异于 A 的任意点，P' 表 P 的反演点，则 A, A', P, P' 四点必然共圆.由此

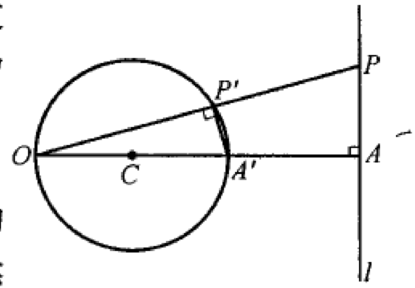


图 505

$$\angle OP'A' = \angle OAP = 90°$$

故点 P' 落在直径为 OA' 的圆 $\odot C$ 之上.

反过来看，在 $\odot C$ 上取异于 O 和 A' 的任一点 P'，联结直线 OP'，这线必交 l 于 P.由于 $\angle OP'A'$ 与 $\angle OAP$ 都等于直角，可见 A, A', P, P' 四点共圆，从而有

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$$

这就是说，$\odot C$ 上异于 O 的每一点都是直线 l 上的点的反演点.

这样便证明了 $\odot C$ 是直线 l 的反像.

推论 不通过反演中心的两条平行线，它们的反像是在反演中心相切的两圆.

在上面的证明过程中，实际上已经连带地证明了定理 178 的逆命题：

定理 179 通过反演中心的任一圆，它的反像是不通过反演中心的一条直线.

但是不通过反演中心的圆的反像是什么图形呢？下一定理将回答这个问题.

定理 180 不通过反演中心的任一圆，反演之后仍是一个不通过反演中心的圆.

证明 假设 O 是反演中心(图 506)，k 是反演幂，$\odot C$ 是不通过点 O 的已知圆.在 $\odot C$ 上任取一点 P，并以 P' 表 P 的反演点.设直线 OP 与 $\odot C$ 的第二交点为 Q(当然 Q 可以重合于 P)，则

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = p$$

这 p 是 O 对于 $\odot C$ 的幂，故为定值.由此知

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{OP'}}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} = \frac{k}{p} \qquad ①$$

是一常数.① 的关系表明 Q 与 P' 所描绘的图形是位似的(§72)，但前者已知是

$\odot C$,因此后者也应该是一个圆 $\odot C'$(§74定理167).由于 P 与 Q 的对应是一对一的,可见 $\odot C'$ 是 $\odot C$ 的反像无疑.

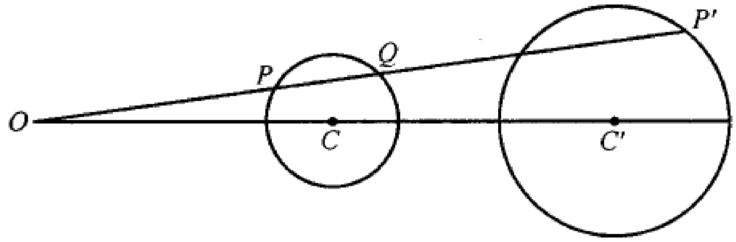


图 506

推论 1　反演中心是互为反像的两圆的相似中心之一.

推论 2　以反演中心为心的任一圆,它的反像是一个同心圆.

注　必须万分注意,除反射外,一般反演变换并不把圆的中心变为该圆的反像的中心.

回忆反演变换的保角性(§78),我们立得两个很有用的命题如下:

定理 181　相切两圆的反像仍然相切,但当切点恰是反演中心时所得反像是两平行线.

相切的两圆,若有一个变态为直线,定理仍然有效.

定理 182　正交两圆的反像仍然正交.

正交的两圆,若有变态为直线的,定理仍然有效①.

下面我们要在已有知识的基础上,来讨论反演变换中的又一个重要的性质.

定理 183　设两点关于反演变换 Γ_1 互为反演点,则这两点关于另一反演变换 Γ_2 的反演点必然关于某一确定的反演变换 Γ_3 互为反演点.

证明　假设 A_1, A'_1 关于 Γ_1 互为反演点,P 是 Γ_2 的反演中心(图 507).取 P 关于 Γ_1 的反演点 S_1,则 S_1 是定点,这时 P, S_1, A_1, A'_1 四点或共线或共圆.不在这线或圆上取定一点 M_1,命 M_1 关于 Γ_1 的反演点为 M'_1,那么 P, S_1, M_1, M'_1 四点及 A_1, A'_1, M_1, M'_1 四点分别共圆.

将反演变换 Γ_2 施于以上图形,则 $\odot S_1A_1A'_1$(或直线 $S_1A_1A'_1$)和 $\odot S_1M_1M'_1$ 变成直线 SAA' 和直线 SMM'(§77 定理 172,§80 定理 179),$\odot A_1A'_1M_1M'_1$ 变成 $\odot AA'MM'$(定理 180).由此得

$$\overline{SA}\cdot\overline{SA'}=\overline{SM}\cdot\overline{SM'}$$

---

① 若一直线和一圆的交角等于直角(此时直线必通过圆心),则称二者正交.互相垂直的两直线也叫做是正交的.

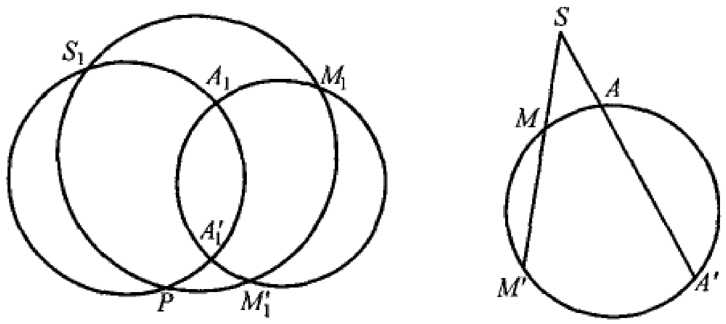


图 507

因为 S,M,M' 都是确定的点，所以上式的右端应是某一常数 k，即

$$\overline{SA}\cdot\overline{SA'}=k \qquad ①$$

如果把以 S 为反演中心，k 为反演幂的反演变换叫做 Γ_3，那么式 ① 就表明了 A,A' 关于 Γ_3 互为反演点.

万一 S_1 重合于 P，则点 S 不存在，而上述证明失效. 但这并不影响定理的真实性. 因为此时 Γ_1 必然是双曲反演变换或反射，从而 Γ_3 不过变态为反射罢了. 这情形从下边事理的探讨中自可了然：

如果 Γ_1 是双曲反演变换或反射，那么 Γ_3 一定是双曲反演变换或反射，而且 Γ_1 的反演基圆或反射轴 c_1 和 Γ_3 的反演基圆或反射轴 c_3 关于 Γ_2 互为反像.

事实上，过 A_1,A'_1 两点但不过 Γ_2 的反演中心 P 任作两圆 u_1,v_1（图 508），已知所作两圆都和 c_1 正交（§77 定理 174）. 关于反演变换 Γ_2，命 c_1,u_1,v_1 的反像分别为 c_3,u,v（图 509），则 u,v 都和 c_3 正交（定理 182）. 因此，A,A' 关于 c_3 互为反演点（§77 定理 176）. 当点 P 不在 c_1 上时，c_3 是一个确定的圆；当点 P 在 c_1 上时，c_3 是一条确定的直线. 由此可见，Γ_3 实际就是以 c_3 为反演基圆的双曲反演变换，或者就是以 c_3 为反射轴的反射.

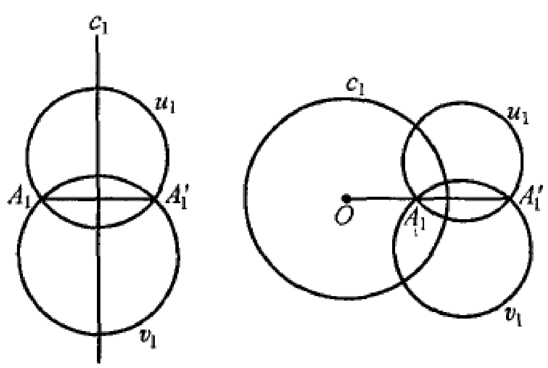


图 508

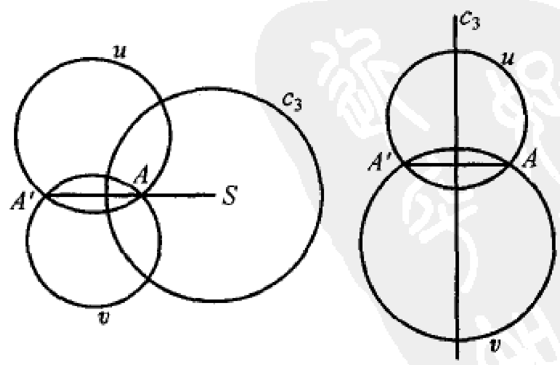


图 509

上面的定理我们常常把它说成这样简单的句子：图形的“反演性”虽再经反演而仍旧保持.

这个反演变换里的不变性，给证题和作图带来莫大的益处. 例如，已知两个不等圆，我们总可以至少找得一个双曲反演变换 Γ_1，使两个已知圆恰好互为反像. 这个 Γ_1 的反演中心就是两个已知圆的相似中心之一(定理 180 推论 1)，而反演幂在按两个已知圆的相互位置的实际情况适当地选择反演中心后即可求得①. Γ_1 确定后，以它的反演基圆上任一点为反演中心施行反演变换 Γ_2，Γ_1 就要变成反射 Γ_3，于是两个不等的已知圆便化为相等的圆了. 经验证明，研究相等的圆要比研究不等的圆简易一些. 此外，当然还有别的好处.

§ 81 反演器

在选定的反演变换之下，我们已经知道怎样求已知点的反演点(§77)，但是要作一个已知图形的反像，除直线和圆可用直尺及圆规完成外，一般需借助于一种叫做反演器的器械来画出. 常见的反演器有下列两种：

(1) 波塞里亚反演器. 用四根等长的棒连接成一个菱形 $ABCD$(图 510)，并于 B 和 D 处接上两根等长的棒 OB 和 OD，使各联结的地方均可自由转动. 这样便制成一个反演器了. 此器系波塞里亚(Peaucellier)于 1864 年所首创，所以普通叫它做波塞里亚反演器.

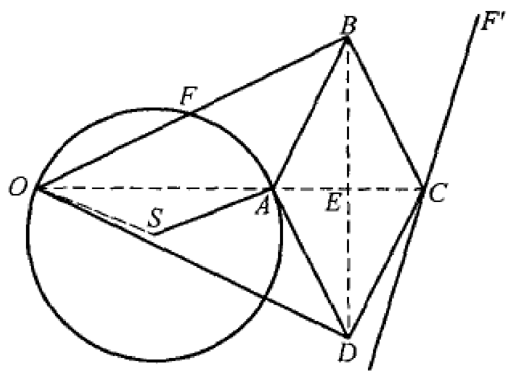


图 510

由于 $ABCD$ 是菱形，且 $OB = OD$，可见这个器械无论如何转动，O, A, C 三点永远共线. 设 AC 与 BD 的交点为 E，则

$$\overline{OA}\cdot\overline{OC} = (\overline{OE}+\overline{EA})(\overline{OE}+\overline{EC}) =$$
$$(\overline{OE}-\overline{AE})(\overline{OE}+\overline{AE}) = \overline{OE}^2-\overline{AE}^2 = \overline{OB}^2-\overline{AB}^2$$

但当转动时，各棒的长度没有变化，所以上式的末端应是一个常数. 基于这点道理，我们便可在 O 处装上一针，使能固着于图板上的某一点，再于 A 处装上一针，C 处装上一铅笔，而令 A 描画已知图形 F，C 自然要绘出 F 的反像 F' 来.

① 两圆外离或外切时，反演中心应选外相似心；两圆相交时，反演中心选外相似心或内相似心均可；两圆内切或内含时，反演中心应选内相似心.

为着使这个反演器绘出的反像适合我们指定的反演幂，我们但把 OB 和 OD 两根棒装置成在 O 处可以分开，然后调整点 O 的位置使 OB 达到适当的长度就得了.

在这个器械上，如果再添一根棒 AS，使 AS 转到合于

$$SO = SA$$

的位置时便把点 S 固定（当然点 O 也固定），那么点 A 这时只能沿着过点 O 的一个圆描画，于是点 C 必然绘出垂直于 OS 的一条线段（§80 定理 179）.

(2) 哈特反演器. 用两对等长的棒联结成一个逆平行四边形 $ABCD$（图 511），使各连接处可以自由转动. 在 AD，AB 上各取一点 O，P 并分别装上一针，在 CD 上取一点 Q 并装上铅笔，但是取这三点时要使它们同在平行于 AC 的一直线上. 这样装置也成功一个反演器，叫做哈特（Hart）反演器.

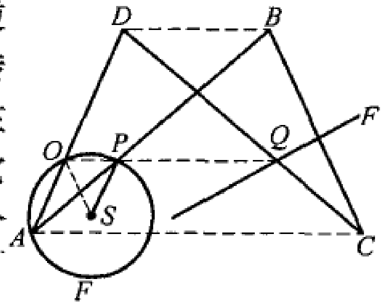


图 511

当这个反演器转动时，它将保持（§16 定理 108）

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QD}} = \frac{m}{n}$$

所以 O，P，Q 三点永远共线. 由此

$$\overline{OP} = \frac{m}{m+n} \cdot \overline{DB}, \overline{OQ} = \frac{n}{m+n} \cdot \overline{AC}$$

据托勒密定理（§49 例题 54），知

$$\overline{DB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$$

那么
$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \frac{mn}{(m+n)^2}(\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2)$$

此式的右端显然是一个常数. 因此，若固定点 O，而令点 P 描画已知图形 F，则点 Q 所绘出的图形 F' 即是 F 的反像.

同前一样，可添上一根棒 PS，旋转 PS 至合于

$$SO = SP$$

时即固定点 S（当然也固定点 O），这样点 Q 就将绘出一条垂直于 OS 的线段来.

我们平常用直尺画直线，是先假定直尺具有这种功能而后用它. 在反演器尚未发明之前，人们几乎认为不借直尺画直线实为不可能，但自反演器创制之后，这种不可能的观念便随着被打破了. 不借直尺而能画出直线，当初确是件颇足令人惊异的事情，而现在我们知道了它的道理却是这么简单，不过是反演变换的一种应用而已.

可是反演器因受棒的长短的限制，画直线时实际上只能画出很有限的一段，而常常不能随意地画出所需的直线．所以在理论上对于不用直尺画直线的问题虽然得到解决，但是在实践上我们仍然认为用直尺画直线是最简单而易行的办法．

§82　极点和极线

"极点"和"极线"原是射影几何学上的概念，现在我们只概略地讨论它们的一些初步性质．

假设 A，A' 关于 $\odot O$ 互为反演点（图 512），a 是过 A' 且垂直于 OA 的直线，则关于 $\odot O$ 而言，我们称 A 为 a 的极点，a 为 A 的极线．由此可见：除圆心 O 外，每点都有它的确定的极线；除过圆心 O 的直线外，每直线都有它的确定的极点．特别地，$\odot O$ 上的点的极线即是过此点的切线，而切点亦即此切线的极点．若点 A 位于 $\odot O$ 的外部，则按关于反演点 A' 的作图法（§77），知自 A 向 $\odot O$ 作切线所得两切点的连线就是点 A 的极线 a．由此即得

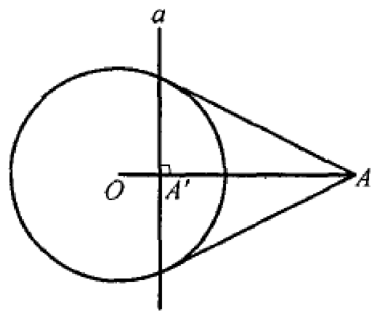


图 512

定理 184　自圆外一已知点向圆引切线，则连两切点的直线必是该已知点的极线；逆之，若一已知点的极线与圆相交，则交点与已知点的连线必是圆的切线．

下一命题描述了极点和极线的极其重要的特性．

定理 185　关于 $\odot O$（图 513），如果点 A 在点 B 的极线 b 上，那么点 B 也在点 A 的极线 a 上．

证明　若 A，B 关于 $\odot O$ 互为反演点，这定理是显然的．

今设 A，B 非互为反演点，而命 A，B 的反演点分别为 A'，B'．在题设的条件下，O，A，B 三点不能共线，于是 A，A'，B，B' 四点必共圆．因 b 通过 B' 和 A，故

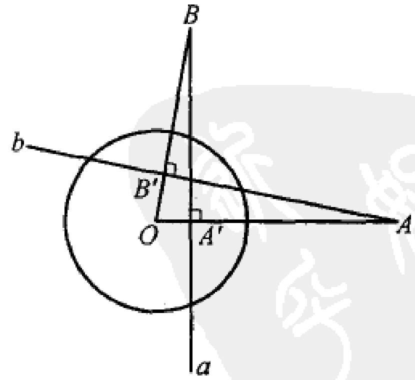


图 513

$$\angle AA'B = \angle AB'B = 90°$$

由此可见，$A'B$ 实即 A 的极线. 这就是说，B 在 a 上.

推论 1　通过定点 A 的直线，如果它们有极点的话，那么这些极点都落在 A 的极线 a 上.

推论 2　不通过圆心的直线 a 上所有点的极线交于 a 的极点 A.

把上定理推进一步，又得下面的命题，称为萨蒙(Salmon)定理：

定理 186　圆心 O 至 A，B 两点的距离，与 A 至 B 的极线 b 及 B 至 A 的极线 a 的距离成比例.

证明　命 A，B 关于 $\odot O$ 的反演点为 A'，B'（图 514），并作 $AP \perp b$ 于 P，$BQ \perp a$ 于 Q，$AM \perp OB$ 于 M，$BN \perp OA$ 于 N.

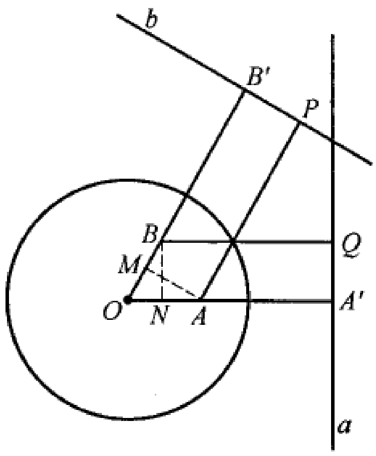


图 514

当 OA 与 OB 垂直或合为一直线时，定理是显然的.

现在假定 OA 与 OB 不垂直，也不合为一直线. 此时因 A，A'，B，B' 四点及 A，B，M，N 四点各共圆，得知

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}$$
$$\overline{OA}\cdot\overline{ON}=\overline{OB}\cdot\overline{OM}$$

由此

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}=\frac{\overline{OB'}-\overline{OM}}{\overline{OA'}-\overline{ON}}=\frac{\overline{MB'}}{\overline{NA'}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}}$$

这便是我们所要证的.

下面我们再证两个命题：

定理 187　设 A 关于 $\odot O$ 的极线为 a（图 515），过 A 作割线交 $\odot O$ 于 C，D，交直线 a 于 B，则 A，B 调和分隔 C，D.

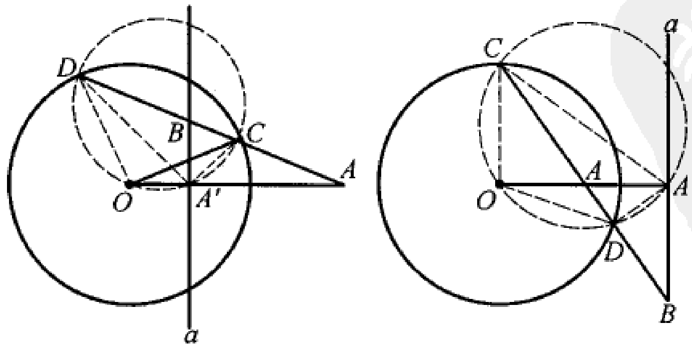


图 515

证明　设 A' 是 A 的反演点，则

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=r^2$$

其中 r 是 $\odot O$ 的半径．因此

$$\overline{AO}\cdot\overline{AA'}=\overline{AO}(\overline{AO}+\overline{OA'})=\overline{AO}^2-\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=$$
$$\overline{AO}^2-r^2=\overline{AC}\cdot\overline{AD}$$

从而 O,A',C,D 四点共圆．因为 $OC=OD$ 且 $A'B\perp A'A$，可见 $A'A,A'B$ 分别是 $\angle OA'D$ 及其邻补角的平分线．那么据 §16 定理 112 和 113，即得

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=-\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

所以 A,B 调和分隔 C,D．

推论　过一点 A 作割线交 $\odot O$ 于 C,D，在这割线上取一点 B，若 A,B 调和分隔 C,D，则 B 必在 A 的极线 a 上．

定理 188　过一点 A 任作两割线交 $\odot O$ 于 P,Q 及 R,S(图 516)，联结 PR 与 QS，PS 与 QR 设分别交于 B,C，则 BC 必是 A 关于 $\odot O$ 的极线．

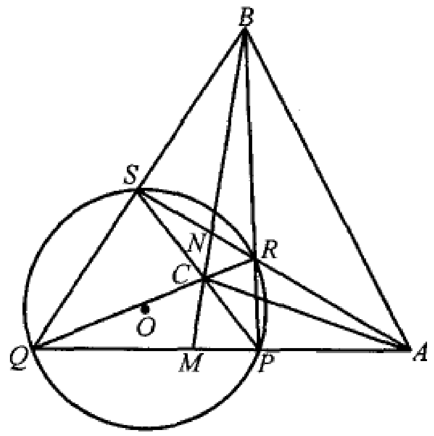


图 516

证明　命直线 BC 与 PQ,RS 的交点分别为 M,N，则应用梅涅劳斯定理(§43 定理 147)及塞瓦定理(§46 定理 150)于 $\triangle BPQ$ 和 $\triangle BRS$，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\cdot\frac{\overline{SQ}}{\overline{SB}}\cdot\frac{\overline{RB}}{\overline{RP}}=1\\ \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}\cdot\frac{\overline{SQ}}{\overline{SB}}\cdot\frac{\overline{RB}}{\overline{RP}}=-1\end{aligned}\right\}\qquad ①$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\overline{AR}}{\overline{AS}}\cdot\frac{\overline{QS}}{\overline{QB}}\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{PR}}=1\\ \frac{\overline{NR}}{\overline{NS}}\cdot\frac{\overline{QS}}{\overline{QB}}\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{PR}}=-1\end{aligned}\right\}\qquad ②$$

由 ① 及 ②，推得

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}=-\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}},\frac{\overline{AR}}{\overline{AS}}=-\frac{\overline{NR}}{\overline{NS}}$$

即 A,M 调和分隔 P,Q；A,N 也调和分隔 R,S．故据上面的推论，可知 BC 是 A 关于 $\odot O$ 的极线．

推论　圆内接完全四角形的对角三角形必以圆心为其垂心．

定理188告诉我们仅用直尺可以对于不在圆上的已知点作它的极线，这作法很有实用的价值．如果点在圆外，那么利用这点的极线，还可以仅用直尺作出自该点至圆的切线（定理184）．此外欲仅用直尺作已知直线的极点，可在已知直线上取两点，分别作出它们的极线，这两条极线的交点便是所求的点（定理185推论2）．

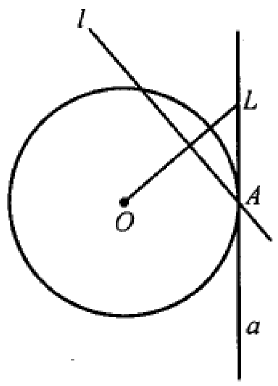


图517

当已知点在圆上的特殊情形下，欲作该点的极线（亦即圆的切线），倒要麻烦一些．其作法如下：假设点A在$\odot O$上（图517），过A任作一直线l，求出l的极点L，这时若L和A重合，l便是A的极线，不然通过A和L作直线a即合所求．这是因为L的极线l通过A，所以A的极线a也应该通过L（定理185）．

§83　反演法

以上所讨论关于反演变换的许多性质，对于作图极其有用；尤其保角性（§78）和圆变为直线（§80定理179）这两条，大有旋转乾坤之功．下面我们即转来研究反演变换在作图方面的具体用途．

反演变换对作图的功用因题而不同，归纳起来大致分为三方面：① 图形的反像可以起轨迹的作用；② 借反演变换的性质得以发现解题的线索；③ 能化原题为已知的或简易的问题．

施行反演变换时，所用的反演中心和反演幂，须视具体情形而变通，有时是现成的，有时则需要适当的选择．凡当反演变换未定时，选择合用的反演中心颇为重要，选择不当则未必能解决问题，必须选得恰到好处才可以使得作图比较简单．

像这样借助于反演变换的解题方法，叫做**反演法**．此法虽则手续繁多，但功效却很显著．

例题103　已知三直线a,b,c及c上三定点O,C,D（图518），求过O作直线l交a,b于A,B，使A,B,C,D四点共圆．

设定　三直线a,b,c及c上三点O,C,D．

求作　通过点O的直线l，交a,b于A,B，使得A,B,C,D四点共圆．

分析　假定直线l已作得，这时应有

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OC}\cdot\overline{OD}=k$$

而 k 显然是常数. 可见以 O 为反演中心, k 为反演幂而行反演变换时, A, B 互为反演点. 因此 A 一定落在 b 的反像上. 故若把 b 的反像作出来(这是可能的), 由它和 a 便可确定 A 点.

作图　首先通过 C, D 两点作一圆使与直线 b 交于 E, F, 并联结 OE, OF 交所作圆于 P, Q. 其次通过 O, P, Q 三点作圆, 设交直线 a 于 A. 最后通过 O, A 两点作直线 l(交 b 于 B) 便合所求.

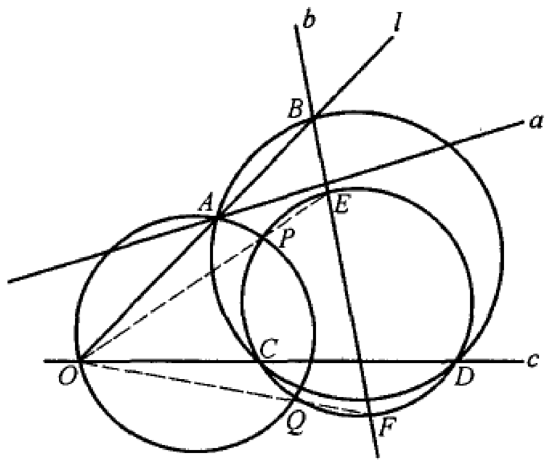


图 518

证明　按作图, 得知

$$\overline{OE}\cdot\overline{OP}=\overline{OF}\cdot\overline{OQ}=\overline{OC}\cdot\overline{OD}=k$$

可见在以 O 为反演中心, k 为反演幂的反演变换中, $\odot OPQ$ 是直线 b 的反像(§80 定理 178). 因此 A, B 互为反演点, 从而 A, B, C, D 四点共圆.

推究　(1) 直线 a, b 都不通过点 O 时:

① 若 $\odot OPQ$ 与直线 a 相交, 则有两解;

② 若 $\odot OPQ$ 与直线 a 相切, 则有一解;

③ 若 $\odot OPQ$ 与直线 a 相离, 则无解.

(2) 直线 a, b 之一或全通过 O 点时, 本题无解.

例题 104　已知 $\triangle ABC$ 及线段 r(图 519), 试作一条通过点 A 的直线 l, 要它的垂线 BM, CN 满足 $\overline{BM}\cdot\overline{CN}=r^2$.

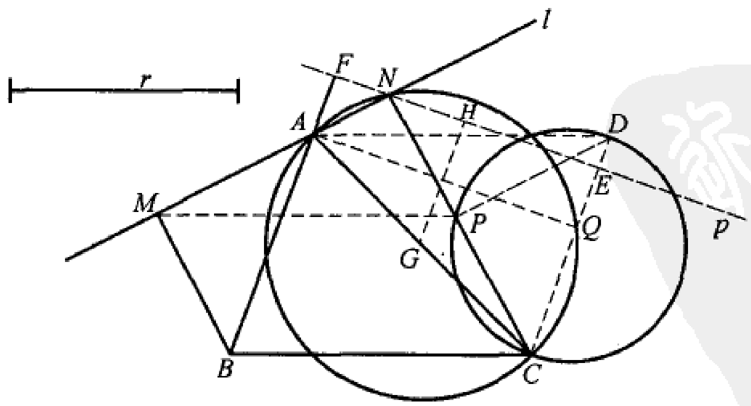


图 519

设定 $\triangle ABC$ 及线段 r.

求作 直线 l,要它通过点 A 且使

$$\overline{BM}\cdot\overline{CN}=r^2$$

成立,其中 M,N 是 B,C 在 l 上的射影.

分析 从条件 $\overline{BM}\cdot\overline{CN}=r^2$ 来看,料想用反演法或可解决问题.然而 $\overline{BM}$ 和 $\overline{CN}$ 并不共始端,为了便于施行反演变换,可把 BM 平移到 CP 的位置.平移后,得

$$\overline{CP}\cdot\overline{CN}=r^2$$

于是在以 C 为中心,r^2 为幂的反演变换 Γ 中,P,N 互为反演点.

在刚才所行的平移中,假定 A 随着移到 D,则 D 是定点.这时

$$\angle CPD=\angle BMA=90^\circ$$

因知 P 在直径为 CD 的圆上.又因

$$\angle CNA=90^\circ$$

知 N 在直径为 CA 的圆上.这两个圆都是确定的圆.至此问题便变为如何从这两圆上求一对点 P,N 使其在 Γ 之中互为反演点.但是这个问题在目前来说,已经不是一件难事,只需作出其中一圆的反像就马上解决了.

求得点 N 后,自会作得直线 l.

作图 作 $\square ABCD$.在射线 CD 上截线段 CE,使合于

$$\overline{CD}\cdot\overline{CE}=r^2$$

过 E 作 CD 的垂线 p,设交直径为 CA 的圆于 N.联结 AN,这就是所求的直线 l.

证明 据作图,知直线 p 是直径为 CD 的圆关于反演变换 Γ 的反像,Γ 的反演中心为 C,反演幂为 r^2(§80 定理 179).作 $DP\perp CN$ 于 P,则 P 在直径为 CD 的圆上,因而有

$$\overline{CP}\cdot\overline{CN}=r^2$$

引 $BM\perp l$ 于 M.因 $CN\perp l$,故可平移 $\triangle CDP$ 至于 $\triangle BAM$(§72 定理 159).由此得

$$\overline{BM}\cdot\overline{CN}=\overline{CP}\cdot\overline{CN}=r^2$$

于是直线 l 合条件.

推究 本题有解无解,要看直线 p 与直径为 CA 的圆有无公共点而定.要决定这件事,可自 CA 的中点 G 引 $GH\perp p$ 于 H,而看 GH 与 GA 的大小关系如何.今引 $AF\perp p$ 于 F,$AQ\perp CE$ 于 Q,又命

$$BC=a,CA=b,AB=c,s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

若视$\overline{CE}$为正,则据作图,有

$$\overline{CE}=\frac{r^2}{\overline{CD}}=\frac{r^2}{c}$$

因而 $$\overline{AF}=\overline{QE}=\overline{CE}-\overline{CQ}=\frac{r^2}{c}-b\cos A$$

由此 $$GH=\frac{1}{2}\mid\overline{CE}+\overline{AF}\mid=\left|\frac{r^2}{c}-\frac{1}{2}b\cos A\right|$$

从这个式子,可知本题的解数情形如下.

(1) 当 $r^2\leqslant\frac{1}{2}bc\cos A$ 时,必然

$$GH=\frac{1}{2}b\cos A-\frac{r^2}{c}<\frac{1}{2}b\cos A<\frac{1}{2}b$$

故此时一定有两解.

(2) 当 $r^2>\frac{1}{2}bc\cos A$ 时:

① 若$\frac{r^2}{c}-\frac{1}{2}b\cos A<\frac{1}{2}b$,即 $r^2<\frac{1}{2}(bc+bc\cos A)=\frac{1}{4}(2bc+b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{4}[(b+c)^2-a^2]=\frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a)=s(s-a)$,则有两解;

② 若$\frac{r^2}{c}-\frac{1}{2}b\cos A=\frac{1}{2}b$,即 $r^2=s(s-a)$,则有一解;

③ 若$\frac{r^2}{c}-\frac{1}{2}b\cos A>\frac{1}{2}b$,即 $r^2>s(s-a)$,则无解.

例题 105 已知一圆及不在圆上的四点,求作这圆的内接四边形,使它的四边或其延长线按一定次序通过该四点.

设定 ⊙O 及不在这圆上的四点 K,L,M,N(图 520).

求作 ⊙O 的内接四边形 $ABCD$,使直线 AB,BC,CD,DA 依次通过 K,L,M,N 四点.

分析 假定所求四边形 $ABCD$ 已作成.联结直线 KL 与 NM,设其交于 P.在以 L 为反演中心,B 与 C 为一对对应点的反演变换中,命 K 的反演点为 Q;又在以 M 为反演中心,D 与 C 为一对对应点的反演变换中,命 N 的反演点为 R.联结 CQ,CR,因 B,C,K,Q 四点及 D,C,N,R 四点各共圆,故得(就图 520 来看)

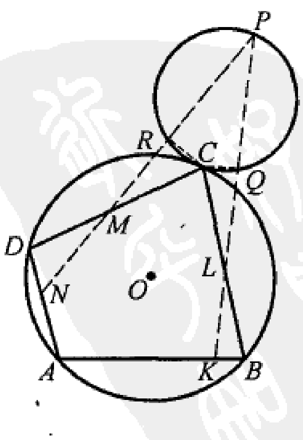


图 520

$$\angle CQK = \angle CBK = 180° - \angle CDN = 180° - \angle CRN = \angle CRP$$

可见 P,Q,R,C 四点共圆.但这圆完全被三个确定的点 P,Q,R 所决定,因此点 C 可以求得.

作图　在以 L 为反演中心,L 对于 $\odot O$ 的幂为反演幂的反演变换中,求出 K 的反演点 Q;又在以 M 为反演中心、M 对于 $\odot O$ 的幂为反演幂的反演变换中,求出 N 的反演点 R.假定直线 KL 与 NM 相交于 P,作 $\odot PQR$[①],并设这圆交 $\odot O$ 于 C.联结 CL,CM 交 $\odot O$ 于 B,D,又联结 BK 与 DN 设其交于 A,则 $ABCD$ 就是所求的四边形.

证明　据作图,知 B,C,K,Q 四点及 D,C,N,R 四点各共圆,于是(就图520来看)

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle KQC + \angle NRC = \angle PRC + \angle PQC = 180°$$

故 A,B,C,D 四点共圆.这就是说,点 A 必在 $\odot O$ 上,亦即四边形 $ABCD$ 合条件.

推究　(1)K,L,M,N 四点不共线时:

① 若 $\odot PQR$ 与 $\odot O$ 相交,则有两解;

② 若 $\odot PQR$ 与 $\odot O$ 相切,则有一解;

③ 若 $\odot PQR$ 与 $\odot O$ 相离,则无解.

(2)K,L,M,N 四点共线时:

① 若 Q,R 两点不重合,则无解;

② 若 Q,R 两点重合,则有无限多解.

注　如果所求四边形发生变态情形(图521),应从解数中剔除.

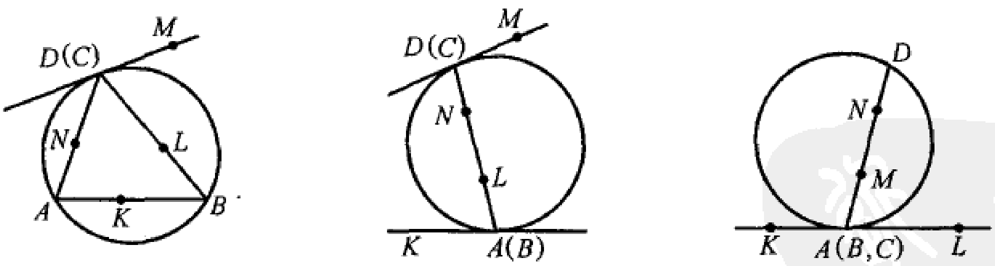


图 521

例题 106　求作一圆,使通过一已知点且切于两已知圆.

设定　一点 P 及 $\odot O_1$,$\odot O_2$(图522).

① 万一 $KL \parallel NM$,可作直线 QR 以代替 $\odot PQR$.

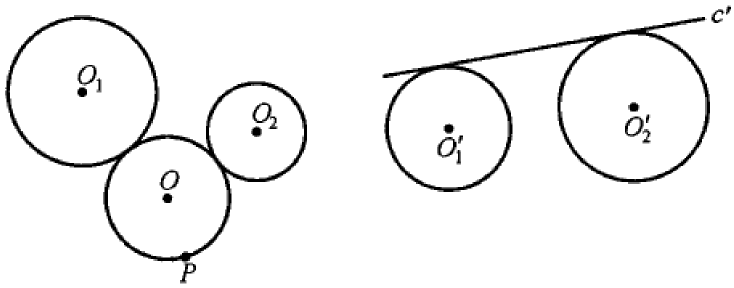


图 522

求作　$\odot O$,使通过点 P 且切于 $\odot O_1$ 及 $\odot O_2$.

分析　假定 $\odot O$ 已作得.若以 P 为中心施行反演变换,则 $\odot O_1$,$\odot O_2$ 将变为 $\odot O'_1$,$\odot O'_2$(§80 定理 180),$\odot O$ 将变为切于 $\odot O'_1$,$\odot O'_2$ 的直线 c'(§80 定理 181).于是问题化为求作两圆的公切线了.

作图　先以 P 为中心定一反演变换 Γ①,而作出 $\odot O_1$,$\odot O_2$ 的反像 $\odot O'_1$,$\odot O'_2$.次作 $\odot O'_1$,$\odot O'_2$ 的公切线 c'(§65(18)).最后在 Γ 中,作出 c' 的反像 $\odot O$ 来.这 $\odot O$ 便是所求的圆.

证明　因 c' 切于 $\odot O'_1$ 及 $\odot O'_2$,可见 $\odot O$ 必切于 $\odot O_1$ 及 $\odot O_2$.又因 c' 是直线,知 $\odot O$ 通过 P 点.故 $\odot O$ 合条件.

推究　本题解数视已知点和两已知圆间的相互位置而分类如下.

(1)$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外离时(图 523):

① 若点 P 在两圆之外,则有四解;

② 若点 P 在一圆之上,则有两解;

③ 若点 P 在一圆之内,则无解.

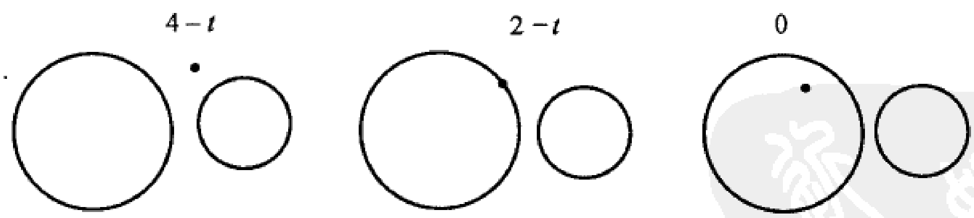


图 523

(2)$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切时(图 524):

① 若点 P 在两圆之外,则有三解;

② 若点 P 在一圆之内,则有一解;

① 最好选定一反演幂使得 $\odot O_1$,$\odot O_2$ 中有一圆不变,则作图可较简.

③ 若点 P 在一圆之上但非切点，则亦有一解；

④ 若点 P 是两圆的切点，则有无限多解.

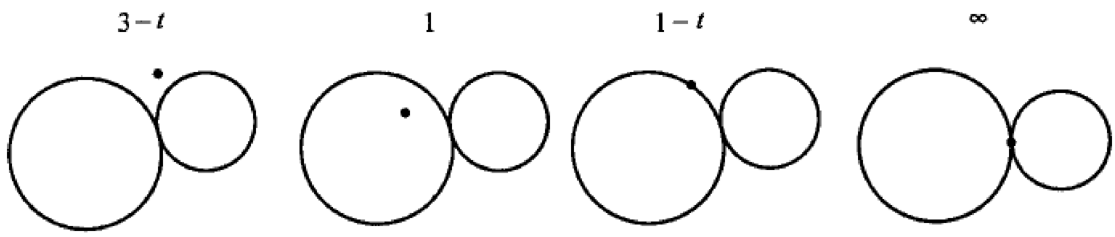


图 524

(3)$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交时(图 525)：

① 若点 P 不在两圆之上，则有两解；

② 若点 P 在一圆之上但非交点，则亦有两解；

③ 若点 P 是两圆的交点之一，则无解.

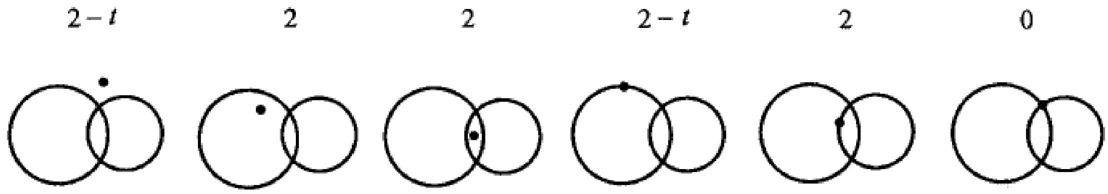


图 525

(4)$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切时(图 526)：

① 若点 P 在一圆之外而在另一圆之内，则有三解；

② 若点 P 在两圆之外或内，则有一解；

③ 若点 P 在一圆之上但非切点，则亦有一解；

④ 若点 P 是两圆的切点，则有无限多解.

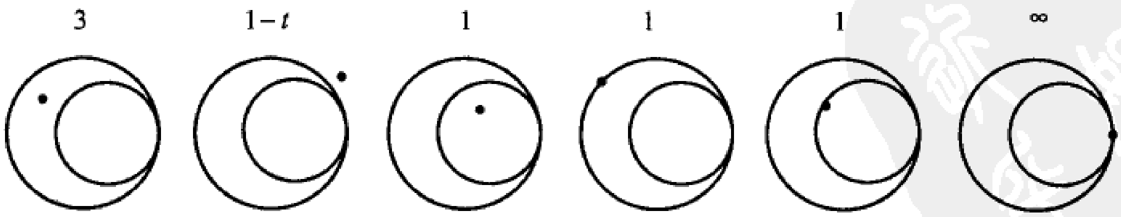


图 526

(5)$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内含时(图 527)：

① 若点 P 在一圆之外而在另一圆之内，则有四解；

② 若点 P 在一圆之上，则有两解；

③ 若点 P 在外圆之外或内圆之内，则无解.

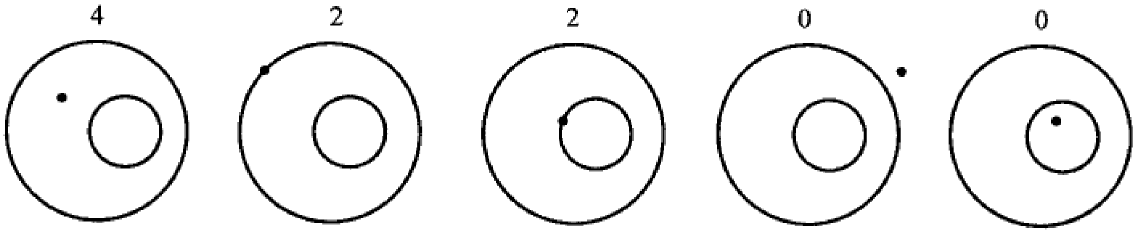


图 527

在所求圆中，如果有变态为直线的，须在解数中剔除.以上各图上面所附的数字，即表示所得解数，其中的 t 代表所求圆中变态为直线的个数，其可能值最小为 0 最大为 2，要看具体情形而定.

注　在本题中，如果两已知圆有公共点，则以公共点为中心施行反演变换，可化为习题 27 第 20 题或 §76 的例题 99.

例题 107　(阿波罗尼奥斯问题) 求作三个已知圆的公切圆.

设　定　$\odot O_1(r_1)$，$\odot O_2(r_2)$，$\odot O_3(r_3)$(图 528).

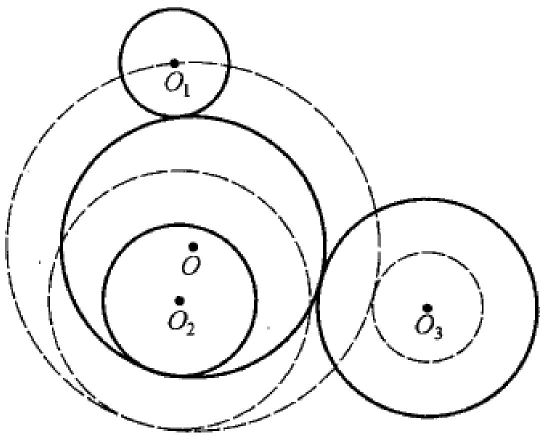


图 528

求作　这三个已知圆的公切圆.

分析　假设 $\odot O(r)$ 就是所求的公切圆.我们知道，相切圆具有这样的一种特性：内切时将两圆的半径同时增加或同时减去相同的长度，外切时将两圆的半径一增加一减去相同的长度[①]，而不改变圆心的位置，如此所得的两圆仍然相切；如果所减的长度恰和甲圆的半径相等，那么甲圆将缩为一点，而乙圆将变为通过该点（甲圆的中心）的圆.基于这个原理，我们可将三个已知圆之一（如 $\odot O_1(r_1)$）的半径减去 r_1 使该圆缩为一点 O_1，并且视 $\odot O(r)$ 与 $\odot O_1(r_1)$ 是外切或内切，而将 $\odot O(r)$ 变为 $\odot O(r+r_1)$ 或 $\odot O(|r-r_1|)$，则这变换后的圆一定通过点 O_1.同时，相应的又将 $\odot O_2(r_2)$ 变为 $\odot O_2(r_2+r_1)$ 或 $\odot O_2(|r_2-$

① 若这长度大于圆的半径，则行减法时，可以颠倒过来减.

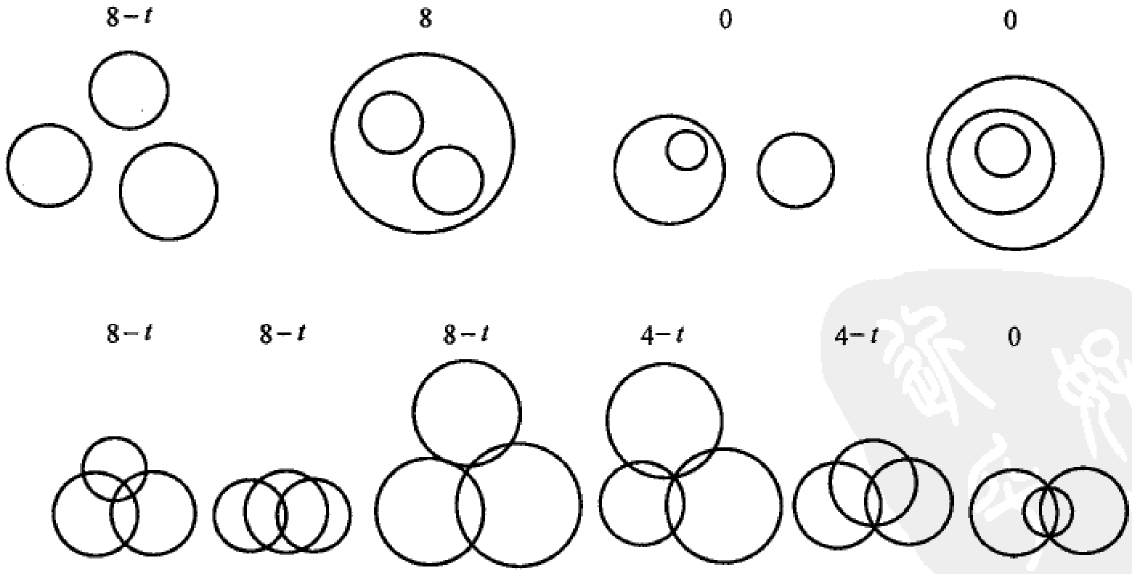
$r_1|$),将$\odot O_3(r_3)$变为$\odot O_3(|r_3-r_1|)$或$\odot O_3(r_3+r_1)$,这样所得的圆与由$\odot O(r)$变来的圆必然相切.但是,由三个已知圆变成的点和圆都是确定的,因而问题就化为例题106了.

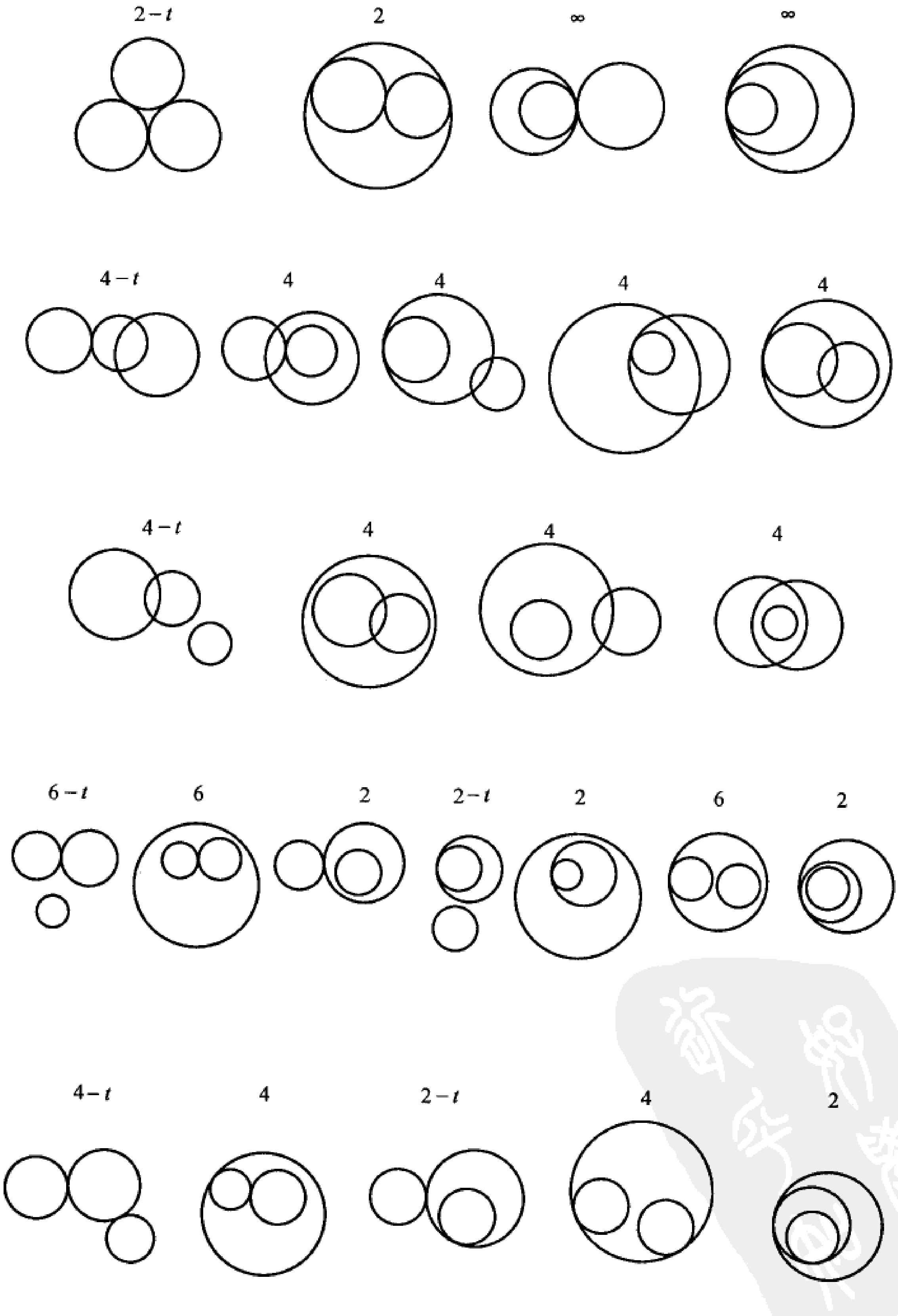
作图　作$\odot O_2(r_2+r_1)$和$\odot O_2(|r_2-r_1|)$,记之为c'_2和c''_2;又作$\odot O_3(r_3+r_1)$和$\odot O_3(|r_3-r_1|)$,记之为c'_3和c''_3.在c'_2,c''_2和c'_3,c''_3中各任选取一圆,按例题106的方法,作出切于所选两圆且通过点O_1的圆,然后视具体情形将这圆的半径或是增长或是减去r_1便是所求的圆.

证明　应用上面所说的关于相切圆的那种特性极易证明.

推究　在c'_2,c''_2中和在c'_3,c''_3中各选一圆配合成对,计有四种选法.一般地说,切于每对圆且通过点O_1的圆可各有四圆,但最多各有两圆可供利用.所以本题在一般情形下可得八解.但在特殊情形下,解数要减少以至无解,有时也许会变成有无限多解.例如,三已知圆中甲乙两圆分在丙圆的内外时无解,三圆同切于一点时有无限多解,等等.所有这些情形可按三已知圆两两相离、相交、相切而分为十类:① 离离离;② 交交交;③ 切切切;④ 离交切;⑤ 离离交;⑥ 离离切;⑦ 切切离;⑧ 切切交;⑨ 交交切;⑩ 交交离.

各类解数如图529所示,但如果发生所求圆变态为直线的情形,应从解数中剔除.下列各图上面的数字,表示解数,其中的t代表所求圆变态为直线的个数,其可能值最小等于0,最大等于3,须视具体情形而定.




2−t
2
∞
∞
4−t
4
4
4
4
4−t
4
4
4
6−t
6
2
2−t
2
6
2
4−t
4
2−t
4
2

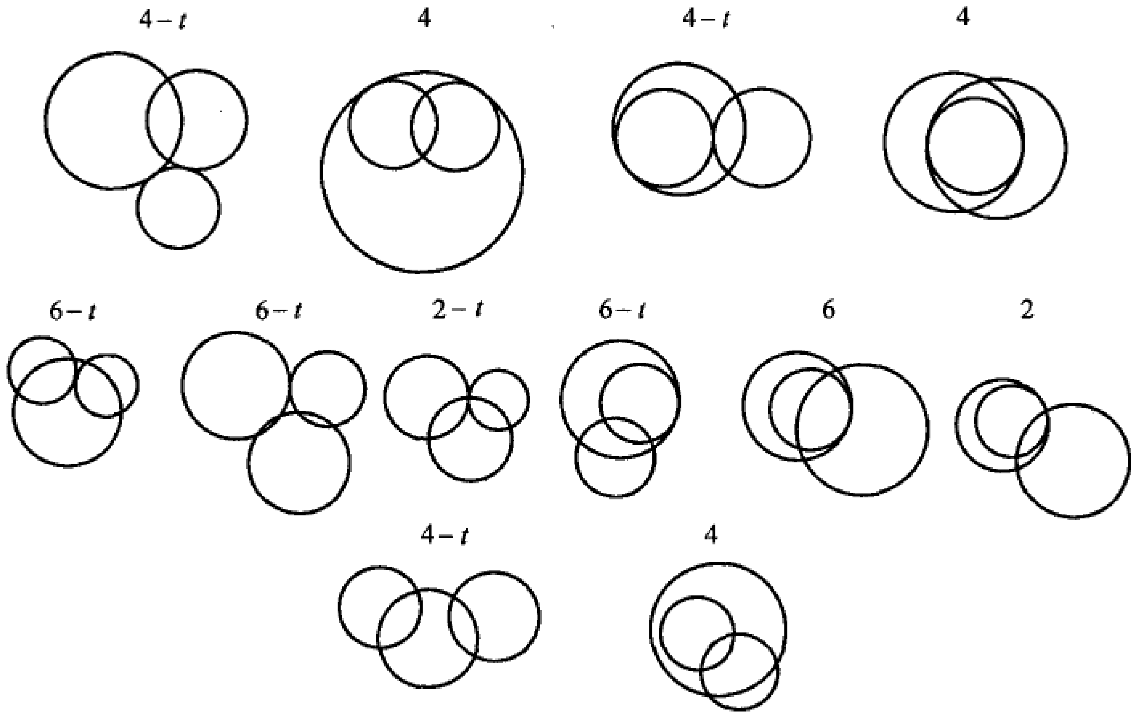


图 529

习 题 29

1. 什么叫做反演变换?这个变换是一一对应吗?

2. 试解释反演中心、反演幂、反像、双曲反演变换、椭性反演变换、反演半径、反演基圆等名词的意义.

3. 反演变换有无二重点和二重线?分布情形怎样?

4. 什么叫做反演变换的保角性?

5. 哪种全等变换可以看做变态的反演变换?

6. 关于某反演变换互为反像的两圆,它们的圆心是不是互为反演点?

7. 试述波塞里亚反演器和哈特反演器的构造及其原理.

8. 试述关于圆的极点和极线的意义.

9. 反演变换对作图有哪些功用?

10. 试证:共反演中心的两个反演变换之积是位似变换.

11. 在以 O 为中心,k 为幂的反演变换下,设 A 与 A',B 与 B' 分别互为反演点,求证:$A'B' = \frac{|k|}{OA \cdot OB} \cdot AB$.

12. 在某反演变换下,设 A 与 A',B 与 B',C 与 C',D 与 D' 分别互为反演点,

求证：$\frac{C'A'}{C'B'}:\frac{D'A'}{D'B'}=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}$.

13. 在以 S 为中心，k 为幂的反演变换下，设 $\odot O(r)$ 与 $\odot O'(r')$ 互为反像，d 是这两圆的圆心距，p,p' 分别是 S 对于这两圆的幂，求证：

(1) $k^2=pp'$；

(2) $k=\pm\frac{r}{r'}\cdot p'=\pm\frac{r'}{r}\cdot p=\pm\frac{rr'[d^2-(r\mp r')^2]}{(r\mp r')^2}$.

式中的双号，上号适用于 S 为 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 的外相似心的情形，下号适用于 S 为内相似心的情形.

14. 若给定两圆，试问存在几个反演变换使得这两圆互为反像？在什么情形下所得的反演变换是双曲的、椭性的、变态的？

15. 试求一反演基圆，使得一已知圆和一已知直线互为反像.

16. 试证：反演基圆与互为反像的两圆共轴或同心.

17. 试证：双曲共轴圆系的两个极限点关于圆系中任何圆来说都互为反演点.

18. 试证：双曲共轴圆系经反演后变为双曲共轴圆系或同心圆组.

19. 试证：椭性共轴圆系经反演后变为椭性共轴圆系或共点线组.

20. 试证：抛道共轴圆系经反演后变为抛道共轴圆系或平行线组.

21. 试证：圆外切完全四边形的对角三角形必以圆心为其垂心.（提示：应用复习题 3 第 110 题.）

22. 求过两已知点作一圆，使正交于一已知圆.

23. 求过一已知点作一圆，使同时正交于两个已知圆.

24. 求过两已知点作一圆，使径割一已知圆.

25. 求过一已知点作一圆，使同时径割两个已知圆.

26. 求过一已知点作一圆，使正交于一已知圆且径割另一已知圆.

27. 设三条定直线 a,b,c 交于一点 O，A,P 是 a 上异于 O 的两定点. 求过 O,P 两点作一圆，这圆再交 b,c 于 B,C，使得 A,B,C 三点共线.

28. 在 §83 例题 104 中，欲使 $\overline{BM}\cdot\overline{CN}=-r^2$，则如何作图？

29. 设 P 是 $\odot O$ 内的定点，求作弦 AB，使 $\angle APB=90°$，而 $S_{\triangle PAB}=a^2$，a 是给定的线段.

30. 已知面积，求作一菱形，使它的顶点依次落在一已知平行四边形各边所在的直线上.

31. 已知面积，一角及这角的顶点位置，求作三角形，使其他两顶点分别落

在一个已知圆和一条已知直线上.

32.在 §83 例题 107 中,如果三个已知圆共点,那么如何作图可以较简?

33.求过两已知点作一圆,使切于一已知圆.

34.求过一已知点作一圆,使切于一已知圆和一已知直线.

35.求过一已知点作一圆,使切于一已知圆且正交于另一已知圆.

36.求过一已知点作一圆,使切于一已知圆且径割另一已知圆.

37.求作一圆,使切于一已知圆,且同时正交于另两已知圆.(提示:把后两已知圆反演为直线或同心圆.)

38.已知一圆及不与圆相切的四条直线,求作这圆的外切四边形,使它的顶点按一定次序落在该四条直线上.(提示:作出四已知直线的极点.)

第六节　作图杂法

§84　伸缩进退法

假设 OA 是已知圆 $\odot O(r)$ 的半径(图 530).今作一同心圆,使它的半径恰好等于 OA 加上或减去(加与减指定其一)确定的一段 AA',则所作的圆是一个确定的圆.像这般由已知圆 $\odot O(OA)$ 变为一个确定的同心圆 $\odot O(OA')$ 的变换,叫做膨胀变换,其中线段 AA' 的长度 a 叫做膨胀参数.在初等几何学里,一般都视圆的半径和膨胀参数是正值,这样一来,上述的膨胀变换便受到一定的局限性.以后为使膨胀变换普遍适用,我们约定(图 531):当 a 大于已知圆的半径 r 时,$\odot O(r)$ 变为 $\odot O(|r-a|)$ 的变换也看做是膨胀变换;特别地,当 $a=r$ 即 $\odot O(|r-a|)$ 成为点圆时,我们仍然一体看待.

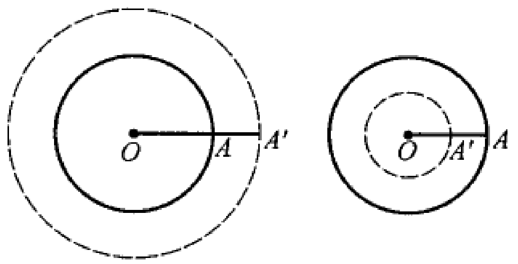


图 530

若对相切两圆 $\odot O(r)$ 和 $\odot O'(r')$ 施行膨胀变换(图 532),使 $\odot O(r)$,$\odot O'(r')$ 分别变为 $\odot O(|r\pm a|)$、$\odot O'(|r'\pm a|)$,但其中双号当原来两圆外切时应一取正号一取负号,内切时同取正号或负号,那么所得两圆仍然保持相切的性质(§12 定理 80).这个不变性对于相切圆的研究具有莫大的价值,因为它往往可以把某些问题化得简单一些.

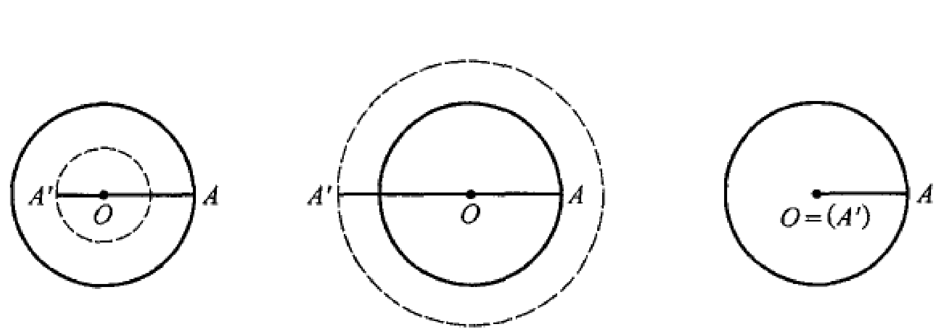


图 531

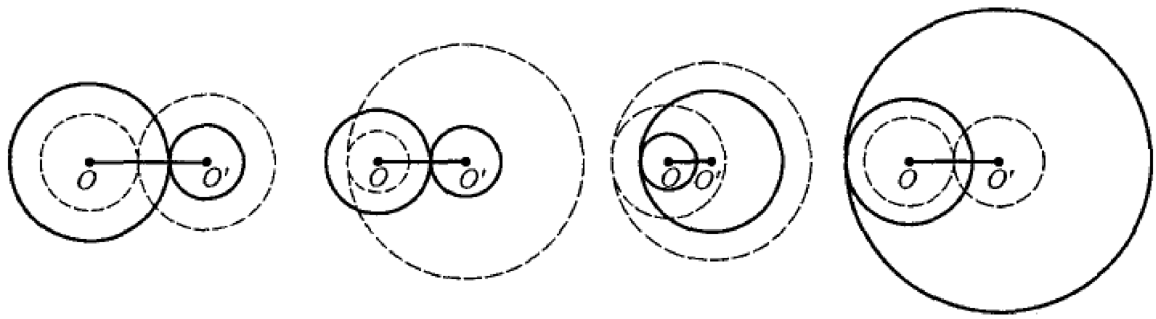


图 532

除上述特性外,随同膨胀变换的还有圆的切线随着变换而进退,其进退的距离恰等于所选的膨胀参数.这些事理对作图特别有用.在中学课本上,关于两圆公切线的作图就是应用膨胀变换的原理而设计的;又在 §83 例题 107 的解法中,事实上也曾用这原理来化简问题了.

应用膨胀变换的原理以解题,叫做伸缩进退法.此法一般适用于有关圆和圆以及圆和直线相切的问题.

例题 108 求作一圆,使切于一个已知圆和两条已知直线.

设定 $\odot P(R)$ 和两条直线 a, b(图 533).

求作 $\odot O$,使切于 $\odot P$ 和两直线 a, b.

分析 假设 $\odot O$ 已作得,它的半径为 r.现在我们对 $\odot P(R)$ 和 $\odot O(r)$ 施行膨胀变换,使 $\odot P(R)$ 变为点圆——点 P,而 $\odot O(r)$ 变为过 P 的一同心圆 k,k 的半径等于 $R+r$ 或 $|R-r|$,视 $\odot P(R)$ 与 $\odot O(r)$ 外切或内切而定.在施行膨胀变换的同时,$\odot O(r)$ 的切线 a, b 要随着进退到离开原来位置等于 R 那样远的地方,譬如说,a 进到 a_1,b 进到 b_1.这样一来,k 实际就是通过已知点 P 且切于确定的两直线 a_1, b_1 的圆,所以 k 有法求得(§76 例题 99).k 既得,所求圆自然易于作出了.

作图 作两直线 a_1, a_2 同平行于 a 且令与 a 的距离都等于 R;又作两直线

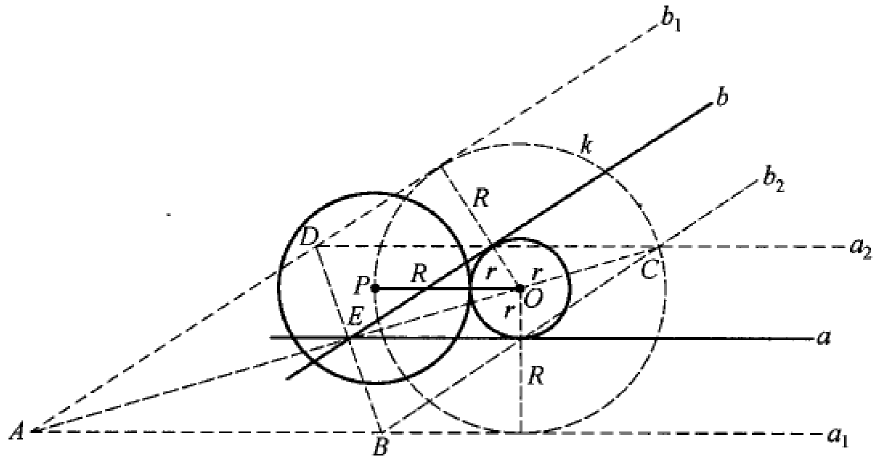


图 533

b_1,b_2 同平行于 b 且令与 b 的距离都等于 R. 在所作的直线里，任选出两条 a_i，$b_j(i,j=1,2)$ 来，然后作圆 k 使切于这两条直线且通过点 P. 命 k 的圆心为 O，若 O 与 a,b 有等距 r，则 $\odot O(r)$ 即是所求圆.

证明 据作图，除已知 $\odot O(r)$ 已和直线 a,b 相切外，又因 k 通过点 P 且切于 a_i,b_j 两直线，得知

$$OP = R + r \text{或} |R - r|$$

可见 $\odot O(r)$ 又与 $\odot P(R)$ 相切. 所以 $\odot O(r)$ 合条件.

推究 (1) 假定 a 与 b 交于点 E(图 533)，那么 a_1,a_2,b_1,b_2 将交成一个菱形 $ABCD$，且直线 AC,BD 平分 a 与 b 的交角，因而 E 是该菱形的中心. 由此可见，作出 k 后，必须圆心 O 落在射线 EA,EB,EC,ED 之一上面才合用. 从这处着眼，得知本题解数情形如下.

① 当 $\odot P$ 不通过直线 a 与 b 的交点时(图 534)：

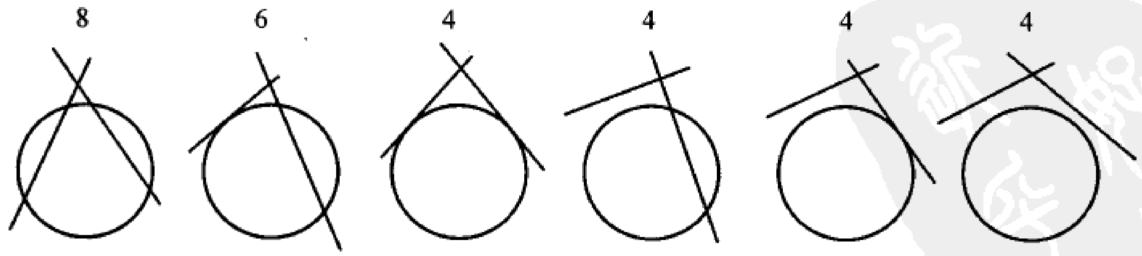


图 534

a. 如果 $\odot P$ 与 a,b 都相交，则点 P 落在菱形 $ABCD$ 内部，此时共得八解；

b. 如果 $\odot P$ 与 a,b 一交一切，则点 P 落在菱形 $ABCD$ 某边上，此时共得六

解；

c.如果 ⊙P 与 a,b 都相切,则点 P 是菱形 $ABCD$ 的一个顶点,此时共得四解；

d.如果 ⊙P 与 a,b 一交一离,则点 P 落在菱形 $ABCD$ 某外角内,此时共得四解；

e.如果 ⊙P 与 a,b 一切一离,则 P 点落在菱形 $ABCD$ 某边的延长线上,此时共得四解；

f.如果 ⊙P 与 a,b 都相离,则点 P 落在菱形 $ABCD$ 某角的对顶角内,此时共得四解.

② 在 ⊙P 通过直线 a 与 b 的交点时(图 535):

a.如果 ⊙P 与 a,b 都相交,则点 P 落在菱形 $ABCD$ 内部,但此时所作八个 k 中有四个合而为一,并以点 E 为圆心,不合用,故仅得四解；

b.如果 ⊙P 与 a,b 一交一切,则点 P 落在菱形 $ABCD$ 某边上,但此时所作六个 k 中有四个同上情形,不合用,故仅得两解.

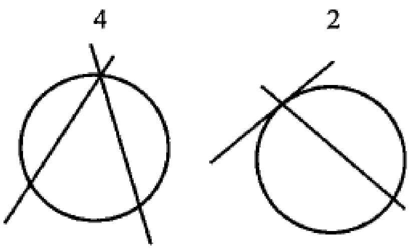


图 535

(2) 假定 $a \parallel b$(图 536),则本题的解数情形如下.

① 在 ⊙P 与 a,b 都相交时四解.

② 在 ⊙P 与 a,b 一交一切时三解.

③ 在 ⊙P 与 a,b 都相切时两解.

④ 在 ⊙P 与 a,b 一交一离时两解.

⑤ 在 ⊙P 与 a,b 一切一离时:

a.当点 P 在 a 与 b 之间,三解；

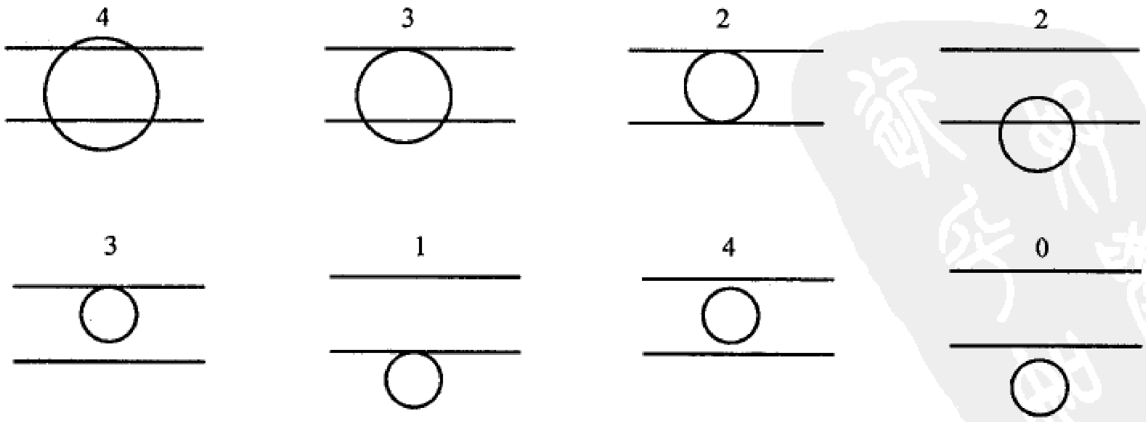


图 536

b.当点 P 不在 a 与 b 之间,一解.

⑥ 在 $\odot P$ 与 a,b 都相离时:

a.当点 P 在 a 与 b 之间,四解;

b.当点 P 不在 a 与 b 之间,无解.

§85 反求法

有时要在一个设定的图形上安置一个新图形感到很不易着手,但往往颠倒过来做就可以克服这个困难.所谓颠倒过来做,意思是说,我们不先往原图形上去安置新图形,而先在便宜处做好一个与新图形全等的图形,然后在这个图形上把一个与原图形全等的图形添加上去.这样合成的图形,应当与我们原来所要求的一模一样,所差的只是位置不同罢了,因此我们便不难仿照这个合成图形的结构形式在原位置上造出所求的图形来.万一全等于所求图形的图形不能马上作得,不妨先作相似的图形,然后放大或缩小.像这样的作图方法,叫做反求法.

例题 109 自已知直线外一定点求作两射线,使所夹的角等于已知角,并在已知直线上截下定长的线段.

设定 一角 α,一线段 a,一直线 l 及线外一点 A(图 537).

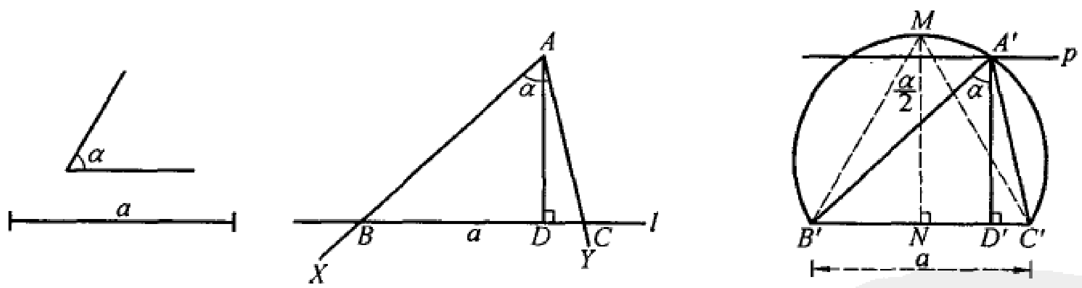


图 537

求作 射线 AX,AY,交 l 于 B,C,使 $\angle XAY=\alpha$,$BC=a$.

分析 作一角 $\angle XAY$ 使等于 α,本是件轻而易举的事,然而使这角的两边在 l 上截下等于 a 的线段 BC 却很不易着手,原因在于设定的位置把我们限制住了.可是如果我们不论位置,单把 $\triangle ABC$ 来考虑一下,便会发觉它有一角($\angle BAC$),一边(BC)以及这边的高(AD)均已知,因此这三角形不难作成.现在只要先在便宜处作一个与这三角形全等的三角形,那么在设定的位置上自然可以仿造出所求的图形来,所以本题适用反求法.

作图　引 $AD \perp l$ 于 D. 在任意位置上作线段 $B'C' = a$, 以这线段为弦作一弓形, 使它的内接角等于 α. 作一直线 p, 使平行于 $B'C'$, 且令与 $B'C'$ 的距离等于 AD. 设直线 p 与刚才所作的弓形弧交于 A', 联结 $A'B'$, $A'C'$, 并引 $A'D' \perp B'C'$ 于 D'. 在 l 上截 $DB = D'B'$, $DC = D'C'$, 且视 D' 介于 B', C' 之间与否而使得 D 亦介于 B, C 之间或否. 最后自 A 作过 B, C 的射线 AX, AY, 便是所求的射线.

证明　据作图, $DB = D'B'$ 且 $DC = D'C'$, 可见 $BC = B'C' = a$. 又 $AD = A'D'$, 因而 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle A'B'D'$ 且 $\text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle A'C'D'$; 于是 $AB = A'B'$ 且 $AC = A'C'$. 由此 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$; 那么 $\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha$. 故知所作图形合条件.

推究　过 $\overset{\frown}{B'A'C'}$ 的中点 M 引 $MN \perp B'C'$ 于 N. 本题有解无解, 要看点 A' 有无而定. 然而此事又系乎 AD 与 MN 的大小关系. 由此可知:

(1) 当 $AD < MN$, 即 $AD < \frac{1}{2}a\cot\frac{\alpha}{2}$ 时, 本题有两解;

(2) 当 $AD = MN$, 即 $AD = \frac{1}{2}a\cot\frac{\alpha}{2}$ 时, 本题有一解;

(3) 当 $AD > MN$, 即 $AD > \frac{1}{2}a\cot\frac{\alpha}{2}$ 时, 本题无解.

例题 110　在已知半圆形中, 求作相似于定四边形的内接四边形, 使指定的一边落在半圆形的直径上, 其他两顶点同落在半圆形的弧上.

设定　直径为 MN 的半圆形及四边形 $A_1B_1C_1D_1$(图 538).

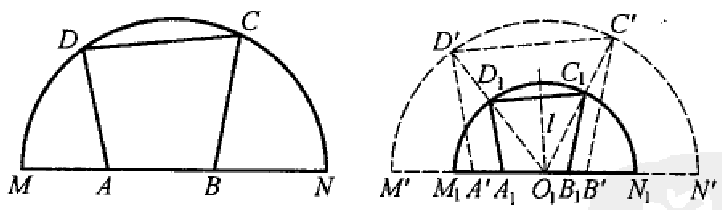


图 538

求作　四边形 $ABCD$, 使相似于 $A_1B_1C_1D_1$, 且令边 AB 落在所设半圆形的直径 MN 上, C, D 两顶点同落在 $\overset{\frown}{MN}$ 上.

分析　按指定的条件作四边形 $ABCD$ 使内接于已知半圆形, 比起先作相似的四边形而后作它的外接半圆形要艰难得多, 故本题以用反求法为便. 要作相似的四边形, 其实不必另起炉灶, 直接利用四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 即可. 怎样作这四边形的外接半圆形呢? 办法很简单: 作出 C_1D_1 的中垂线, 设交 A_1B_1 于 O_1, 则

O_1 就是所求半圆形的圆心；圆心即得，所要作的半圆形便定局了．这样一来，我们便不难在已知半圆形中来模仿这个图样作图（当中最好经过一层放大或缩小的手续）．

作图　作 C_1D_1 的中垂线 l，设交 A_1B_1 于 O_1．以 O_1 为圆心作半圆形①，使它的弧通过 C_1, D_1 两点，直径 M_1N_1 落在直线 A_1B_1 上．以 O_1 为相似中心，将所作的半圆形 $M_1D_1C_1N_1$ 连同已知四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 一起放大或缩小成为半圆形 $M'D'C'N'$ 和四边形 $A'B'C'D'$，使 $M'N' = MN$（如何作？）．在线段 MN 上截 $MA = M'A'$ 和 $NB = N'B'$；又在 $\overset{\frown}{MN}$ 上截 $\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{M'D'}$ 和 $\overset{\frown}{NC} = \overset{\frown}{N'C'}$．联结 BC，CD，DA，即得所求的四边形 $ABCD$．

证明　根据作图，知半圆形 $MDCN$ 与 $M'D'C'N'$ 全等，因而四边形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 也全等．$A'B'C'D'$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 既是位似图形，当然彼此相似（§73 定理 161）；从而 $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$．可见作图无误．

推究　欲究本题的解数情形，第一要问点 O_1 的有无，第二要检查 M_1, N_1 两点落在直线 A_1B_1 上的位置，第三要看四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是否关于 l 成轴对称形．综合这些情况，分类如下．

(1) 当 C_1D_1 不垂直于 A_1B_1 时，分两种情形．

①O_1A_1, O_1B_1 均不大于 $O_1C_1 = O_1D_1$，这时：

a．若 $A_1B_1C_1D_1$ 不关于 l 成轴对称形，则有两解；

b．若 $A_1B_1C_1D_1$ 关于 l 成轴对称形，则有一解．

②O_1A_1, O_1B_1 有一大于 $O_1C_1 = O_1D_1$，这时无解．

(2) 当 $C_1D_1 \perp A_1B_1$ 时，无解．

§86　变更问题法

把当前的问题，设法化为已知的问题，或改造为易解的问题，这样的解题方法叫做**变更问题法**．事实上，前面所讲的各种作图法，也无非是针对每题的特点来设计，以达化繁为简、变难为易的目的．所以变更问题法并没有新的内容，它不过是集各法的大成．因此，如何运用这个方法是难以一概而论的，其敷陈立论，既因题而不同，亦因人而有异．总而言之，娴熟定理，多习作图，然后可望养成技巧，技巧既成，不但运用成法自如，往往还能够创立新法．

---

① 若为作图省事，这半圆形可以不作．

例题 111 已知一边,此边的高、对角的平分线,求作三角形.

设定 三线段 a,h,t(图 539).

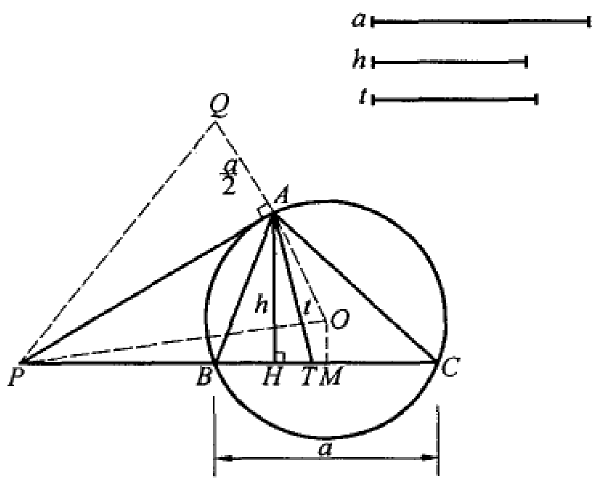


图 539

求作 $\triangle ABC$,使边 $BC=a$,高 $AH=h$,角平分线 $AT=t$.

分析 假设图已作成.在 Rt$\triangle AHT$ 中,有已知长度的两边 $AH=h$ 和 $AT=t$,因此这个三角形得以确定.有了 Rt$\triangle AHT$,下一步便是设法来安置所求三角形的边 BC.现在若过 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线设交 CB 的延长线于 P,则因

$$\angle PAT=\angle PAB+\angle BAT=\angle ACT+\angle TAC=\angle ATH$$

得知 AP 是确定的直线.这就是说,当 Rt$\triangle AHT$ 作定以后,P 便是一个有确定位置的点.由此看来,问题已经转化为"求作一圆,使切 $\angle APT$ 的一边 PA 于 A,而在他边 PT 上截下一弦 $BC=a$"了.

转化后的问题,是我们已经知道的(§71 例题 98),但现在我们要用比较简单的方法来分析这个问题.假定所求圆的中心为 O,引 $OM\perp PT$ 于 M,则因

$$PA^2=PB\cdot PC=\left(PM-\frac{a}{2}\right)\left(PM+\frac{a}{2}\right)=PM^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

推知
$$PM^2=PA^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

此式的右端是常数,故 PM 长度一定而点 M 可得.A,M 两点既定,点 O 自属可求,于是 $\odot O$ 随之可作.

作图 作 Rt$\triangle AHT$,使 $\angle AHT=90°$,$AH=h$,$AT=t$.过 A 引一直线交射线 TH 于 P,令合于 $\angle PAT=\angle ATH$.引 $AQ\perp PA$,并截 $AQ=\frac{a}{2}$;联结 PQ,在射线 PT 上截 $PM=PQ$.自 M 引 PM 的垂线交直线 QA 于 O,以 O 为心作圆通过 A 而交射线 PT 于 B,C(假定 B 介于 P,C 之间).作 $\triangle ABC$,此即所求的三角形.

证明 因 $\odot O$ 切 PA 于 A，故

$$PA^2 = PB \cdot PC = \left(PM - \frac{BC}{2}\right)\left(PM + \frac{BC}{2}\right) =$$

$$PM^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = PQ^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

由此
$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = PQ^2 - PA^2 = AQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

于是
$$BC = a$$

又因
$$\angle BAT = \angle PAT - \angle PAB = \angle ATH - \angle ACT = \angle TAC$$

故 AT 是 $\angle BAC$ 的平分线.但最初作图时,已使

$$AT = t, AH = h$$

而后者明明是 $\triangle ABC$ 的高,所以 $\triangle ABC$ 合乎要求的各条件.

推究 当 Rt$\triangle AHT$ 作出后,P,O 两点必然存在,这层及易知道.现在尚须考虑的,是 $\odot O$ 与射线 PT 能否相交.因为

$$OA^2 = OP^2 - PA^2$$

$$OM^2 = OP^2 - PM^2 = OP^2 - PQ^2$$

而
$$PA < PQ$$

所以
$$OA > OM$$

后一不等式决定了 $\odot O$ 与射线 PT 一定相交.由此得知:

(1)$h < t$ 时,不论 a 的长短如何,本题总有一解.

(2)$h = t$ 时,本题仍有一解,其作法甚简,此时得一等腰三角形.

(3)$h < t$ 时,本题无解.

例题 112 在已知圆中,求作内接等腰三角形,使它的底与高之和等于定长.

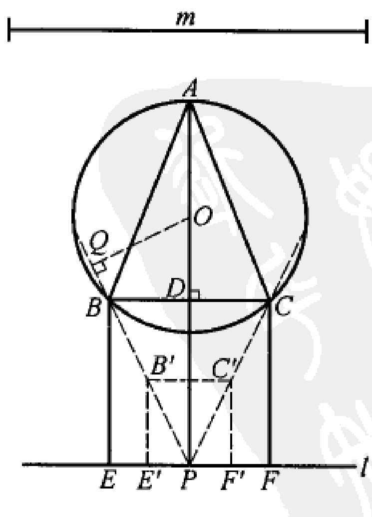


图 540

设定 $\odot O(r)$ 及一线段 m(图 540).

求作 $\odot O$ 的内接三角形 $\triangle ABC$,使 $AB = AC$ 且 $AD + BC = m$,其中 AD 是边 BC 的高.

分析 假设 $\triangle ABC$ 已求得.为了利用条件 $AD + BC = m$,我们延长 AD 至 P,使 $DP = BC$,于是 $AP = m$.因 $AB = AC$,射线 AP 必然通过点 O,故当点 A 定了时,点 P 也就定了.从而过 P 且垂直于 AP 的直线 l 随之定位.命 B,C 在 l 上的射影为 E,F,则 $EBCF$ 显然是一个正方形.这个正方形是解决问题的关键,如果能把它作出来,大功即可告成.

由上所述，原来的问题已被改造成为“求作正方形 $EBCF$，使顶点 B，C 落在 $\odot O$ 上，E，F 落在直线 l 上”形式的一个问题.这个问题是比较容易的，应用放大法即可解决.事实上，以 P 为相似中心施行位似变换，将 $EBCF$ 变为 $E'B'C'F'$，那么后者极易作出.

作图　自 $\odot O$ 上选定的一点 A 作射线 AO，在这射线上截线段 $AP = m$.过 P 作直线 l，令其垂直于 AP.从 l 上任意截下等长的两线段 PE' 和 PF'，而以 $E'F'$ 为一边作正方形 $E'B'C'F'$.联结直线 PB' 设交 $\odot O$ 于 B，并假定 A，B 同在 l 的一侧.在 $\odot O$ 中，作弦 BC 令其平行于 l，则 $\triangle ABC$ 即是所求三角形.

证明　据作图，C'，C 显然分别是 B'，B 关于 AP 的对称点，故 P，C'，C 三点共线，且

$$AB = AC$$

设 B，C 在 l 上的射影为 E，F，则 $EBCF$ 位似于 $E'B'C'F'$（P 是相似中心），因而 $EBCF$ 是正方形.今命 BC 与 AP 的交点为 D，那么 AD 即是 $\triangle ABC$ 的高，并且合于

$$AD + BC = AD + DP = AP = m$$

所以 $\triangle ABC$ 是合条件的.

推究　本题有解与否，视乎直线 PB' 与 $\odot O$ 有无公共点而定.欲决定此事便需计算点 O 与 PB' 直线的距离.引 $OQ \perp PB'$ 于 Q，则由 $\mathrm{Rt}\triangle OQP \backsim \mathrm{Rt}\triangle PE'B'$，知道

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{PE'}{PB'}$$

以 $OP = |m - r|$ 及 $PB' = \sqrt{5}PE'$ 代入，可得

$$OQ = \frac{|m - r|}{\sqrt{5}}$$

于是得知本题的解数情形如下：

(1) 当 $m > 2r$ 时：

① 若 $OQ < r$，即 $m < (1 + \sqrt{5})r$，则有两解；

② 若 $OQ = r$，即 $m = (1 + \sqrt{5})r$，则有一解；

③ 若 $OQ > r$，即 $m > (1 + \sqrt{5})r$，则无解.

(2) 当 $m \leqslant 2r$ 时，恒有一解（此时直线 PB' 与 $\odot O$ 虽有两交点，但仅一点合用.）

习题 30

1. 什么叫做膨胀变换及膨胀参数？当膨胀参数不小于已知圆的半径时，我

们对膨胀变换有什么约定?

2. 什么叫做伸缩进退法?此法一般适用于哪类问题?

3. 什么叫做反求法?

4. 什么叫做变更问题法?

5. 已知一定圆及一定直线,求作一圆,令切定直线于定点,而且切于定圆.

6. 已知两定圆,求作一圆,令切其中一定圆于定点,而且切于另一定圆.

7. 过两已知点求作一圆,使切于另一已知直线.

8. 求作一圆,使切于一已知圆和一已知直线,且令圆心落在另一已知直线上.

9. 过一已知点求作一圆,使切于一已知圆,且令圆心落在一已知直线上.

10. 求作一圆,使切于两已知圆,且令圆心落在一已知直线上.

11. 求作一圆,使切于两已知圆和一已知直线.

12. 设 a,b,c 是共点的三条已知直线,求作一直线 l 交 a,b,c 于 A,B,C,使 B 介于 A,C 之间,且令 AB,BC 分别等于定长.

13. 在定圆中求作一直径,使它对一已知点所张开的角等于已知角.

14. 设 OA,OB 是 $\odot O$ 的两条定半径,求作 $\odot O$ 的切线 t,使被 $\angle AOB$ 的两边截下定长的线段.

15. 求作一直线 l 交两条定射线 OX,OY 于 A,B,使 AB 及 $OA+OB$ 分别等于定长.

16. 设 A,B 是 $\odot O$ 上两定点,在 $\odot O$ 中求作弦 XY,使其平行于一定直线,且令 $AX+BY$ 等于定长.(提示:自 A 作平行于 XY 的弦.)

17. 在已知直线上求一点,使至两已知点的距离和等于定长.

18. 在已知直线上求一点,使至两已知点的距离差(绝对值)等于定长.

19. 给定一角 β,两线段 a,d,求作 $\triangle ABC$,使 $\angle ABC=\beta,BC=a,AC-AD=d,AD$ 是边 BC 的高.(提示:应用习题 28 第 16 题.)

20. 求作 $\triangle ABC$,使 $\angle A$ 等于已知角,$AB+BC$ 及 $AC+BC$ 分别等于已知长.(提示:应用 §76 例题 102.)

21. 已知一边,此边的高、对角的外角平分线,求作三角形.

22. 已知一边及对角的内外平分线,求作三角形.

23. 已知一边,两邻角的差,对角的平分线,求作三角形.(提示:作出已知边的高.)

24. 已知一边,两邻角的差,对角的外角平分线,求作三角形.

25. 以一固定线段为一边求作三角形,使两邻角的差(绝对值)等于已知

角,对顶点落在一已知直线上.(提示:关于固定线段的中垂线,作出已知直线的对称线,然后应用习题28第17题.)

26. 在已知圆中,求作内接等腰三角形,使它的底与高之差(绝对值)等于定长.

第七节 代数在几何上的应用

§ 87 几何线段关系式的齐次性

假设在函数 $f(x,y,\cdots,u)$ 里,用 $tx,ty,\cdots,tu$ 分别代替了 $x,y,\cdots,u$ 而得

$$f(tx,ty,\cdots,tu)=t^nf(x,y,\cdots,u)$$

时,则 $f(x,y,\cdots,u)$ 叫做 n 次齐次函数或径称 n 次齐次式.由几何产生的关系式,大半系线段长度所组成[①],这些关系式,对于所含诸线段来说,必然是齐次的.例如,设 a,b,c,d 均表线段长度,则

$$a+b=2c-3d \quad ①$$

$$a=\frac{2bc}{3d} \quad ②$$

$$2a=\sqrt{bc} \quad ③$$

都是一次齐次等式.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad ④$$

是零次齐次等式.

$$ab=cd \quad ⑤$$

$$a^2+b^2=c^2 \quad ⑥$$

都是二次齐次等式.

$$a^4=b^4-c^4 \quad ⑦$$

是四次齐次等式.又如

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \quad ⑧$$

与

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c} \quad ⑨$$

① 式中若含有三角函数,可以把这三角函数看做两个线段长度之比.

则分别是 -1 次与$\frac{1}{2}$ 次的齐次等式.

齐次关系式经过某种运算后,它的次数往往要发生变动.例如,① 的两端同乘以 a,② 的两端同乘以 d,③ 的两端分别平方,④ 的两端均乘以 bd,次数都增为2;⑤ 的两端同除以 ac,次数将降为0;⑥ 的两端同除以 c,次数便降为1.其他如 ⑦ 若改为

$$a^3 = \frac{b^4}{a} - \frac{c^4}{a} \tag{10}$$

则变成三次齐次等式;式 ⑧ 改为

$$c(b-a) = ab \tag{11}$$

即变成二次齐次等式;⑨ 改为

$$\sqrt{ab} - \sqrt{ac} = b - c \tag{12}$$

便变成一次齐次等式.

凡由线段组成的几何关系式,无非是由一些简单的齐次关系式施以加、减、乘、除、开方各种运算而得到的[①].显然,经过这些运算的结果,必定还是齐次关系式.因此,一切由线段组成的几何关系式没有不是齐次的.这个特性,叫做几何线段关系式的**齐次性**.

如果一个关系式不是齐次的,我们便说它**无几何意义**;只有当它是齐次时,我们才说它**有几何意义**.例如,$a^2 + b = 2c^2 - 3d$ 一式就无几何意义.

齐次函数(包括独项式),除去次数等于 0,1,2,3 的以外,我们也认为它无几何意义.例如,$a+b$ 有几何意义,$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 则无几何意义.可是在一个齐次关系式中,尽管它的每项单独看来无几何意义,但就整个式子说,只要经过某些运算,总可以把它的各项变得有几何意义.例如,⑦,⑧,⑨ 三式的各项原来都无几何意义,但当化成 ⑩,⑪,⑫ 后,各项便都有几何意义了.

所有几何线段关系式既然都是齐次的,则有时为着简单起见,我们往往径说一次式、二次方程,等等,而不必声明它们是齐次式.

§ 88 一次式的作图

假定 a,b,c 是已知线段,则下列各式所表 x(线段) 的作图,已是我们所熟知的(§65)

① 将两式加或减,必须两式同次数.

$$x = a + b \qquad ①$$

$$x = a - b(a > b) \qquad ②$$

$$x = \frac{m}{n}a \quad (m,n \text{ 都是自然数}) \qquad ③$$

$$x = \frac{ab}{c} \qquad ④$$

$$x = \sqrt{ab} \qquad ⑤$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad ⑥$$

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (a > b) \qquad ⑦$$

现在我们就从这些已知的作图出发,在可能范围内逐步讨论一般一次式的作图.

我们首先看

$$x = \frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_m)}{g(a_1, a_2, \cdots, a_m)} > 0 \qquad ⑧$$

其中 a_i 是已知线段,f 是有理系数的 $n+1$ 次齐次有理整式,g 是有理系数的 n 次齐次有理整式.把 ⑧ 改成下面的形式

$$x = \frac{a \cdot \frac{f}{a^n}}{\frac{g}{a^{n-1}}}$$

a 是在诸 a_i 中选定的一个已知线段,令 $y = \frac{f}{a^n}$,这是一个一次齐次有理式,它的每项的形状均如

$$y' = k \cdot \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n+1}}{a^n}$$

的形式,其中 b_j 代表各已知线段 a_i(可以重复),k 是有理数.这样形式的 y',利用 ③ 和 ④ 的作图方法即可求得.事实上,反复应用已知的作图,我们可以连续地作出下列所有的线段

$$kb_1; kb_1 \cdot \frac{b_2}{a}; \frac{kb_1b_2}{a} \cdot \frac{b_3}{a}; \cdots; \frac{kb_1b_2\cdots b_n}{a^{n-1}} \cdot \frac{b_{n+1}}{a}$$

最末的线段就是 y'(暂不计符号).把所有的 y' 作出后,再按 ① 和 ② 的作图方法便可作得线段 $y = \frac{f}{a^n}$.同理也可以作得线段 $z = \frac{g}{a^{n-1}}$.这样一来,线段 $x = \frac{ay}{z}$ 就能作出了.

例题 113　已知线段 a,b,c,d,求作线段

$$x=\frac{a^4+b^4}{ab^2+c^2d}$$

解　先把原式改成下面的形状

$$x=a\cdot\frac{a+\dfrac{b^4}{a^3}}{\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2d}{a^2}}$$

再按 ① 和 ④ 即可作得 x.

其次,我们来看一个比较复杂的式子

$$x=\sqrt{F(a_1,a_2,\cdots,a_m)} \quad ⑨$$

这里的 a_i 是已知线段,F 是有理系数的二次齐次有理式,并假定 $F>0$.为要作出线段 x,可把它表示成 $x=\sqrt{a\cdot\dfrac{F}{a}}$ 的形式,其中 a 是诸a_i 中之一.这时$\dfrac{F}{a}$ 该是一个一次齐次有理式,故按 ⑧ 能求得线段 $y=\dfrac{F}{a}$,那么 $x=\sqrt{ay}$ 用 ⑤ 即可作出.

例题 114　已知线段 a,b,c,求作线段

$$x=\sqrt{\frac{a^5+b^5+c^5}{ab^2+bc^2+ca^2}}$$

解　化原式为

$$x=\sqrt{a\cdot\frac{a^4+\dfrac{b^5}{a}+\dfrac{c^5}{a}}{ab^2+bc^2+ca^2}}=\sqrt{a\cdot\frac{a\left(a+\dfrac{b^5}{a^4}+\dfrac{c^5}{a^4}\right)}{\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{bc^2}{a^2}+c}}$$

后,用 ①,④,⑤ 便不难逐步完成作图.

最后,我们还要研究如下形状的式子的作图

$$x=\sqrt{\phi(a_1,a_2,\cdots,a_m)} \quad ⑩$$

此处的 a_i 是已知线段,ϕ 是仅含平方根式的二次齐次无理式,并假定 $\phi>0$.现在假设 ⑩ 的右端是 n 层平方根式[①],并将 ϕ 尽量分项,写做

---

① 在 $A=\sqrt{\phi(x,y,\cdots,u)}$ 中,若 ϕ 是有理系数的有理函数,但非完全平方式,则 A 叫做一层平方根式;推而广之,若 ϕ 仅含平方根式而最高是 $n-1$ 层,则 A 叫做n 层平方根式.例如,$\sqrt{x+\sqrt{y-\sqrt{z}}}$ 是三层平方根式.

$$\phi = \phi_1 \pm \phi_2 \pm \cdots \pm \phi_l$$

则诸 ϕ_j 所含的平方根式最高不过 $n-1$ 层. 在诸 a_i 中选取 $-a$, 以之遍除 ϕ 中各项, 诸 $\frac{\phi_i}{a}$ 便都是一次齐次式. 如果能将 $\frac{\phi_i}{a}$ 作出, 那么 $\frac{\phi}{a}$ 即可求得; 因之

$$x = \sqrt{a \cdot \frac{\phi}{a}}$$

亦随之可作. 这就是说, n 层平方根式的作图, 将归结于 $p(p < n)$ 层平方根式的作图. 如此递降到一层平方根式时, 它的作图可能性在 ⑨ 已经证实了. 故 ⑩ 能作图无疑.

例题 115 已知线段 a, b, c, 求作线段

$$x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}}$$

解 将原式写如

$$x = \sqrt{a\left(a + \frac{\sqrt{b^4 + c^4}}{a}\right)} = \sqrt{a\left(a + \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + \frac{c^4}{a^2}}\right)}$$

即可按 ①, ④, ⑤, ⑥ 作出 x.

如上所述, 由 ① 至 ⑩ 的作图既均属可能, 那么总合起来, 我们便得到一个一般性的命题如下:

定理 189 凡含已知线段 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的一次齐次式 $\Omega(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, 若其中仅用有限次加、减、乘、除、开平方[①]五种运算, 并且 Ω 在其定义域中能取得实值, 则此值所对应的线段可用直尺圆规作图.

例题 116 设 a 是已知线段, 则线段

$$x = a\sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

可用直尺圆规作图.

事实上, 把原式化成

$$x = \sqrt{3a^2 - a^2\sqrt{5}} = \sqrt{3a^2 - a\sqrt{5a^2}}$$

的形状后, 便十分明白.

例题 117 设 a, b 是已知线段, 则线段

$$x = \sqrt[4]{a^4\sqrt{2} + b^4\sqrt[4]{3}}$$

可用直尺圆规作图.

① 开 2^n 次方可作开平方论. 事实上, 开 2^n 次方无异于接连施行 n 次开平方.

这只要将原式变为

$$x=\sqrt[4]{a^2\left(a\sqrt{2a^2}+\frac{b^3}{a^2}\sqrt{b\sqrt{3b^2}}\right)}=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{2a^2}+\frac{b^3}{a^2}\sqrt{b\sqrt{3b^2}}}}$$

就可以知道了.

§89 二次方程的根的作图

我们知道,二次方程

$$x^2\pm px\pm qr=0$$

的根可用仅含 p,q,r 及有限次加、减、乘、除、开平方五种运算的一次式表出,所以如果 p,q,r 是已知线段,并且方程的根是实值的话,那么一定能用直尺圆规作出一线段来代表这个根(§88 定理 189).不过这时直接利用根的表达式来作图,倒要麻烦一些,实不如应用代数学上的韦达定理设计作图来得简单.现在分别研究如下.

(1)

$$x^2-px+qr=0 \qquad ①$$

假设 ① 的两根为 x_1 和 x_2,则有

$$x_1+x_2=p,x_1x_2=qr$$

根据这两个等式即可这样来设计作图:作射线 AX 和 AY(图 541),在 AX 上截

$$\overline{AP}=\frac{1}{2}p$$

而在 AY 上截

$$\overline{AQ}=q,\overline{AR}=r$$

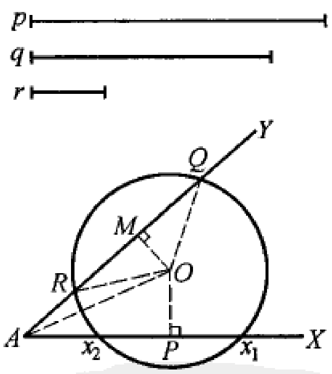


图 541

自 P 引 AX 的垂线,设与 QR 的中垂线 MO 交于 O.以 O 为心,$OQ=OR$ 为半径作一圆,假定交 AX 于 X_1,X_2,则 $\overline{AX_1},\overline{AX_2}$ 就是所求的两根.事实上,因为

$$\overline{AX_1}+\overline{AX_2}=2\overline{AP}=p$$

$$\overline{AX_1}\cdot\overline{AX_2}=\overline{AQ}\cdot\overline{AR}=qr$$

所以 $\overline{AX_1}$ 和 $\overline{AX_2}$ 必合条件.至于作图的可能条件,从作法可知是

$$OP\leqslant OQ$$

两端同时平方后,各以其等量代入,便化为

$$OA^2 - \frac{1}{4}p^2 \leqslant OA^2 - qr$$

即
$$p^2 \geqslant 4qr$$

这结果和用 ① 的判别式来判断是一致的.

(2)

$$x^2 + px + qr = 0 \quad ②$$

显然,若以 $x = -x'$ 代入 ②,实际上就变成 ①.所以 ② 的两根恰和 ① 的两根同值异号.

(3)

$$x^2 - px - qr = 0 \quad ③$$

令两根为 x_1 和 x_2,则

$$x_1 + x_2 = p, x_1x_2 = -qr$$

观此可知两根一正一负,其作图方法与上仿佛:作射线 AX 和 AY(图 542),在 AX 上截

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}p$$

而在 AY 及其反向延长线上分别截

$$\overline{AQ} = q, \overline{AR} = -r$$

自 P 引线垂直于 AX 而交 QR 的中垂线 MO 于 O.以 O 为心作圆令通过 Q,R,命此圆与 AX 及其反向延长线交于 X_1 及 X_2,则 $\overline{AX_1}$ 即是 ③ 的正根,$\overline{AX_2}$ 是负根.这是因为

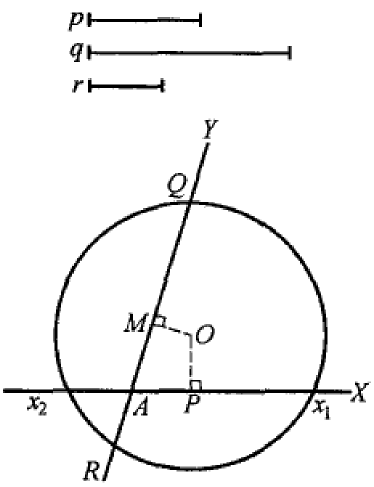


图 542

$$\overline{AX_1} + \overline{AX_2} = 2\,\overline{AP} = p$$
$$\overline{AX_1} \cdot \overline{AX_2} = \overline{AQ} \cdot \overline{AR} = -qr$$

的缘故.由于点 A 在 $\odot O$ 内,可见 $\odot O$ 一定和射线 AX 及其反向延长线相交(§ 12 定理 75 推论),即 X_1, X_2 两点必然存在.所以我们永远能够求得 ③ 的两根,但是我们通常只取它的正根而抛弃它的负根.

(4)

$$x^2 + px - qr = 0 \quad ④$$

很易知道,④ 的两根与 ③ 的两根恰同值异号.

如果把一个二次方程的系数规定得更广泛一些,我们将会得到下面的命题:

定理 190 设 A 是已知线段的零次齐次式,B 是已知线段的一次齐次式,C

是已知线段的二次齐次式，并且它们仅含有限次加、减、乘、除、开平方五种运算，则当方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 的根为实值时这根是可作的线段.

§90 代数分析法

有的作图题，解决的关键主要在于其中某一二线段长度[①]的算出，而计算线段长度则需借助于代数的方法. 这种利用代数以解题的方法叫做代数分析法，它的过程一般有下列几个步骤：

(1) 以字母表某些已知的及未知的(欲求的)量；

(2) 根据设定条件及已知定理把已知量与未知量间的应有关系列为方程(或方程组)；

(3) 解此方程(或方程组)，求得根的表达式[②]；

(4) 必要时，将根的表达式加以改造；

(5) 准此根的表达式按步作图；

(6) 然后建设其他点线[③].

前面讲过的许多作图方法，有的便于此而不便于彼，或者熟手能运用自如，而生手竟莫知所措. 代数分析法主要在于计算，其中有一定的准绳规矩可循，故在应用上较易见效. 不过也因为代数分析法往往要经过繁重的计算，所以有时不及他法爽快.

例题 118 求作等边圆拱的内切圆.

所谓等边圆拱是一条线段和两个圆弧联结成的图形，两圆弧的圆心分别是线段的两端，半径都等于线段的长度. 两圆弧的公共端点叫做等边圆拱的顶点，线段叫做底边.

设定 等边圆拱 ABC，A 是顶点，BC 是底边(图 543).

求作 这个等边圆拱的内切圆 $\odot O$.

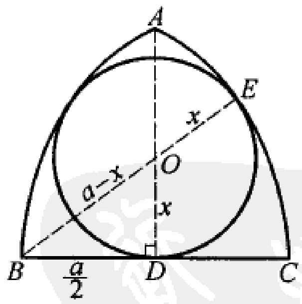


图 543

分析 假设所求的 $\odot O$ 切 BC 于 D，切 $\overset{\frown}{AC}$ 于 E. 显然，等边圆拱 ABC 是轴对称图形，而 AD 正是它的对称轴，因此点 O 必然落在

---

① 有时可能是某角或某圆弧的大小，不过这种情形比较少.

② 也有无需解方程即悟及作图法的，如 §89 所举的作图就是如此.

③ 如果在上一步已经完成作图，这一步就不需要了.

AD 上. 命 $\odot O$ 的半径为 x, BC 的长为 a, 则因 B, O, E 三点共线, 知

$$BO = BE - OE = a - x$$

根据勾股定理, 有

$$BO^2 = BD^2 + OD^2$$

即
$$(a - x)^2 = \frac{1}{4}a^2 + x^2$$

解这方程, 得

$$x = \frac{3}{8}a$$

故点 O 可定.

作图　作 $AD \perp BC$ 于 D, 在线段 DA 上截 $DO = \frac{3}{8}BC$, 则以 O 为心, OD 为半径的圆就是所求的内切圆.

证明　联结 BO 并延长使交 $\overset{\frown}{AC}$ 于 E. 因

$$BO^2 = BD^2 + OD^2 = \frac{1}{4}BC^2 + \frac{9}{64}BC^2 = \frac{25}{64}BC^2$$

故
$$BO = \frac{5}{8}BC$$

由此
$$OE = BE - BO = BC - \frac{5}{8}BC = \frac{3}{8}BC$$

可见 $\odot O$ 通过点 E 而与 $\overset{\frown}{AC}$ 相切. 同理也知 $\odot O$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 相切. 所以 $\odot O$ 是等边圆拱 ABC 的内切圆.

推究　本题永有一解.

例题 119　已知一边, 对角及此角的平分线, 求作三角形.

设定　一角 α, 两线段 a, t (图 544).

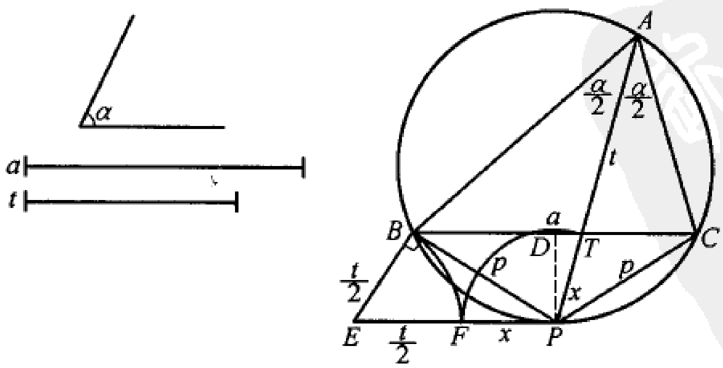


图 544

求作 $\triangle ABC$,使 $BC = a$,$\angle A = \alpha$,平分角线 $AT = t$.

分析 设图已成.作$\triangle ABC$的外接圆.延长AT设交此圆于P,则P是$\overset{\frown}{BPC}$的中点.联结PB,PC,那么在$\triangle PBC$中,除已知$BC = a$外,又有$\angle PBC = \angle PCB = \frac{1}{2}\alpha$,可见它是一个确定的等腰三角形.

作出$\triangle PBC$后,若能求出线段PT的长,则问题即可解决.今令$PT = x$,$PB = PC = p$,因$\triangle PBT \backsim \triangle PAB$,知

$$\frac{PT}{PB} = \frac{PB}{PA}$$

即

$$\frac{x}{p} = \frac{p}{x+t}$$

故

$$x^2 + tx - p^2 = 0 \qquad ①$$

解方程①,弃其负根,得

$$x = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 4p^2}}{2} = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + p^2} - \frac{t}{2}$$

 根据此式,便可作得x.

作图 作$\triangle PBC$,令

$$BC = a, \angle PBC = \angle PCB = \frac{1}{2}\alpha$$

引$BE \perp BP$,并取$BE = \frac{1}{2}t$.联结线段EP,在其上截$EF = EB$.以P为圆心画$\overset{\frown}{FT}$设交BC于T.联结PT并延长之至A,使

$$AT = t$$

最后把AB,AC联结起来,便得所求的$\triangle ABC$.

证明 按作图,已有$BC = a$,$AT = t$,如果再能证明

$$\angle TAB = \angle TAC = \frac{1}{2}\alpha$$

那么$\triangle ABC$便是合条件的.由于

$$PT = PF = EP - EF = \sqrt{BE^2 + PB^2} - BE = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + p^2} - \frac{t}{2}$$

可见PT的长满足方程①,因此下式成立

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PT} \qquad ②$$

从式②知$\triangle PAB \backsim \triangle PBT$,那么

$$\angle TAB = \angle PBC = \frac{1}{2}\alpha$$

同理
$$\angle TAC = \angle PCB = \frac{1}{2}\alpha$$

推究　本题有无解答，决定于点 T 是否存在，而此事又要看 PF 与 PD（D 是 BC 的中点）的大小关系而定．现在

$$PD = \frac{1}{2}a\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$PF = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + p^2} - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t^2 + a^2\sec^2\frac{\alpha}{2}} - t\right)$$

从而

$$PF - PD = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{t^2 + a^2\sec^2\frac{\alpha}{2}} - \left(t + a\tan\frac{\alpha}{2}\right)\right\} =$$

$$\frac{at\left(\frac{a}{2t} - \tan\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{t^2 + a^2\sec^2\frac{\alpha}{2}} + t + a\tan\frac{\alpha}{2}}$$

由此得知：

(1) $\tan\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{a}{2t}$ 时，$PD \leqslant PF$，于是本题有一解[①]；

(2) $\tan\frac{\alpha}{2} > \frac{a}{2t}$ 时，$PD > PF$，于是本题无解．

在同一个问题里，对于已知量及未知量的选择，未必人人都相同，如果选择得当，解法可以较简．如下例中的解法一，虽然容易想到，但不及解法二省事．然而怎样选择适当的已知量及未知量，这却要靠各人解题的经验和技巧了．

例题 120　求作一直线使平行于已知梯形的底边，且把梯形的面积二等分．

设定　梯形 $ABCD$，BC 是它的底边．

求作　直线 EF，使其平行于底边 BC，交两腰 AB，DC 于 E，F，而且

$$S_{AEFD} = S_{EBCF}$$

解法一

分析　作 $AH \perp BC$ 于 H（图 545）．令 $AD = a$，$BC = b$，$AH = h$，$EF = x$．

---

① 其中 $\tan\frac{\alpha}{2} < \frac{a}{2t}$ 的情形，点 T 虽有两个位置，但所得到的两个三角形实际彼此全等．

假定 $a < b$[①],则根据 §49 例题 58,得

$$x = \sqrt{b^2 - \frac{S_{ABCD} \cdot (b-a)}{h}} = \sqrt{b^2 - \frac{\frac{1}{2}h(b+a)(b-a)}{h}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

故 x 可作.

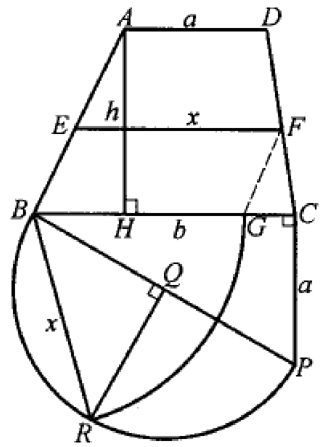


图 545

作图 引 $CP \perp BC$,且取 $CP = AD$.联结 BP,以之为直径作半圆,并自 BP 的中点 Q 引线垂直于 BP 而交半圆于 R.以 B 为圆心画 $\overset{\frown}{RG}$ 交线段 BC 于 G.作直线 GF 平行于 BA 而交 CD 于 F,又作直线 FE 平行于 CB 而交 AB 于 E.这 EF 就是所求的直线.

证明 据作图,知

$$EF = BG = BR = \sqrt{BQ \cdot BP} = \sqrt{\frac{1}{2}BP^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

但另一方面,又知(§49 例题 58)

$$EF = \sqrt{b^2 - \frac{2S_{EBCF} \cdot (b-a)}{h}}$$

可见
$$\frac{1}{2}(a^2+b^2) = b^2 - \frac{2S_{EBCF} \cdot (b-a)}{h}$$

由此
$$S_{EBCF} = \frac{\frac{1}{2}h(b^2-a^2)}{2(b-a)} = \frac{1}{4}h(a+b) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

观此式即知直线 EF 是合条件的.

推究 本题永有一解.

解法二

分析 假定 $AD < BC$(图 546).延长 BA 与 CD 交于点 O,令 $OA = a$,$OB = b$,$OE = x$.因

$$S_{\triangle OEF} = S_{\triangle OAD} + S_{AEFD}$$
$$S_{\triangle OEF} = S_{\triangle OBC} - S_{EBCF}$$

① $a = b$ 时问题极易,这情形不再论述.

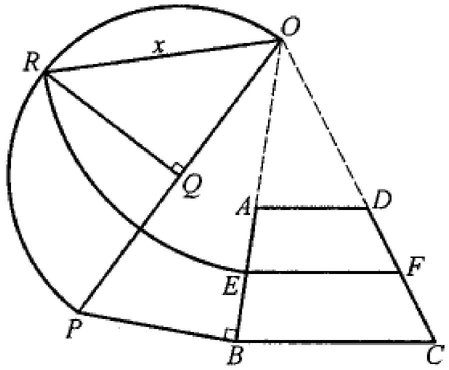


图 546

故 $S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}(S_{\triangle OAD}+S_{\triangle OBC})$

但(§23 定理 142)

$$S_{\triangle OEF}:S_{\triangle OAD}:S_{\triangle OBC}=x^2:a^2:b^2$$

可见 $x^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

据此式即易求得 x.

作图 命直线 BA 与 CD 的交点为 O.引 $BP\perp OB$,且取 $BP=OA$.联结 OP,以之为直径作半圆,并自 OP 的中点 Q 引线垂直于 OP 而交半圆于 R.以 O 为圆心画 $\overset{\frown}{RE}$ 交线段 AB 于 E.作直线 EF 平行于 BC 而交 CD 于 F.这直线 EF 即合所求.

证明 据作图,得

$$OE^2=OR^2=OQ\cdot OP=\frac{1}{2}OP^2=\frac{1}{2}(BP^2+OB^2)=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2)$$

但 $$S_{\triangle OEF}:S_{\triangle OAD}:S_{\triangle OBC}=OE^2:OA^2:OB^2$$

因而 $$S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}(S_{\triangle OAD}+S_{\triangle OBC})$$

由此 $$S_{\triangle OEF}-S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}-S_{\triangle OEF}$$

故 $$S_{\triangle AEFD}=S_{\triangle EBCF}$$

推究 同解法一.

有时问题的可能情形不一,应按所有情形列出方程,一一研究解法,切戒顾此失彼.

例题 121 求内分或外分已知线段 AB 于点 C,使合于

$$AC^2=BC\cdot PQ$$

其中 PQ 是另一已知线段.

设定 线段 AB 及 PQ.

求作 在直线 AB 上的一点 C,使 $AC^2=BC\cdot PQ$.

解法一

分析 令 $AB=a,PQ=p,AC=x$.分点 C 的位置,有三种可能情形:

(1) 在线段 AB 上(图 547(a)),这时 $BC=a-x$;

(2) 在 BA 的延长线上(图 547(b)),这时 $BC=a+x$;

(3) 在 AB 的延长线上(图 547(b)),这时 $BC=x-a$.

因此,按所设条件可得三个方程

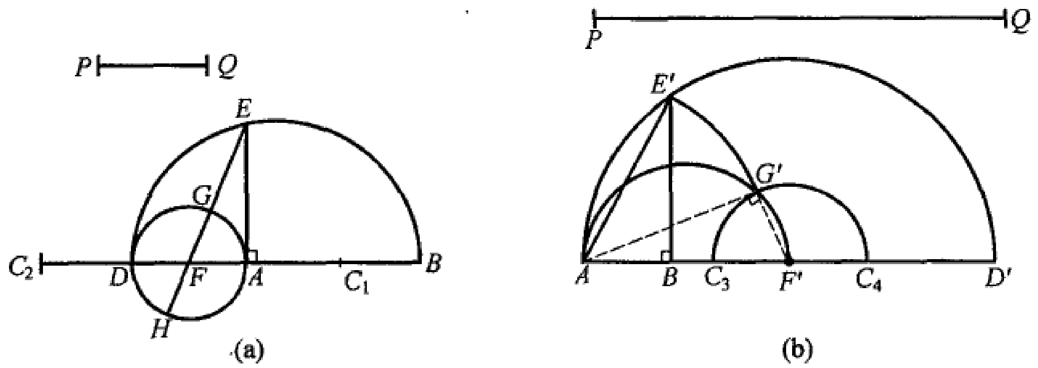


图 547

$$x^2 = (a - x)p \quad ①$$

$$x^2 = (a + x)p \quad ②$$

$$x^2 = (x - a)p \quad ③$$

再写成标准式

$$x^2 + px - ap = 0 \quad ④$$

$$x^2 - px - ap = 0 \quad ⑤$$

$$x^2 - px + ap = 0 \quad ⑥$$

解④,弃其负根,得

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4ap}}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + ap} - \frac{p}{2}$$

解⑤,弃其负根,得

$$x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4ap}}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + ap} + \frac{p}{2}$$

解⑥,得

$$x_3 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4ap}}{2} = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - ap}$$

$$x_4 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4ap}}{2} = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - ap}$$

根据这四个根的表达式,便不难按步作图了.

作图 在 BA 的延长线上,截 $AD = PQ$(图 547(a)).以 BD 为直径作半圆,并自 A 引线垂直于 AB 而交半圆于 E.以 AD 为直径作圆 $\odot F$,联结直线 EF 交这圆于 G,H,而设 G 介于 E,H 之间.在线段 AB 上,截 $AC_1 = EG$;在射线 AD 上,截 $AC_2 = EH$.这 C_1,C_2 就是第一,第二两种情形的分点.

其次,在射线 AB 上,截 $AD' = PQ$(图 547(b)).以 AD' 为直径作半圆,并自

B 引线垂直于 AB 设交半圆于 E'. 求出 AD' 的中点 F', 以 AF' 为直径作半圆; 以 A 为圆心画 $\overset{\frown}{E'G'}$ 设交此半圆于 G'. 以 F' 为心作圆使通过 G' 而交 AD' 于 C_3 和 C_4. 这 C_3, C_4 就是第三种情形的分点.

证明　显然, ④ 的正根与 ⑤ 的负根同值异号. 现因

$$AC_2 - AC_1 = EH - EG = GH = AD = PQ = p$$

且

$$AC_2(-AC_1) = -EH \cdot EG = -AE^2 = -AB \cdot AD = -ap$$

可见 $AC_2, -AC_1$ 满足 ⑤; 从而 AC_1 必满足 ④.

其次, 由于

$$AC_3 + AC_4 = 2AF' = AD' = PQ = p$$

且

$$AC_3 \cdot AC_4 = AG'^2 = AE'^2 = AB \cdot AD' = ap$$

得知 AC_3, AC_4 满足 ⑥.

这证明了 C_1, C_2, C_3, C_4 四点确合条件.

推究　(1) $PQ > 4AB$ 时, 有四解;

(2) $PQ = 4AB$ 时, 有三解;

(3) $PQ < 4AB$ 时, 有两解.

解法二

分析　从①,②,③三式看来, 如果我们能设计造成一个直角三角形, 令它的勾和股在弦上的射影一个等于 p, 另一个等于 a 与弦的高之差或和, 那么弦的高之长就是所求的 AC 之长了(§18 定理 123(1)). 下述的作法, 便是从这方面构思而获得的.

作图　在射线 AB 上, 截 $AD = PQ$. 在 BA 的延长线上, 截 $AB' = AB$ 及 $AE = \frac{1}{2}AB$, 并引 $EF \perp AB$ 且取 $EF = \frac{1}{2}AB$(图 548(a)). 通过 B', D, F 三点作圆, 过 A 引线垂直于 AB 而交此圆于 G, H, 设 G 与 F 位于 AB 的同侧. 以 A 为圆心画 $\overset{\frown}{GC_1}$ 交线段 AB 于 C_1, 又画 $\overset{\frown}{HC_2}$ 交射线 AB' 于 C_2.

求出 AB 的中点 E', 引 $E'F' \perp AB$ 且取 $E'F' = \frac{1}{2}AB$(图 548(b)). 通过 B, D, F' 三点作圆, 设交自 A 所作 AB 的垂线于 G', H'. 以 A 为圆心画 $\overset{\frown}{G'C_3}$ 及 $\overset{\frown}{H'C_4}$ 交射线 AD 于 C_3 及 C_4.

这 C_1, C_2, C_3, C_4 四点, 便是所求的分点.

证明　连 DG, GF, FB'(图 548(a)). 按作图, 知 $\angle FB'D = 45°$, 因而 $\angle FGD = 135°$. 自 G 引线垂直于 GD 而交射线 AE 于 M, 可得

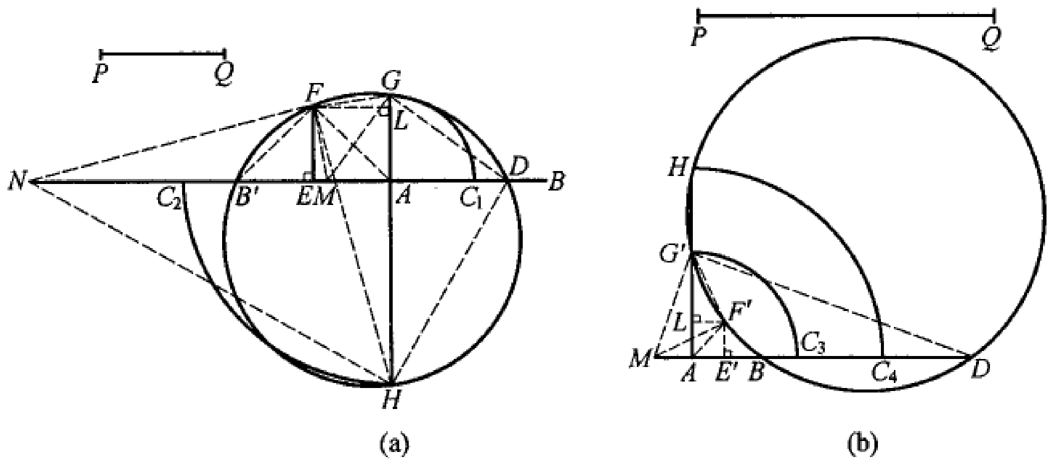


图 548

$$\angle FGM = \angle FGD - \angle DGM = 135° - 90° = 45°$$

联结 FA,显然 $\angle FAM = 45°$. 由此可知,A,G,F,M 四点共圆. 那么引 $FL \perp AG$ 于 L,并联结 FM,当有 $\angle FGL = \angle FME$. 又 $FL = EA = FE$,可见 Rt$\triangle FLG \cong$ Rt$\triangle FEM$. 从而 $LG = EM$. 因此得

$$AG + AM = AL + AE = AB$$

于是

$$AM = AB - AG = AB - AC_1 = BC_1$$

现在来看 Rt$\triangle GMD$,得知

$$AC_1^2 = AG^2 = AM \cdot AD = BC_1 \cdot PQ$$

故点 C_1 合条件.

次联结 DH, HF(图 548(a)),可得 $\angle DHF = \angle DB'F = 45°$. 自 H 引线垂直于 HD 而交射线 AE 于 N,当有

$$\angle FHN = \angle DHN - \angle DHF = 90° - 45° = 45°$$

因而 A,H,F,N 四点共圆. 于是联结 FN,即知 $\angle FNE = \angle FHL$;那么 Rt$\triangle FEN \cong$ Rt$\triangle FLH$,由此 $EN = LH$. 从而

$$AN = AE + EN = AE + LH = AE + LA + AH = AB + AC_2 = BC_2$$

此时利用 Rt$\triangle HND$,即得

$$AC_2^2 = AH^2 = AN \cdot AD = BC_2 \cdot PQ$$

这证明了点 C_2 也是合条件的.

再在图 548(b) 中,联结 $DG', G'F', F'B$,即知 $\angle DG'F' = \angle F'BA = 45°$. 自 G' 引线垂直于 $G'D$ 而交 BA 的延长线于 M',就有

$$\angle F'G'M' = \angle DG'M' - \angle DG'F' = 90° - 45° = 45°$$

联结 $F'A$，显然 $\angle F'AB = 45°$. 这样，便知 A, F', G', M' 四点共圆. 于是联结 $F'M'$，并作 $F'L \perp AG'$ 于 L（这和图 548(a) 中的 L 是同一个点），当有 $\angle F'M'E' = \angle F'G'L$. 由此 $Rt\triangle F'E'M' \cong Rt\triangle F'LG'$. 从而 $E'M' = LG'$. 因得

$$AM' = E'M' - AE' = LG' + AL - AB = AG' - AB = AC_3 - AB = BC_3$$

那么从 $Rt\triangle G'M'D$ 立即可以推知

$$AC_3^2 = AG'^2 = AM' \cdot AD = BC_3 \cdot PQ$$

即 C_3 是合条件的点. 同理可证 C_4 也是合条件的点.

推究　同解法一.

注　上述解法二是纯用几何关系以求所要的分点，它的构思颇具匠心. 构思的步骤，是步步预为造因，以期种瓜得瓜. 这种作图法可称为造因法，此法经常渗透在许多作图里面.

本题除上举两种解法外，还可以仿照 §89 所说的方法作图.

题中的两个已知线段 AB 和 PQ，如果恰好相等的话，那么本题的作图就是有名的黄金分割法（§65(35)）. 这时在图 547(a) 中的 AD 和 AE 实际都等于 AB，因而半圆 BED 已无须画出，若以 EA 代 AB，则剩下的作图步骤，正是大家熟知的在中学课本上所载的方法.

建立方程或在计算的过程中，如果兼用三角函数，有时较易思索或者使得计算的手续简单一些.

例题 122　有一球在圆形的撞球台上且不是在台的中央，今欲一击此球使其连撞台边二次后复滚过原来的位置，求球所经过的路线.

设定　一圆形的撞球台 $\odot O(r)$ 及台上一球 A，但 A 不在台的中央点 O（图 549）.

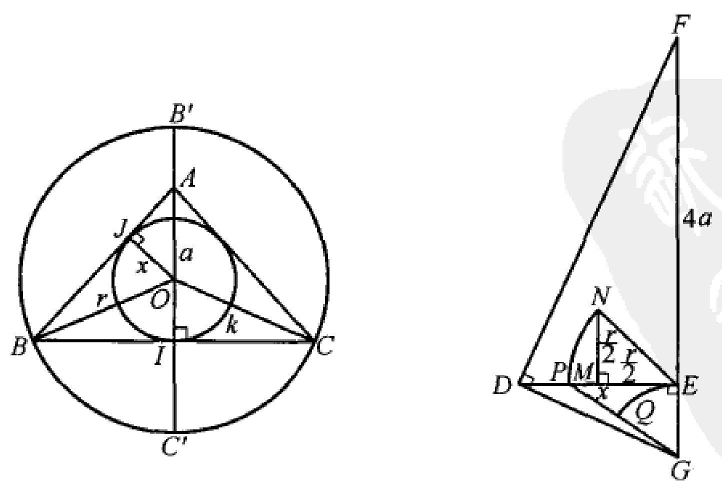


图 549

求作 击 A 连撞台边二次（B 和 C）后复滚过原位置的路线 $ABCA$.

分析 按所要求的条件，BO 及 CO 应该各是 $\angle ABC$ 及 $\angle ACB$ 的平分线. 如果 A,B,C 三点共线，那么这直线必然通过点 O. 所以过 A 作 $\odot O(r)$ 的直径 $B'C'$，路线 $AB'C'A$ 显然是一个解.

现在假定 A,B,C 三点不共线，则 O 为 $\triangle ABC$ 的内心. 可见我们若能作出这三角形的内切圆，问题便解决了. 今以 x 表 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，并令 $OA = a$，$\angle BAC = \alpha$，$\angle ABC = \beta$，$\sin\frac{1}{2}\beta = y$，那么

$$ry = x = a\sin\frac{1}{2}\alpha \qquad ①$$

由于 $OB = OC$，易知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，即 $AB = AC$. 因此

$$\frac{1}{2}\alpha + \beta = 90^\circ$$

从而

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\beta = 1 - 2y^2$$

以之代入 ①，可得方程

$$2ay^2 + ry - a = 0 \qquad ②$$

解 ②，弃其负根，得

$$y = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 8a^2}}{4a}$$

以 y 值代入 ①，即得

$$x = \sqrt{\left(\frac{r^2}{4a}\right)^2 + \frac{r^2}{2}} - \frac{r^2}{4a}$$

根据此式，便可按步作出 x.

作图 在便宜处作线段 $DE = r$. 引 $EF \perp DE$，且取 $EF = 4 \cdot OA = 4a$. 联结 DF，自 D 引线垂直于 DF 而交 FE 的延长线于 G. 求出 DE 的中点 M，引 $MN \perp DE$，并取 $MN = \frac{1}{2}r$. 以 E 为圆心画 $\overset{\frown}{NP}$ 交线段 DE 于 P. 联结 GP，以 G 为圆心画 $\overset{\frown}{EQ}$ 交线段 GP 于 Q.

在 $\odot O(r)$ 中作一同心圆 k，要它的半径等于线段 PQ 那样长. 自 A 向圆 k 引两条切线（射线）设交 $\odot O(r)$ 于 B,C，并联结 BC. 则 $ABCA$ 即所求的路线.

另外，过 A 作 $\odot O(r)$ 的直径 $B'C'$，这 $AB'C'A$ 也是所求的路线.

证明 我们先来计算线段 PQ 的长. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DFG$ 中，有

$$EG = \frac{DE^2}{EF} = \frac{r^2}{4a}$$

又联结 EN,得知

$$EP^2 = EN^2 = EM^2 + MN^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{2}$$

由此

$$GP = \sqrt{EG^2 + EP^2} = \sqrt{\left(\frac{r^2}{4a}\right)^2 + \frac{r^2}{2}}$$

于是

$$PQ = GP - GQ = GP - EG = \sqrt{\left(\frac{r^2}{4a}\right)^2 + \frac{r^2}{2}} - \frac{r^2}{4a}$$

其次要证 BC 与圆 k 相切.命 AB 与圆 k 的切点为 J,及自 B 向此圆所引另一切线的切点为 I.令 $\angle ABI = \beta$,则

$$r\sin\frac{1}{2}\beta = OJ = PQ = r\cdot\frac{-r+\sqrt{r^2+8a^2}}{4a}$$

因得

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{-r+\sqrt{r^2+8a^2}}{4a}$$

此式的右端是方程 ② 的一根,故以 $\sin\frac{1}{2}\beta$ 代 y 时 ② 仍成立,即

$$2a\sin^2\frac{1}{2}\beta + r\sin\frac{1}{2}\beta - a = 0$$

由此

$$r\sin\frac{1}{2}\beta = a\left(1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\beta\right) = a\cos\beta \qquad ③$$

命 $\angle BAC = \alpha$,又知

$$a\sin\frac{1}{2}\alpha = OJ = r\sin\frac{1}{2}\beta \qquad ④$$

比较 ③ 与 ④,可得

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \cos\beta$$

因而

$$\frac{1}{2}\alpha + \beta = 90^\circ$$

这样一来,必然 $BI \perp AO$.但 B,C 关于 AO 对称,可见点 I 落在 BC 上.于是 BC

与圆 k 相切被证明了.

据作图及上面所证,知 O 是 $\triangle ABC$ 的内心,故 $ABCA$ 路线合乎要求.

至于另一条 $AB'C'A$ 路线也合要求,那已是十分明白的.

推究 圆 k 存在显然没有问题,尚须考虑的是 A 点和圆 k 的相互位置.由 $a>0$,知下列不等式成立

$$(4a^2+r^2)^2>r^4+8a^2r^2$$

$$4a^2+r^2>\sqrt{r^4+8a^2r^2}$$

$$a>\sqrt{\left(\frac{r^2}{4a}\right)^2+\frac{r^2}{2}}-\frac{r^2}{4a}$$

末一不等式说明了 A 点必然处于圆 k 的外部.

因知本题永有两题.

§91 正五边形和正五角星

在中学课本上,我们已经知道怎样作正五边形了(§65(36)).大家熟知的作法是这样的:应用黄金分割法先把一个圆周十等分,然后用弦把相间的五个分点顺次联结起来,这样就得到一个正五边形.

把正五边形的五条对角线统通作出来,然后去掉各边,剩下的图形称为正五角星(图550);原来正五边形的对角线,即叫做这个正五角星的边.正五角星是一个非常美丽的图形,我国的国旗和国徽上都镶嵌着灿烂的五角星.

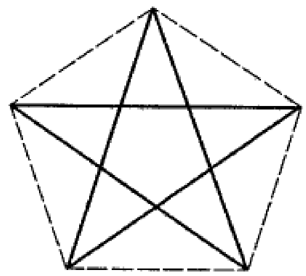


图 550

这个美丽而灿烂的图形,既然象征着祖国的光明多彩和繁荣富强,那么进一步去探求它的更简便的画法便不是无意义的了.下面我们将研究不经过正十边形而直接画出正五边形和正五角星的作图方法.

(1) 在已知圆中作内接正五边形的方法.

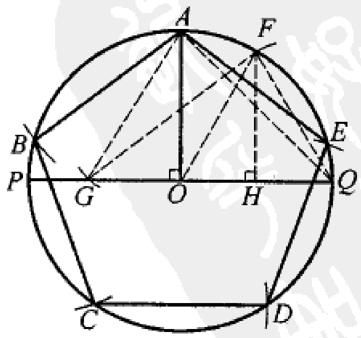


图 551

假设 $\odot O(R)$ 是已知圆(图551).在 $\odot O$ 中,作直径 PQ,又作半径 $OA\perp PQ$.以 Q 为圆心、R 为半径画弧交 $\odot O$ 于 F,再以 F 为圆心画半径等于 QA 的弧交半径 OP 于 G.则 AG 的长即等于 $\odot O$ 的内接正五边形的边长.这样,在 $\odot O$ 中,我们便可直接作出内接正五

边形 $ABCDE$ 来.

什么道理呢?据作图,$\triangle FOQ$ 显然是正三角形,故引 $FH \perp OQ$ 时,垂足 H 必然是 OQ 的中点,而且(§20 定理 132 推论)

$$FH = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

又(§21 定理 133)

$$FG = QA = \sqrt{2}R$$

因此 $$GH = \sqrt{FG^2 - FH^2} = \sqrt{2R^2 - \frac{3}{4}R^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

从而 $$OG = GH - OH = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)R$$

那么

$$AG^2 = OA^2 + OG^2 = R^2 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2R^2 = \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)R^2 =$$
$$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})R^2$$

于是 $$AG = R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

这就证明了上面的作图无误(§21 定理 133).

(2) 知边长作正五边形的方法[①].

假设正五边形 $ABCDE$ 的边 AB 是已知的(图 552). 延长 BA,DE 交于 F. 据 §8 定理 41 推论 2,知

$$\angle FAE = \angle FEA = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

从而

$$\angle AFE = 180^\circ - 72^\circ \times 2 = 36^\circ$$

$$\angle AEB = \angle ABE = \frac{1}{2}\angle FAE = 36^\circ$$

由此 $\triangle BEA \backsim \triangle BFE$,于是

$$\frac{BE}{BF} = \frac{BA}{BE}$$

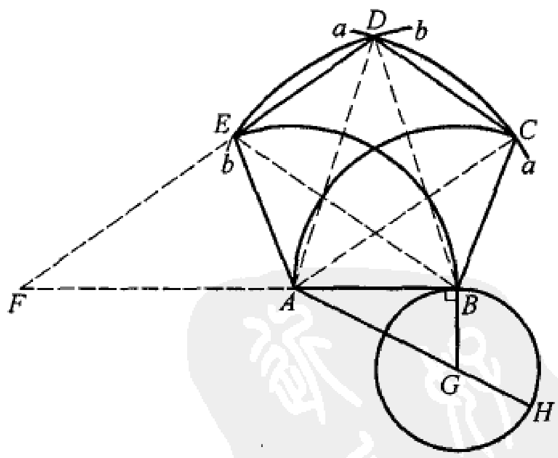


图 552

① 此时虽可用放大法作图,然而这不是简便的方法.

即 $$BE^2 = AB \cdot BF$$

又 $$BE = EF = AF$$

那么 $$AF^2 = AB \cdot BF$$

可见 F 恰是外分 AB 成中外比的分点.因得作图法如下:

引 $BG \perp AB$,且取 $BG = \frac{1}{2}AB$.以 G 为心、GB 为半径作圆.联结 AG 并延长交所作圆于 H.以 A,B 各为圆心画半径等于 AH 的弧 a,b,命它们的交点为 D.以 B 为圆心画$\overset{\frown}{AC}$交 a 于 C;以 A 为圆心画$\overset{\frown}{BE}$交 b 于 E(令 C,D,E 同在 AB 的一侧).则 $ABCDE$ 就是所求的正五边形.

(3) 知边长作正五角星的方法.

假定正五角星 $ABCDE$ 的边 AB 是已知的(图553).命 AB 与 DE 的交点为 F,则因

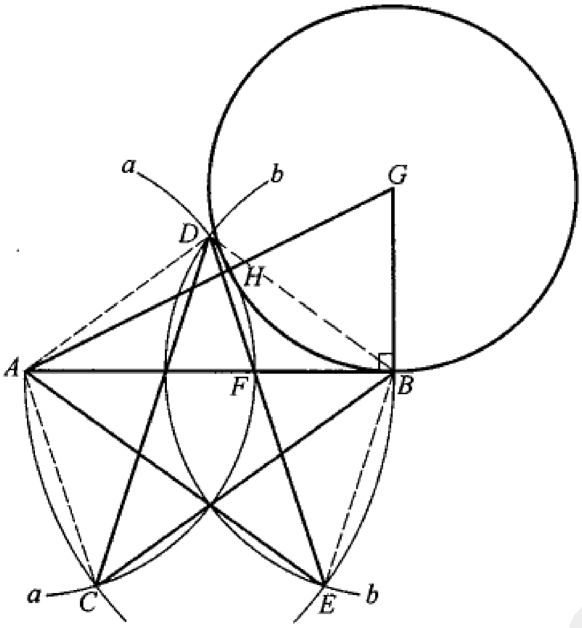


图 553

$$\angle FDB = \angle FBD = \angle FAD = 36°$$

知 $$\triangle BDF \backsim \triangle BAD$$

于是 $$\frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BD}$$

即 $$BD^2 = AB \cdot BF$$

又 $$\angle ADF = \angle AFD = 72°$$

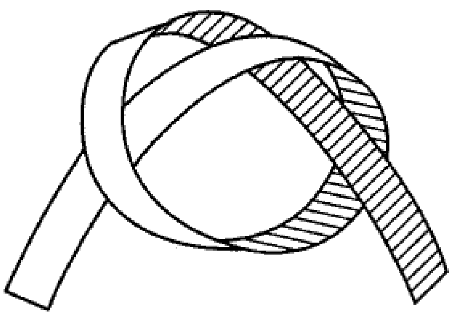
因而 $$AF = AD = BD$$

那么　　$AF^2 = AB \cdot BF$

这就是说，F 是内分 AB 成中外比的分点．由此得作图法如下：

引 $BG \perp AB$，且取 $BG = \frac{1}{2}AB$．以 G 为心、GB 为半径作圆．联结线段 AG 交所作圆于 H．以 A，B 各为圆心画半径等于 AH 的弧 a，b，命它们的交点为 D．以 B 为圆心画 $\overset{\frown}{AC}$ 交 a 于 C；以 A 为圆心画 $\overset{\frown}{BE}$ 交 b 于 E（令 D 与 C，E 分居 AB 的两侧）．则 $ABCDE$ 就是所求的正五角星．

此外，如果我们有一条边缘平行的纸条，用折叠的方法也可以做成一个正五边形．做法极其简单（图 554）：先把纸条打好一个结，然后拉紧压平（但注意不使起皱纹），再裁去多余的部分，剩下的结便成为一个正五边形了．建议读者自己动手做一个，并证明所得的结确是一个正五边形．



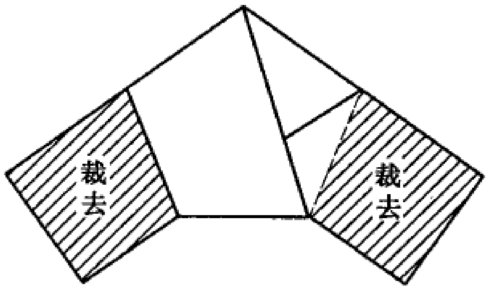


图 554

§ 92　正十七边形

正十七边形的作图，是一个脍炙人口的问题，德国数学家高斯（Gauss，1777—1855）于 1796 年首先发现了它的作法[①]．关于正十七边形的作图方法，已被人们发现了好几种，现在我们采用一个比较浅显的方法来讨论这个图形的作图[②]．

要作正十七边形，无异于要把一个圆周十七等分．为使计算简单起见，我们不妨就单位圆来研究．假设 A_k（$k = 0, 1, \cdots, 16$）依次是单位圆周上的十七个等分点（图 555）．作直径 A_0A，并且把点 A 与其余十六个分点分别连以线段．命

① 这个发现，使得年青的高斯从此坚定了献身于数学研究的意志．他临终遗言以正十七边形刻于他的墓碑上，这事后来在为他所建的纪念碑上果然实现了．

② 这里所用的方法系采自"数学通讯"1954 年 5 月号上所载欧阳琦同志的《正十七边形图法》一文．

$AA_k = a_k$,则显然

$$a_0 = 2$$

$$a_l = a_{17-l} \quad (0 < l \leqslant 16) \qquad ①$$

不难察知,除 a_0 外,其余的 a_l,只要能够求得其中的任何一个,那么问题就可以解决了.这暗示我们,欲解决问题,非得研究诸 a_k 间的关系不可.

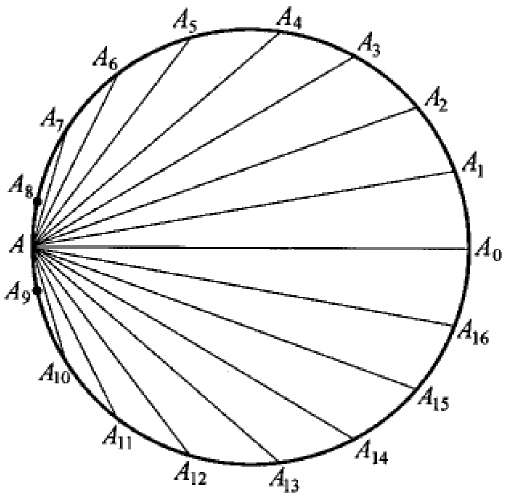


图 555

下面首先证明一个具有一般性的命题,以备引用.

定理 191 设 AA_0 是单位圆的直径,L 是圆上的任一点.若在圆上取三个等弧:$\overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{LN} = \overset{\frown}{A_0L'}$,并命弦 $AL = l$,$AL' = l'$,$AM = m$,$AN = n$,则当:

(1) M,N 分在 AL 的两侧时(图 556(a)),有

$$ll' = m + n$$

(2) M,N 同在 AL 的一侧时(图 556(b)),有

$$ll' = |m - n|$$

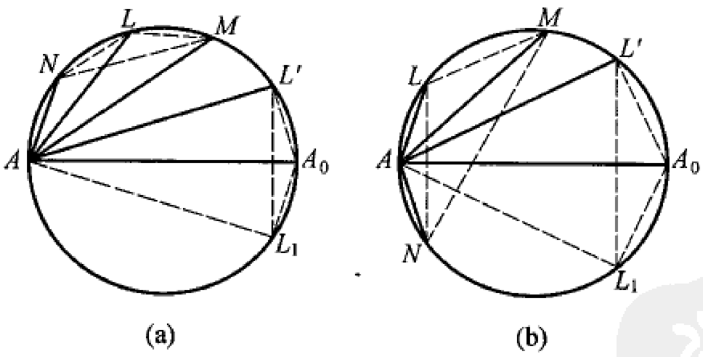


图 556

作出 L' 关于 AA_0 的对称点 L_1.联结 $AL_1, A_0L_1, L'L_1, A_0L', LM, LN, MN$,则 $AL_1 = AL' = l'$,$LM = LN = A_0L' = A_0L_1 = u$,$MN = L'L_1 = v$.根据托勒密定理(§49 例题 54),得知

$$lv = |m \pm n|u, 2l'u = 2v$$

式中的 ± 号,+ 号适于定理 191(1) 的情形,- 号适于定理 191(2) 的情形.将这两式的左右端分别相乘,再约去公因数 $2uv$,即得

$$ll' = |m \pm n|$$

将上定理用于图 555，并注意式①，可以导出下列关系式

(1)

$$a_i a_j = a_{i-j} + a_{i+j} (i \geqslant j, 0 \leqslant i + j \leqslant 8) \quad ②$$

(2)

$$a_i a_j = a_{i-j} - a_{i+j} = a_{i-j} - a_{17-(i+j)} (8 \geqslant i \geqslant j, 9 \leqslant i + j \leqslant 16) \quad ③$$

这是因为 $\overset{\frown}{A_i A_{i-j}} = \overset{\frown}{A_i A_{i+j}} = \overset{\frown}{A_0 A_j}$ 的缘故. 特别地，当 $i = j$ 时，我们将②和③分别写成

(3)

$$a_i^2 = a_0 + a_{2i} = 2 + a_{2i} (0 \leqslant i \leqslant 4) \quad ④$$

(4)

$$a_i^2 = a_0 - a_{2i} = 2 - a_{2i} = 2 - a_{17-2i} (0 \leqslant i \leqslant 8) \quad ⑤$$

由此可得：

(5)

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 = 1 \quad ⑥$$

设令

$$s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8$$

则

$$\begin{aligned} sa_1 = {} & a_1^2 - a_2 a_1 + a_3 a_1 - a_4 a_1 + a_5 a_1 - a_6 a_1 + a_7 a_1 - a_8 a_1 = \\ & (2 + a_2) - (a_1 + a_3) + (a_2 + a_4) - (a_3 + a_5) + (a_4 + a_6) - \\ & (a_5 + a_7) + (a_6 + a_8) - (a_7 - a_8) = \\ & 2 + a_1 - 2(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8) = \\ & 2 + a_1 - 2s \end{aligned}$$

从而 $$s(2 + a_1) = 2 + a_1$$

故 $$s = 1$$

(6)

$$(a_3 + a_5)(a_6 - a_7) = 1 \quad ⑦$$

事实上，由已证的式子，即知

$$\begin{aligned} (a_3 + a_5)(a_6 - a_7) = {} & a_6 a_3 + a_6 a_5 - a_7 a_3 - a_7 a_5 = \\ & a_3 - a_8 + a_1 - a_6 - a_4 + a_7 - a_2 + a_5 = 1 \end{aligned}$$

(7)

$$(a_2+a_8)(a_1-a_4)=1 \quad ⑧$$

仿上,一样推得

$$(a_2+a_8)(a_1-a_4)=a_2a_1+a_8a_1-a_4a_2-a_8a_4=$$
$$a_1+a_3+a_7-a_8-a_2-a_6-a_4+a_5=1$$

有了以上的准备,我们便可以设法求 a_2 和 a_8 的值.设令

$$\left.\begin{aligned}a_2+a_8&=\alpha\\a_2a_8&=a_6-a_7=\beta\end{aligned}\right\} \quad ⑨$$

则 a_2 和 a_8 应是方程 $x^2-\alpha x+\beta=0$ 的根,又设

$$\left.\begin{aligned}a_4-a_1&=\alpha'\\-a_3-a_5&=\beta'\end{aligned}\right\} \quad ⑩$$

那么据 ⑧ 和 ⑦,知

$$\alpha\alpha'=\beta\beta'=-1 \quad ⑪$$

再设

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\alpha'&=a_2+a_8+a_4-a_1=\gamma\\\beta+\beta'&=a_6-a_7-a_3-a_5=\delta\end{aligned}\right\} \quad ⑫$$

于是 α,α' 和 β,β' 便分别是方程 $y^2-\gamma y-1=0$ 和 $z^2-\delta z-1=0$ 的根.由 ⑨ 可知 α 和 β 都是正数,所以

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2+1}\\\beta&=\frac{\delta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2+1}\end{aligned}\right\} \quad ⑬$$

现在的问题在于如何求出 γ,δ 的值,从

$$\delta^2=(\beta+\beta')^2= \quad (由 ⑫)$$
$$\beta^2+\beta'^2+2\beta\beta'=$$
$$(a_6-a_7)^2+(-a_3-a_5)^2-2= \quad (由 ⑨,⑩,⑪)$$
$$a_6^2-2a_7a_6+a_7^2+a_3^2+2a_5a_3+a_5^2-2=$$
$$(2-a_5)-2(a_1-a_4)+(2-a_3)+(2+a_6)+$$
$$2(a_2+a_8)+(2-a_7)-2= \quad (由 ②,③,④,⑤)$$
$$6-2(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8)-$$
$$(a_6-a_7-a_3-a_5)=6-2-\delta \quad (由 ⑥,⑫)$$

得

$$\delta^2 + \delta - 4 = 0$$

但据⑫知 δ 是负的,所以

$$\delta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \tag{14}$$

由⑥和⑫,知

$$\gamma + \delta = -1$$

以⑭代入,可得

$$\gamma = -1 - \delta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \tag{15}$$

这样一来,把⑭,⑮代入⑬即可求得 α 和 β,之后由⑨便能作出 a_2 和 a_8 了(§88 ～ §89).

作图的程序如下:

在单位圆中作直径 $AA_0 = 2$(图557).延长 A_0A 至 B,使 $AB = \frac{1}{4}$.引 $AC \perp AB$,且取 $AC = 1$.联结 BC,那么

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

以 B 为圆心、BC 为半径画弧,交直径 AA_0 于 D,交射线 AB 于 E.这时得到(看⑭,⑮)

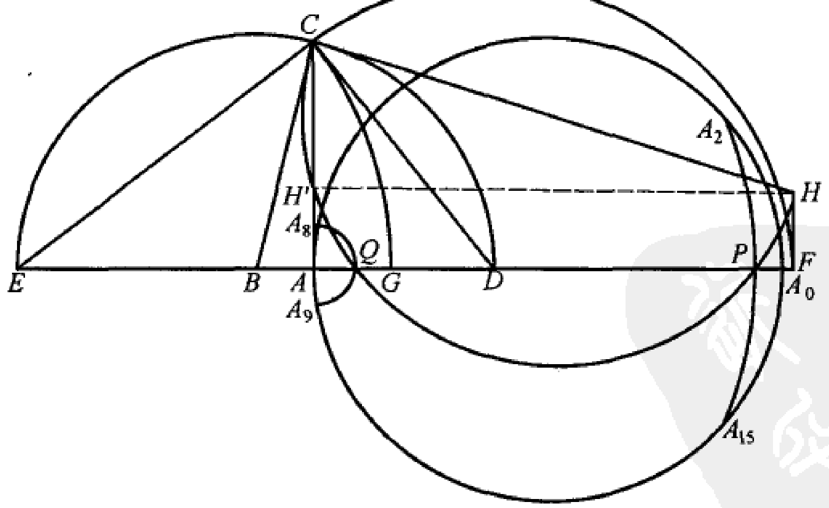


图557

$$AD = BC - AB = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\gamma}{2}$$

$$AE = BC + AB = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{\delta}{2}$$

联结 CD,CE,以 D 为圆心画$\overset{\frown}{CF}$交射线DA_0于 F;以 E 为圆心画$\overset{\frown}{CG}$交射线EA于 G.于是得

$$DF = DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1}$$

$$EG = EC = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + 1}$$

由此可见(看 ⑬)

$$AF = AD + DF = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} = \alpha$$

$$AG = EG - AE = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + 1} + \frac{\delta}{2} = \beta$$

到了这步,如果我们作出方程 $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ 的根,那便是 a_2 和 a_8 了.这利用

⑨很易设计.引 $FH \perp AF$,取 $FH = AG$,且令 H 与 C 同在 AF 的一侧.联结 OH,以之为直径作一半圆交 AF 于 P,Q,设 Q 介于 A,P 之间.若令 H' 是所作半圆与 AC 的交点,则 HH' 连线必垂直于 AC 而平行于 FA.于是由对称的性质,易知

$$AP + AQ = AP + PF = AF = \alpha$$
$$AP \cdot AQ = AC \cdot AH' = 1 \cdot FH = AG = \beta$$

故由 ⑨ 可见

$$AP = a_2, AQ = a_8$$

最后,以 A 为圆心画弧使分别通过 P 及 Q 而交单位圆于 A_2,A_{15} 及 A_8,A_9,这就是十七等分点中的四点.得了这四点,其余各分点便可以陆续作出.

习题 31

1. 什么叫做几何线段关系式的齐次性?
2. 什么叫做代数分析法?它的过程一般有哪几个步骤?
3. 什么叫做造因法?在作图里,我们是否经常用到它?
4. 试指出下列各式有无几何意义:

(1) $\frac{ab^3}{c^4}$　　(2) $\frac{1}{a}$

(3) $\sqrt{a}$　　(4) $abcd$

(5) a^2+bc　　(6) $\frac{1}{ab}-\frac{1}{c^2}$

(7) $\frac{ab}{c}+d$　　(8) $\frac{a^4}{b}+c^2d$

(9) $\frac{\sqrt{a}}{b}+\frac{1}{\sqrt{c}}$　　(10) $a^3+b=cd$

(11) $\frac{a}{b}=\frac{e^2}{d^2}$　　(12) $a\sqrt{b}-b\sqrt{c}=c\sqrt{d}$

(13) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{cd}=0$　　(14) $a-b=1$

(15) $\frac{\sqrt{a}}{b}+\frac{c}{a\sqrt{d}}=2$　　(16) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\frac{cd}{a}$

(17) $\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{c}=\sqrt{d}$　　(18) $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}=\frac{1}{cd}$

式中的 a,b,c,d 均表线段的长度.

5. 已知线段 AB 及 a,b,求作内分 AB 的点 P,使适合下列条件之一:

(1) $\frac{PA}{PB}=\frac{a^2}{b^2}$　　(2) $\frac{PA}{PB}=\frac{a^3}{b^3}$

(3) $\frac{PA}{PB}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$　　(4) $\frac{PA}{PB}=\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$

6. 已知线段 $a,b,c,\cdots$,求作下列各式所表的线段:

(1) $\frac{abc}{d^2}+\frac{e^2}{f}$　　(2) $\sqrt{ab}+\frac{cd^2}{ef}$

(3) $\frac{a^4}{b^3}+\sqrt{c^2-d^2}$　　(4) $\sqrt{a^2+bc}$

(5) $\frac{a^3+b^3}{cd+ef}$　　(6) $\frac{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}{\sqrt{e}+\sqrt{f}}$

(7) $\frac{ab\sqrt{c}+ac\sqrt{b}}{\sqrt{abc}}$　　(8) $\sqrt[4]{abcd}$

(9) $\sqrt[4]{a^4-b^4}$　　(10) $\sqrt[4]{a^4+b^4}$

(11) $\sqrt{a^2\sqrt{2}-b^2\sqrt{3}}$　　(12) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$

7. 设 A,B 是已知直线 l 上的两定点.在 l 上求一点 P,使合于 $AP^2=2BP^2$.

8. 已知两直线 a,b 及线外一点 P,求过 P 作一直线交 a,b 于 A,B,使得 $AP^2=AB\cdot BP$.

9. 已知 $\odot O$ 及不在这圆上的一点 P,求过 P 作一直线交 $\odot O$ 于 A,B,使得

$AP^2 = AB \cdot BP$.(视 P 在 $\odot O$ 的内外而分别研究.)

10.已知一直角扇形 OAB 及一圆 $\odot A(AO)$.求作一圆,使切于 $\odot A$ 及直角扇形的半径 OB,并且圆心落在直角扇形的弧$\overset{\frown}{AB}$ 上.

11.已知 $\odot O(r)$ 及不在这圆上的一点 P,求过 P 作一直线l,使合于 $PA^2 + PB^2 = 2r^2$,其中 A,B 是直线 l 与 $\odot O$ 的公共点.

12.已知一圆 $\odot O$,一直线 l,一点 P.在 $\odot O$ 中求作一弦 AB,使 $AB \parallel l$ 且 $\angle APB = 90°$.

13.过定圆内一已知点求作互相垂直的两弦,使四端点连成的凸四边形有一定的面积.

14.已知对角线的长,求在定半圆形中作内接矩形.

15.已知矩形 $ABCD$,求作一直线平行于 AB 而交 AD,BC 两边于 E,F,使分得的两个矩形 $ABFE$ 与 $FCDE$ 彼此相似(它们的顶点按着所写的顺序对应).

16.已知三角形两底角均非钝角,求作面积一定的矩形,使它有一边落在已知三角形的底边上,其他两顶点分别落在两腰上.

17.已知三角形 $\triangle ABC$,求作一直线交于 AB,AC 两边,而把 $\triangle ABC$ 的面积及周长同时平分.

18.求作一三角形,使与一已知三角形相似,且与另一已知三角形等积.

19.已知两相交直线及线外一点,求过此点作一直线,使与两已知直线交成的三角形有一定的面积.

20.给定一梯形,求作两直线同平行于梯形的底边,且三等分梯形的面积.

21.已知勾股的和及勾弦的和,求作直角三角形.

22.已知勾股的和及弦的高,求作直角三角形.

23.已知勾股的差以及弦与弦高的和,求作直角三角形.

24.分别已知半径,求作两圆,使它们的外公切线长恰等于内公切线长的 2 倍.

25.以共线三点分别为心作圆,使两两均相切,但不是同切于一点.

26.在已知三角形内求作共点的三条等长线段,使它们分别平行于三角形的三边,且端点分别落在各边上.(提示:应用复习题 3 第 94 题.)

27.已知边长,求作正十边形.(不用放大法.)

28.求作下列边数的正多边形:

(1)51 边　　(2)85 边　　(3)255 边

第八节　尺规作图不能问题

§93　尺规作图可能性的准则

我们在前面(§88)已经证明这样的线段 x 是可以用尺规作图的

$$x = \Omega(a_1, a_2, \cdots, a_m)$$

这里的 a_i 是已知线段，Ω 是仅含有限次的有理运算及开平方的一次齐次式，并且假定 Ω 在其定义域中能取得实值. 但是倒过来问，凡能用尺规作图的线段，是不是一律可以表为这样形式的一次齐次式呢？这是尺规作图能力大小的问题，要给以回答，实非初等几何本身能力所及，正好比一个人不能自举其身一样. 因此，我们将要借助于解析几何的道理来回答这个问题.

现在应该回忆一下，究竟尺规具有什么功能. 前面(§64)说过，我们假定亦仅假定这两个工具胜任下列五个认可的基本作图：

(1) 通过两个已知点作直线；

(2) 两已知直线若是相交的话，定出它们的交点；

(3) 以已知点为心作半径等于已知长的圆(此处的"已知长"或指给定线段的长，或指两个已知点间的距离)；

(4) 一已知直线和一已知圆若是有公共点的话，定出它们的公共点；

(5) 两已知圆若是有公共点的话，定出它们的公共点.

任何能够仅用尺规来完成的作图，无论它怎样复杂，都不外乎反复施行上述五法(或一部分)至有限次而已. 基于尺规的这种功能，我们立得如下的一个断语：

"一个作图题可否仅用尺规来解，即视其能否反复用(1)～(5)五法至有限次来完成作图以为断."

这就是尺规作图可能与不能的最基本的解释.

了解了这点之后，为了要回答我们所提出的问题，还须要把上述五法设法用代数解析式表达出来. 这事借助于解析几何学便很容易实现.

我们先来看通过两个已知点的直线. 大家都知道，在直角坐标系里，通过两个已知点 $P(a,b)$ 和 $Q(c,d)$ 的直线，它的方程是

$$\frac{x-a}{c-a} = \frac{y-b}{d-b}$$

也可以改写成如下的形式

$$Ax + By + C = 0 \quad ①$$

显然,① 的系数都是仅含已知数 a,b,c,d 的有理整函数,即

$$A = d - b, B = a - c, C = bc - ad$$

其次看两已知直线的交点.这时可假定另一条直线

$$A'x + B'y + C = 0 \quad ②$$

不与直线 ① 平行.联立解 ① 和 ②,即得这两条直线的交点的坐标为

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}, y = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B}(AB' - A'B \neq 0)$$

二者都是仅含 ①,② 的系数的有理函数.

第三看关于圆的情形.设以已知点 $S(e,f)$ 为心,作一个半径等于已知长 r 的圆,则它的方程是

$$(x - e)^2 + (y - f)^2 = r^2$$

亦即

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ③$$

其中系数

$$D = -2e, E = -2f, F = e^2 + f^2 - r^2$$

都是仅含已知数 e,f,r 的有理整函数.万一 r 是表两个已知点 $P(a,b)$ 和 $Q(c,d)$ 间的距离,那么 r 的表达式

$$r = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

也不过含有有理运算及开平方.

第四看一已知直线和一已知圆的公共点.试把 ① 和 ③ 联立起来,当消去 y 后,将得到一个关于 x 的二次方程,解之可得

$$x = p \pm q\sqrt{s}(s \geq 0)$$

因而

$$y = p' \pm q'\sqrt{s'}(s' \geq 0)$$

这就是直线 ① 与圆 ③ 的公共点的坐标,其中 p,q,s 及 p',q',s' 都是仅含 A,B,C,D,E,F 的有理函数.

最后看两已知圆的公共点.这实际上可以化为上一情形.今设有另一已知圆

$$x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0 \quad ④$$

由 ③ 减 ④,得

$$(D - D')x + (E - E')y + F - F' = 0 \quad ⑤$$

此即圆 ③ 与圆 ④ 的等幂轴的方程. 故 ③ 与 ④ 的公共点和 ③ 与 ⑤ 公共点实同.

从以上的代数解析式看来,明示着(1) ~ (5) 五个基本作图所能产生的数都不外是由若干已知数经过有限次的有理运算及开平方而得到的. 当我们卧尺旋规从事作图的时候,不过是反复利用五个基本作图法由已知点产生新点,点复生点,直至获得要求的点而止. 由此可见表示最后所求点的坐标的数,必不逸出刚才所说的那种数的范围之外. 这就是说:凡可用尺规作图的线段 x,只能表为

$$x = \Omega(a_1, a_2, \cdots, a_m)$$

其中 a_i 是已知线段,而 Ω 是仅含有限次的有理运算及开平方的一次齐次式.

于是我们开始提出的问题至此完全解决了,因而得到一个关于尺规作图可能性的准则如下:

"一个作图题中必须求出的未知量,如果能够由若干已知量经过有限次有理运算及开平方而算出时,并且只有这时,这个作图题可得仅用尺规来完成作图. 一旦题中必须求出的未知量的表达式所用到的运算法则超出了所说的范围,那么这个作图题的作图必非尺规所能为力".

根据这个准则,关于尺规作图的可能与不能固然有法判别了,但是光靠这个准则还是会遇到很多困难的,因为它并没有把处理不能问题的平坦易行的道路指示出来. 因此,为了说明几个著名的作图不能问题,我们将先研究一下有关方程的一些简单性质.

§94　方程的根与系数间的关系

假设 $x_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是下面方程的根

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0(a_0 \neq 0) \quad ①$$

那么

$$\begin{aligned} f(x) \equiv\ & a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = \\ & a_0x^n - a_0(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} + \\ & a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - \\ & a_0(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} + \cdots + \\ & (-1)^na_0x_1x_2\cdots x_n \end{aligned} \quad ②$$

当 $n = 2$ 时,式 ② 显然成立,据此应用数学归纳法易证 ② 对于任何的 n 均成

立.比较 ① 和 ② 的系数,即得下述问题:

定理 192 设 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是方程 ① 的根,则诸根的和等于 $-\frac{a_1}{a_0}$;两两取二根的积加之,其和等于$\frac{a_2}{a_0}$;三三取三根的积加之,其和等于 $-\frac{a_3}{a_0}$;余类推,最后所有根的积等于 $(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$.

就特殊情形来说,如果 ① 是整系数方程,并且有有理根,那么这时我们将得到一个很有用的命题如下:

定理 193 设方程 ① 具有整系数,且有有理根$\frac{p}{q}$,p 与 q 是互素的整数,则 p 必是 a_n 的约数,而 q 是 a_0 的约数.

事实上,将$\frac{p}{q}$ 代 ① 中的 x 后,再以 q^n 遍乘各项,则得

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0$$

 由此式,知

$$\frac{a_nq^n}{p}=-(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}q^{n-1})$$

及

$$\frac{a_0p^n}{q}=-(a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1})$$

都是整数;但 p 与 q 互素,故 p 必能整除 a_n,而 q 也能整除 a_0.

推论 设最高次项系数为1的整系数一元 n 次方程含有有理根,则此根必是整数且为常数项的约数.

注 在应用上,这推论远较定理 193 简便.故若遇着最高次项的系数不等于1的方程,应设法变化它的形式,务使最高次项的系数等于1为佳.例如,在整系数方程 ① 中,假定 $a_0\neq 1$,以之除原式,可得

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}=0$$

设$\frac{\gamma}{m}$ 是此方程的一根,m 是一整数,以$\frac{\gamma}{m}$ 代 x,则

$$\frac{\gamma^n}{m^n}+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{\gamma^{n-1}}{m^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{\gamma}{m}+\frac{a_n}{a_0}=0$$

以 m^n 遍乘各项,得

$$y^n+\left(\frac{a_1}{a_0}m\right)y^{n-1}+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}m^{n-1}\right)y+\left(\frac{a_n}{a_0}m^n\right)=0$$

于是可用观察法选择适当的 m,使这新方程的系数均为整数.原方程 ① 的根,即为这个新方程的根的$\frac{1}{m}$.

§95　三次方程的根

欲验一个三次方程的根是否能仅用尺规作图,本来可以直接把根求出,而后根据尺规作图可能性的准则(§93)去下判断.但是要解一个三次方程,一般说来,手续很不简单,所以直接求根并不是一个好办法.现在为求一劳永逸计,我们要从别的途径来讨论三次方程的根在什么条件下仅用尺规不能作图,以便今后凡遇到同类的问题都能够迎刃而解.

下一命题是我们讨论的焦点:

定理 194　设有理系数的三次方程

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0 \qquad ①$$

有一个实根是 x_1,而长度等于 $|x_1|$ 的线段能从各系数出发仅凭尺规来作图,则 ① 至少有一个有理根.

如果 x_1 本身就是有理数,那么定理已经证明了.

现在假定 x_1 是无理数.按题设,则据 §93 所论,x_1 只能是由已知数 A,B,C,D 经过有限次的有理运算及开平方而得出.因 A,B,C,D 都是有理数,故 x_1 内除含实平方根数外,不再含有其他的无理数.

把 x_1 的表达式化为其根式不能用同层或低层根式有理地表出的最简式后,设 x_1 内最高含有 n 层平方根式,以$\sqrt{k}$ 表示此类平方根式之一,则

$$x_1=\frac{a+b\sqrt{k}}{c+d\sqrt{k}}$$

其中 a,b,c,d 不含$\sqrt{k}$,但可含其他 n 层或低层平方根式.按此规定,必然 $c-d\sqrt{k}\neq0$,以之同时乘上式右端的分母分子,可得

$$x_1=e+f\sqrt{k}(f\neq0) \qquad ②$$

其中 $e=\frac{ac-bdk}{c^2-d^2k},f=\frac{bc-ad}{c^2-d^2k}$ 均不含$\sqrt{k}$.

既然 ② 是方程 ① 的一根,则以之代 ① 的 x,应有

$$A(e+f\sqrt{k})^3+B(e+f\sqrt{k})^2+C(e+f\sqrt{k})+D=E+F\sqrt{k}=0 \qquad ③$$

其中 E 及 F 都是仅含 A,B,C,D,e,f,k 的有理整函数. 此时若 $F\neq 0$, 势需 $\sqrt{k}=-\frac{E}{F}$, 但这是不可能的, 故必 $F=0$, 因而 $E=0$.

当以 $e-f\sqrt{k}$ 代 ① 的 x 时, 实无异于在 ③ 的首端中换 $\sqrt{k}$ 为 $-\sqrt{k}$, 故所得结果应为 $E-F\sqrt{k}$. 这结果显然等于零, 因为我们已知 $E=F=0$. 由此可见

$$x_2=e-f\sqrt{k} \qquad ④$$

实是方程 ① 的一个新根.

知道了方程 ① 的两个根 x_1 和 x_2, 据 §94 的定理 192 即可求得 ① 的第三个根为

$$x_3=-\frac{B}{A}-x_1-x_2=-\frac{B}{A}-2e \qquad ⑤$$

⑤ 中的 $\frac{B}{A}$ 是有理数, 假如 e 也是有理数的话, 则 x_3 即为 ① 的有理根, 而我们的证明即告完成.

现在使用反证法, 假设 e 是无理数. e 是组成根 ② 的一部分, 它所含的无理

数都是实平方根数, 故同前理, 可书 $e=e'+f'\sqrt{s}$, 其中 $\sqrt{s}$ 是 e 内的最高层平方根式之一. 于是, ⑤ 得改写为

$$x_3=g+h\sqrt{s}$$

式内的 g 及 h 均不含 $\sqrt{s}$. 这样一来, 本着求得 ④ 的同样论证, 可知 $g-h\sqrt{s}$ 又是方程 ① 的一个根, 且与 x_3 不同. 然而 ① 只有三个根, 故 $g-h\sqrt{s}$ 非 x_1 即 x_2. 这就是说

$$g-h\sqrt{s}=e\pm f\sqrt{k}$$

由此

$$\sqrt{k}=\pm\frac{g-e-h\sqrt{s}}{f}$$

这个式子意味着 $\sqrt{k}$ 用同层或低层的平方根式有理地表出, 因而和我们当初对 $\sqrt{k}$ 的规定矛盾. 故 e 只能是有理数.

为着便于应用, 我们通常又把上定理改叙成它的反申命题的形式:

定理 195 有理系数的三次方程如果没有有理根, 那么长度等于它的任何实根的线段不能仅凭尺规来作图.

§96 几何三大问题

约 2 400 多年前在希腊盛传着下列三个作图题:

立方倍积问题 求作一立方体,使它的体积 2 倍于一已知立方体的体积.

三等分角问题 求作三等分一已知角.

化圆为方问题 求作一正方形,使它的面积等于一已知圆的面积.

这三个作图题是著名的古典难题,向被称为几何三大问题.当时许多有名的希腊学者,都曾致力于这三个问题的研究,虽然借助于别的工具或曲线他们可以轻易地把问题解决了,但是仅用尺规如何作图却始终没能如愿以偿.从表面来看,这三个问题都很简单,它们的作图似乎该是可能的,因此 2 000 多年来从事几何三大问题的研究颇不乏人.然而绞尽了不少人的脑汁,经过了无数次的尝试,结果都失败了.后来人们悟及正面的结果既然无望,便转而从反面去怀疑这三个问题是不是根本就不能仅用尺规来作图.这个怀疑启发了人们的思想.至 1837 年,旺策尔(Wantzel,1814—1848)首先证明前二者均属尺规作图不能问题;1882 年,林德曼(Lindemann,1852—1939)证实 π 的超越性,于是末者不能仅用尺规作图也就随着定案.从此这件著名的古典难题公案便宣告结束.如果今日还有人不信而仍然在作无益的尝试,那么注定他一定徒劳无功的.

下面我们分别说明这三个问题为什么不能仅用尺规来作图.

第一,关于立方倍积问题.假设已知立方体的棱长为 a(图 558),所求立方体的棱长为 x,那么按设定条件应有

$$x^3 = 2a^3$$

的关系.所以本题实际是求作满足下面方程的线段 x

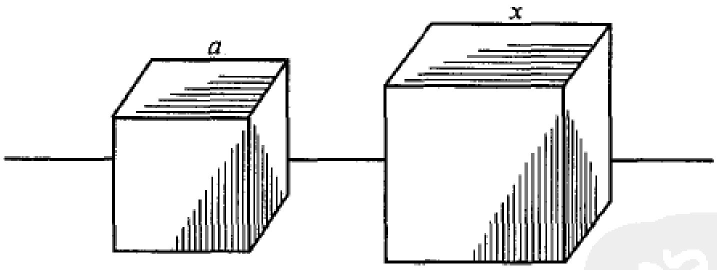


图 558

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

令 $a = 1$,则此方程将变为更简单的形式

$$x^3 - 2 = 0 \qquad ①$$

根据 §94 定理 193 的推论,如果方程 ① 含有有理根的话,不外是 ± 1 和 ± 2,但代入试验均不合,可见 ① 必无有理根.于是由 §95 的定理 195 知方程 ① 的任何实根不能仅用尺规作图,因而立方倍积问题属于尺规作图不能问题.

方程 ① 的判别式①

$$\Delta = -180 < 0$$

故 ① 有一个实根及两个虚根. 这说明所求的立方体是唯一存在的,只是不能仅用尺规来作图罢了.

第二,关于三等分角问题. 设 $\angle XOY$ 是已知角(图 559), OP, OQ 是它的三等分线: $\angle XOP = \angle POQ = \angle QOY$. 在这两条三等分线中,只要能求得任何一条,另一条便不成问题. 所以但研究其中一条例如 OP 即可. 令 $\angle XOY = \theta$, 则 $\angle XOP = \dfrac{\theta}{3}$. 根据三角恒等式,有

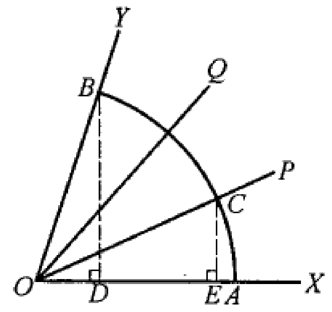


图 559

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

以 O 为圆心,单位长为半径画弧交射线 OX, OY, OP 于 A, B, C, 引 $BD, CE \perp OX$ 于 D, E. 命 $\overline{OD} = a, \overline{OE} = x$, 则 $a = \cos\theta, x = \cos\dfrac{\theta}{3}$, 以之代入上面的三角形恒等式,移项后得

$$4x^3 - 3x - a = 0 \qquad ②$$

如果能证方程 ② 的根一般不能仅用尺规作图,则点 E 不可得,于是射线 OP 也就不能作出了. 欲证明这事,但择一个特例考之即足. 试取 $\theta = 60^\circ$, 则 $a = \dfrac{1}{2}$, 此时得到 ② 的一个特例如下

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

以 $x = \dfrac{1}{2}y$ 代入此方程,可得到较简的形式

$$y^3 - 3y - 1 = 0 \qquad ③$$

方程 ③ 显然没有有理根,因为 ± 1 不能满足它. 可见 ③ 的任何实根不能作图,即是 60° 的角不可能三等分. 三等分 60° 的角尚且不可能,更不消说三等分任意角了,所以三等分角的不可能可以无疑.

当然,这结论是指一般情形而言,假若 θ 等于某些特别值,则作图未始不可能. 例如,当 $\theta = 90^\circ$ 时,便有 $a = 0$, 此时 ② 变为

$$4x^3 - 3x = 0$$

---

① 三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的判别式为 $\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$.

解之,得

$$x = 0 \text{ 或 } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

其中 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 就是我们所要的解.关于它的作图法是我们所熟知的.

由于方程 ② 的判别式

$$\Delta = 432(1 - a^2) \geqslant 0(|a| \leqslant 1)$$

知 ② 有三个实根;这三个实根分别对应于 $\theta, 2\pi + \theta, 4\pi + \theta$ 三种角的一条三等分线.故任意角的三等分线虽然不能仅用尺规作图,但这并不意味三等分线不存在.

第三,关于化圆为方问题.假定已知圆的半径为 r(图 560),所求正方形的边长为 x,则按条件,有

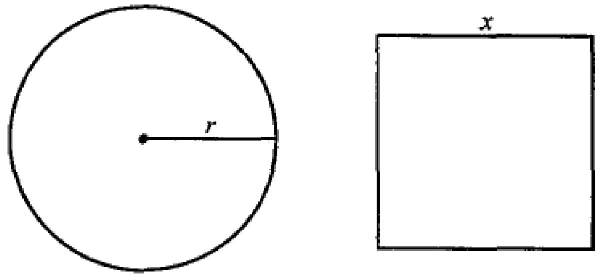


图 560

$$x^2 = \pi r^2$$

令 $r = 1$,即得

$$x = \sqrt{\pi}$$

这就是说,要我们作一条线段 x,使它的长度恰为$\sqrt{\pi}$.这条线段,其存在虽属无可置疑,但 π 既是超越数,自然不是有理系数的代数方程的根,更不是加减乘除开平方所可表示,故本题必不可能仅用尺规作图.

§97 作图不能问题的间接判断法

尺规作图所能达到的数域,对所有数域说来,不过沧海一粟而已,因此不能仅用尺规作图的问题,实在多得不可胜数.既然作图不能问题如此之多,要我们逐一辨别,确是一件非常艰难的工作.当我们乍见一个很生疏的问题时,说它能够作图嘛,平时却未想过它的解法;说它不能作图嘛,一时又不易建立所需的方

程,即使方程建立了,往往因为次数很高,简直无法判断.这种情况,几乎是随时会遇到的.那么为着减少困难(哪怕一星半点也好),对于一些普通的问题,通晓解题的技巧,自然是必要的了.

对于作图不能问题,普通有两个间接判断法,也可以说是解题的两条捷径:

(1) 有的问题,在估计到它大概属于不能作图的范围后[①],应审察它是否与已知的作图不能问题有所关联,一旦发现当前的问题可以归结为已知的作图不能问题时,则可断定该题也不能作图.

例题 123 在已知圆中,求作内接等腰三角形,使一腰的高落在一条定弦上.

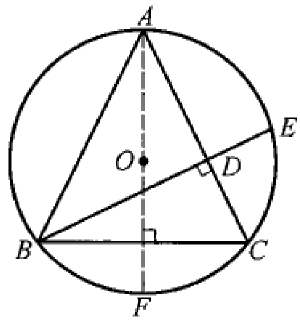


图 561

解 假设 $\odot O$ 是已知圆(图 561),BE 是定弦.命所求内接三角形为 $\triangle ABC$,其中 $AB = AC$,且腰 AC 的高 BD 落在 BE 上.

作直径 AF,则易知

$$\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FC}$$

再因 $AF \perp BC$ 且 $BE \perp AC$,知 $\angle FAC = \angle CBE$,所以

$$\overset{\frown}{FC} = \overset{\frown}{CE}$$

这样一来,便有

$$\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FC} = \overset{\frown}{CE}$$

而 $\overset{\frown}{BE}$ 被三等分了.

我们知道,三等分一已知圆弧与三等分一已知角没有本质的区别,三等分已知角既属不能,三等分已知弧自亦不能.由此可见本题一般不能仅用尺规作图.

(2) 有时对问题的通例求解,既繁且难,而取其特例考之则简易甚多.因此欲决定某题属于作图不能问题时,不妨相机证明它的特例不能作图,特例既经证实,通例的不能作图,便不言而喻了.这是解作图不能问题的一种常用的办法,例如在 §96 中解决三等分角问题时就曾用过.

但是需要注意,如果发现特例能够作图,却不能遽以断定通例必能作图.

例题 124 已知三角的平分线,求作三角形.

解 设 $\triangle ABC$ 是所求三角形,它的三条平分角线 $AD = t_1, BE = t_2, CF =$

① 这大概是在我们千方百计地去作图而遭到失败的时候,不由得兴起是想.但在有经验的人,他也许很快就会想到.

t_3 均为已知长.

现在假定 $t_2 = t_3$(图 562),那么 $AB = AC$(§31 例题 4).自 $\triangle ABC$ 的内心 I 引 $IM \perp AC$ 于 M,则 $ID = IM = r$,命 $\angle IBD = \theta$,易知 $\angle AIM = 2\theta$,$\angle IEA = 3\theta$.由此

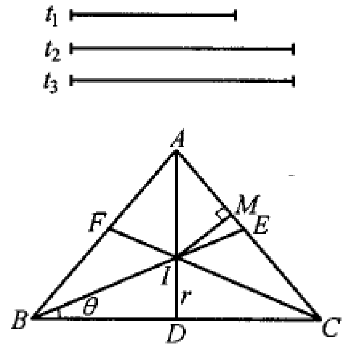


图 562

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{BE}{AD} = \frac{BI + IE}{AI + ID} = \frac{r(\csc\theta + \csc 3\theta)}{r(\sec 2\theta + 1)} = \frac{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin 3\theta}}{\frac{1}{\cos 2\theta} + 1} = \frac{\cos 2\theta(\sin 3\theta + \sin\theta)}{\sin 3\theta \sin\theta(1 + \cos 2\theta)}$$

以 $\frac{t_2}{t_1} = k$,$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 及 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ 代入上式的首末端,得

$$k = \frac{2 - 4\sin^2\theta}{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}$$

即

$$4k\sin^3\theta - 4\sin^2\theta - 3k\sin\theta + 2 = 0$$

设令 $\sin\theta = \frac{x}{2k}$ 代入,那么变为

$$x^3 - 2x^2 - 3k^2x + 4k^2 = 0$$

更设 $k = \sqrt{2}$,则得

$$x^3 - 2x^2 - 6x + 8 = 0$$

试以 8 的约数 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ 代入此方程的 x 验之,均不合,可见此方程必无有理根.因而本题一般不能作图可以断言.

§98　等分圆周问题

正多边形的作图,亦即等分圆周问题,自古以来就一直吸引着人们.古希腊时代,人们早就会用尺规作出 3,4,5,6,10,15 等边数的正多边形,但是企图作正七边形或正九边形却终归失败.于是后来人们不由得兴起这样的一种观念,即并非任何一个正多边形都是能用尺规来作图的.然而怎样判断一个正多边形能不能作图呢?这个问题到 1801 年才由高斯给出定论.高斯当时证明了下面出色的命题:

定理 196 仅用尺规把圆周 n 等分，当且仅当 n 是如下形状的整数时才可能：

(1) $n = 2^m$;

(2) $n = p = 2^{2^t} + 1$，且 p 是素数；

(3) $n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_k$，$p_k$ 是 $2^{2^t} + 1$ 型的素数且各不相同.

根据这个定理，关于仅用尺规等分圆周的可能性问题便最后地得到圆满地解决了．但是这并不是说其中什么问题都已完全解决，事实上这里面还有一些技术问题如作图方法和如何判断 $2^{2^t} + 1$ 型的数是素数仍然是很艰难的问题呢.

边数不超过 100 的正多边形，其中可能作图的如表 12 所示.

表 12

n 的形状	用尺规能作的正多边形的边数
2^m	4,8,16,32,64
$2^{2^t} + 1$	3,5,17
$2^m p_1 p_2 \cdots p_k$	6,12,24,48,96 10,20,40,80, 34,68, 15,30,60 51 85

总计能作的不过二十有四个，其余 74 个均不能作图.

比较有趣的是 $n = p = 2^{2^t} + 1$ 时的情形．当 $t = 0,1$ 时，则 $n = 3,5$，而正三角形和正五边形正是古人早已晓得作图的．当 $t = 2$ 时，则 $n = 17$，关于正十七边形的作图，前面（§92）也曾有所述及．当 $t = 3,4$ 时，则 $n = 257,65\ 537$，这两个数都是素数．正 257 边形的作图于 1832 年为里歇洛（Richelot，1808—1875）所完成；正 65 537 边形的作图经赫姆斯（Hermes）费了十年工夫才作成功，据说他的手稿可以装满一个手提箱哩.

$p = 2^{2^t} + 1$ 型的数叫做费马数，从前费马曾经误认为这样的数都是素数．后来欧拉于 1732 年发现 $t = 5$ 时 p 有因数 641．此后人们陆续发现 $t = 6,7,8,9,10,11,12,15,16,18,23,36,38,73$ 时所对应的 p 均非素数，其中 $t = 12,23$ 所得的 p 各有因数 114 689，167 772 161 是著名的俄罗斯数学家别尔乌辛（Первумин）发现的．当 t 等于其他数时所对应的 p 是不是素数，现在还不知道.

最后,我们来讨论一下关于正七边形和正九边形的作图问题.本来,7和9两数,前者虽是素数但非费马数,后者有重复的因数3,均不合高斯定理(定理196)的条件,这已注定正七边形和正九边形必不能仅用尺规作图了.可是高斯定理的一般性的证明却远远超出本课程的范围,因此现在改用比较初等的方法来说明这两种正多边形所以不能作图的缘故.

先看正七边形.实际上,正七边形的作图可以归结于 $\theta = \frac{2\pi}{7}$ 的角的作图(图563).因 $3\theta = 2\pi - 4\theta$,故

$$\cos 3\theta = \cos 4\theta$$

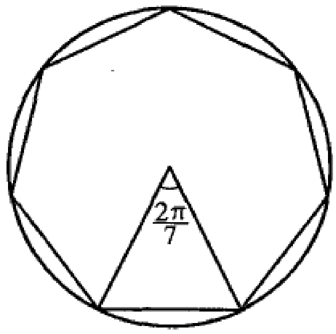


图563

根据三角恒等式,有

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

由此

$$8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0$$

以2乘此式后,即以 $\cos\theta = \frac{x}{2}$ 代入,则变为

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$$

分解因式,得

$$(x-2)(x^3 + x^2 - 2x - 1) = 0$$

若 $x - 2 = 0$,则 $\cos\theta = 1$,此时 $\theta \neq \frac{2\pi}{7}$,不合;故必

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

由试验,知 ± 1 不能满足这方程,可见这方程无有理根.那么正七边形不能作图可以断言了.

次看正九边形.假设 $ABCDEFGHK$ 是正九边形(图564).命 BF 与 AC 的交点为 P,则见

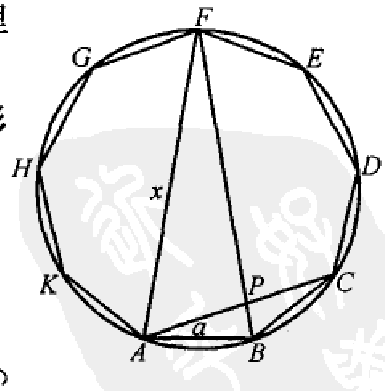


图564

$$\angle BAP = \angle AFB = 20^\circ$$

$$\angle FAB = \angle FBA = \angle APB = 80^\circ$$

$$\angle PAF = 80^\circ$$

令 $AB = AP = a, AF = BF = x$,那么由 $\triangle ABP \backsim \triangle FAB$,得

$$BP = \frac{a^2}{x}$$

从而

$$PF = x - BP = x - \frac{a^2}{x}$$

又应用余弦定律于 $\triangle APF$,有

$$PF^2 = AP^2 + AF^2 - 2AP \cdot AF \cdot \cos 60°$$

于是

$$\left(x - \frac{a^2}{x}\right)^2 = a^2 + x^2 - ax$$

简化后,为

$$x^3 - 3ax^2 + a^3 = 0$$

设令 $a = 1$,则得

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

以 ± 1 代入此方程的 x 验之,均不合,可见此方程无有理根,这说明了 x 必不能仅用尺规作出.于是正九边形不能作图可以无疑.

此外,作正九边形和作40°的角实质上是一样的问题,如果我们从这个角度来看,正九边形作图的不可能性便是当然的.因为我们前面(§96)已经证明过不能仅用尺规三等分60°的角,那么40°的角一定不能作出.

习 题 32

1. 试述尺规作图"可能"与"不能"的意义.
2. 试述尺规作图可能性的准则.
3. 什么叫做几何三大问题?已经解决了没有?
4. 对于作图不能问题,普通有哪两个间接判断法?
5. 边数在100以内的正多边形,有哪几个是可以用尺规作图的?
6. 求作一立方体,使它的体积3倍于一已知立方体的体积.
7. 求作一立方体,使它的体积等于一已知立方体的体积之一半.
8. 已知勾股的立方比及弦长,求作直角三角形.
9. 已知线段 a,b,求作线段 x,y 使合于 $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.(希波克拉底问题)
10. 已知直角 $\angle BAC$,在直线 AC,AB 上各求一点 X,Y,使得 $BX \parallel CY$ 且 $BX \perp XY$.(提示:应用上题.)
11. 设 a 是通过 $\odot O$ 中心的定直线,b 是 $\odot O$ 的定切线,求作直线 c 切 $\odot O$ 于 C,交 a,b 于 A,B,使 C 恰是 AB 的中点.
12. 已知一圆及两直线,求作一直线切于已知圆而与两已知直线相交,使切点是两交点间线段的中点.

13.设 AB 是半圆形的直径,E 是半圆上一定点,求过 E 作一直线交直线 AB 于 C,交半圆于 D,使 $CD = \frac{1}{2}AB$.

14.设 AB 是 $\odot O$ 的定直径,E 是 $\odot O$ 上一定点,求作一非直径的弦 ED,使交直径 AB 于 C,而有 $CD = OA$.

15.已知一圆及一直线,求过圆上一定点作一直线与已知圆及已知直线相交,使两交点间的线段等于定长.

16.已知两条相交的直线及线外一点,求过此点作一直线使被两已知直线截下定长的线段.(提示:引复习题 2 第 13 题为证.)

17.求内分已知线段 AB 于 C,D 两点,使合于$\frac{\overline{AC}}{CD} = \frac{\overline{CD}}{DB} = \frac{\overline{DB}}{AB}$.

18.已知三边,求作有外接圆的凸四边形,而使第四边恰为外接圆的直径[①].(牛顿问题)

19.已知外心至三边的距离,求作三角形.(提示:取外接圆半径为未知量.)

20.已知垂心至三顶点的距离,求作三角形.

21.已知垂心至三边的距离,求作三角形.

22.已知内心至三顶点的距离,求作三角形.

23.已知内心至三旁心的距离,求作三角形.

24.已知腰的高及外接圆半径,求作等腰三角形.(提示:取顶角的半角的正弦为未知量.)

25.已知周长、内切圆半径、外接圆半径,求作三角形.(提示:以三边长为根建立一三次方程.)

复习题 5

1.在 $\triangle ABC$ 内求一点 O,使 $S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB} = 1:2:3$.

2.设 A,B 是直角 $\angle XOY$ 的边 OX 上两定点,试在边 OY 上求一点 C,使合于 $\angle OAC = 3\angle OBC$.

3.已知一角、一邻边、其他两边的和,求作三角形.

4.已知一角、对边、两夹边的和,求作三角形.

5.已知一角、对边、两夹边的和与差之比,求作三角形.

6.已知底边、顶角的平分线、两腰之比,求作三角形.

① 此题无异于"已知三边求作面积极大的四边形."

7. 已知一边、这边的高、其他两边的平方和，求作三角形.

8. 已知一边、这边的中线、其他两边的平方差，求作三角形.

9. 已知一角、这角对边的中线、外接圆半径，求作三角形.

10. 已知一角、周长、外接圆半径，求作三角形.

11. 已知勾股的和及内切圆半径，求作直角三角形.

12. 已知周长及两邻边的平方和，求作矩形.

13. 在已知圆中，求作内接矩形，使合下列条件之一：

(1) 周长一定；

(2) 面积一定.

14. 已知两平行线及两定点，求分别过这两定点作两平行线使与已知两平行线交成一菱形.

15. 已知四直线 a,b,c,d，求作定向直线 l，交 a,b,c,d 于 A,B,C,D，使 $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$，$m,n$ 是给定的两线段.

16. 求作一圆，使三个定点对它的视角分别等于已知角.

17. 已知一边、对角、内切圆半径，求作三角形.

18. 已知一角、内切圆半径、外接圆半径，求作三角形.

19. 已知一角、面积、内切圆半径，求作三角形.

20. 已知一边、面积、内切圆半径，求作三角形.

21. 已知一边、对角所含旁切圆的半径、内切圆半径，求作三角形.（提示：应用复习题 1 第 13 题.）

22. 已知两边的差、夹角所含旁切圆的半径、内切圆半径，求作三角形.

23. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内的定点，过 P 求作直线交 AB,AC 两边于 E,F，使 $BE+EF+FC$ 等于定长.（提示：作出 $\triangle AEF$ 的内切圆.）

24. 已知一边、一邻角的平分线、其他两角的差(绝对值)，求作三角形.

25. 已知一边的高、两邻角的差、外接圆半径，求作三角形.

26. 已知一角、一邻边的中线、对边的高，求作三角形.

27. 已知两腰的长及两底角的差，求作三角形.（提示：以底边的中垂线为轴施行反射.）

28. 设 O 是两定直线 b,c 的交点，P,Q 是线外两定点. 求作 $\triangle ABC$，使顶点 B,C 分别落在 b,c 上，直线 AB,AC 分别通过 P,Q，且 O 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心.

29. 求作定圆的外切三角形，使它的顶点分别落在经过圆心的三条定直线

上.

30. 在定圆中求作内接五边形,使它的各边分别垂直于已知的五条半径.

31. 已知一对对边的长及另一对对边的和,求在定圆中作内接凸四边形.

32. 设 A,B 各是 $\odot O,\odot O'$ 上的定点,l 是这两圆的等幂轴.试在 l 上求一点 P,联结 PA,PB 各交 $\odot O,\odot O'$ 于 Q,R,使 $QR\perp l$.

33. 已知两底的和、两腰、高,求作梯形.

34. 已知对角线的交角及两邻边的长,求作平行四边形.

35. 已知一对对角、两对角线及其交角,求作凸四边形.

36. 求在已知两平行线间嵌入一条定长的线段,使一定点对这线段的视角等于已知角.

37. 设 A,B 各是已知直线 a,b 上的定点,求作定向直线 l,交 a,b 于 P,Q,使 $AP=BQ$.(提示:施行平移使 P 移至 Q.)

38. 已知三直线 a,b,c,求作定向直线 l,交 a,b,c 于 A,B,C,使 $|AB-BC|$ 等于定长.(提示:按定向平移 a,而令平移距离等于定长.)

39. 求过两圆的一交点 P 作一直线交这两圆于 A,B,使线段 AB 之长一定.

40. 求作一定向直线,使被两个已知圆截下两弦的和等于定长.(提示:按定向平移一圆,使所截两弦有一端点重合.)

41. 已知中心的位置,求作平行四边形,使它的顶点分别落在四条定直线上.

42. 已知一对顶点的位置,求作平行四边形,使其余两顶点同落在一个定圆上.

43. 已知一角、两夹边的和、对边的中线,求作三角形.

44. 已知一边、对角、另一边的中线,求作三角形.

45. 已知一角、两夹边的中线,求作三角形.

46. 试求一点 A,自这点引射线 AB,AC 分别切两已知圆于 B,C,使得 AB 等于定长,$\angle BAC$ 等于已知角.

47. 已知一点 A、一圆 $\odot O$、一三角形 $\triangle A'B'C'$,在 $\odot O$ 上求两点 B,C,使 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

48. 已知边长,求作正三角形,使它的顶点分别落在三条定直线上.

49. 已知直线 $a\parallel b,c\parallel d$,求过定点 P 作直线 l,交 a,b,c,d 于 A,B,C,D,使 $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{m}{n}$,$m,n$ 是给定的两线段.

50. 已知两直线 a,b 及线外一点 P,在 a 上求一点 A,引 $AB\perp b$ 于 B,使

$\frac{AB}{AP}=\frac{m}{n}$，$m$，$n$ 是给定的两线段.

51.已知两同心圆及不在圆上的一点，求过这点作一割线，使外圆割下的弦4倍于内圆割下的弦.（提示：以外圆上一点为相似中心，$\frac{3}{5}$ 或 $\frac{5}{3}$ 为相似率施行位似变换.）

52.求作一圆，使切于两已知圆，又正交于另一已知圆.（提示：把后一已知圆反演为直线.）

53.已知一边、这边的高、两邻角的差，求作三角形.（提示：作出第三角的平分线.）

54.已知两边的和、夹角、此角的外角平分线，求作三角形.（提示：以该外角平分线为轴施行反射，化为习题30第23题.）

55.已知两边的差、夹角、此角的平分线，求作三角形.（提示：以该角平分线为轴施行反射，化为习题30第24题.）

56.已知一高、周长、面积，求作三角形.

57.求自已知三角形的一个顶点作直线，把已知三角形分成两个三角形，使得这两个三角形的面积之比等于它们的周长之比.

58.过已知角的平分线上一定点求作一直线，使被角的两边截下定长的线段.（帕波斯问题）

59.求作一四边形，使与给定的四边形相似，并使指定的一边落在一条已知直线上，其他两顶点同落在一个已知圆上.（提示：用反求法，并应用第50题.）

60.求自已知三角形内一点发出三条等长线段，使它们分别平行于三角形的三边，且其他三端点分别落在三边上.

61.已知两边、夹角的平分线，求作三角形.

62.在第37题中，设使 $\frac{AP}{BQ}$ 等于定长，则如何作图？（提示：应用梅涅劳斯定理.）

63.设 A，B 是直线 l 上两定点，在 l 上求两点 C，D，使调和分隔 A，B，且令 CD 等于定长.

第七章　多值有向角

在前面凡论及角的量,都只限于它的绝对值.这个限制,在考察复杂的图形时,往往因各元素间相互位置的变化必须变更说明而感到莫大的不便.本章就是为了弥补这种缺陷而写的.

本章所介绍的"多值有向角",是研究欧几里得几何的一个利器.未习惯运用它的人,开始时或许反觉得不大顺当,可是经过深刻认识和一番实践之后,自会渐渐地体会出它的优越性究竟在哪里.对初等几何有兴趣的读者,不妨试回头把这个利器用于以前一些比较复杂的习题(尤其是共点、共线、共圆等问题),这样就更能深入地看到它的致用之妙.

§99　多值有向角及其通值

在平面上,一直线绕其上一定点旋转,可有两种旋转方向,一种是"逆时针"的,一种是"顺时针"的(图 565).这两种旋转方向,其中之一可选定为正向,于是另一便是负向.依照惯例,我们规定逆时针的方向为正,顺时针的方向为负.

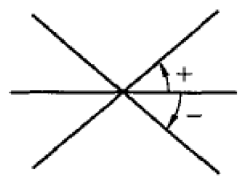


图 565

假定有两直线 l, l',它们或相交或平行或重合(图 566).任意选定一点 O,通过 O 作两直线 h, h' 使分别平行(或重合)于 l, l',然后将 h 绕 O 点依任何方向旋转,而每当 h 重合于 h' 一次,h 便旋过一个角度,这个角度或小于二直角,或大于二直角,甚或大于若干周角.这些角度视旋转方向为正向或负向而规定它们的值是正的或负的.现在我们把这样得到的角度都当作 l 与 l' 所做成角的角度,并用记号"$\measuredangle l, l'$"来表示.凡两直线做成的角若是按这个方法来测定的,那么称为多值有向角.应该指出,这样的角只注意于旋转的方向,l 与 l' 本身的正负向是无需给定的.又书写记号"$\measuredangle l, l'$"时,必须注意 l 与 l' 的先后次序,不得错乱.此外,多值有向角有时也有用大写字母来标记的,例如,$\measuredangle AX, AY$ 就是表示直线 AX 与 AY 所成的多值有向角(图 567).为简便起见,$\measuredangle AX, AY$ 也可记如 $\measuredangle XAY$,不过须要记着 AX

与 AY 是直线而非射线.

在上述的旋转运动过程中，h 与 h' 可随意重合若干次，因此，多值有向角是多值的[①]. 设想 h 先依正向旋转（图 566）. 当第一次重合于 h' 时[②]，h 所旋过的角度小于二直角，以 θ 代表它. 于是在 h 第二次重合于 h' 时，h 共旋过的角度便为 $\theta + \pi$. 依次类推：在第三次重合时为 $\theta + 2\pi, \cdots$，在第 $n+1$ 次重合时为 $\theta + n\pi$. 因旋转方向为正向，故这些值都是正的；这就是说，$\measuredangle l, l'$ 的各正值是 $\theta + n\pi$ 形式，n 为任一正整数或零.

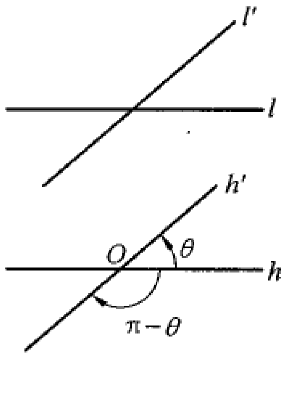


图 566

其次，令 h 依负向旋转（图 566）. 当 h 第一次重合于 h' 时，h 所旋过的角度为 $\pi - \theta$；在第二次重合时为 $2\pi - \theta; \cdots$；在第 n 次重合时为 $n\pi - \theta$. 但因旋转方向为负向，故各值之前应冠以负号；由此可见 $\measuredangle l, l'$ 的各负值具 $\theta - n\pi$ 形式，n 为任一正整数.

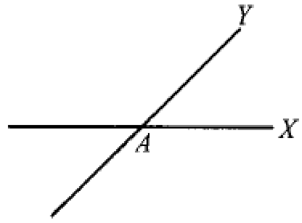


图 567

综合以上两种结果，得知 $\measuredangle l, l'$ 的**通值**是

$$\theta + p\pi$$

$\theta (0 \leqslant \theta < \pi)$ 代表 $\measuredangle l, l'$ 的**最小非负值**，p 为任一整数.

若取 $\measuredangle l, l'$ 的任一特值 $\varphi = \theta + m\pi$，m 为一确定的整数，则

$$\theta + p\pi = \varphi + (p - m)\pi$$

或

$$\theta + p\pi = \varphi + k\pi$$

其中 $k = p - m$. 因此，$\measuredangle l, l'$ 的值又可表示为

$$\varphi + k\pi$$

φ 代表 $\measuredangle l, l'$ 的**任一值**，k 为任一整数.

假如 l 与 l' 平行或重合，则 h 与 h' 重合，而 $\theta = 0$，故此时 $\measuredangle l, l'$ 的值为 $p\pi$.

显然，$\measuredangle l, l'$ 的值与点 O 的位置无关，所以当 l 与 l 的相交时，我们不妨取它们的交点当作点 O，省得再画出 h 与 h'.

§ 100　多值有向角的相等

假若两个多值有向角的通值能够一对一地对应相等，那么我们就说这两个

---

① 这就是"多值有向角"命名的由来.

② 如果 h 与 h' 原已重合，则把 h 未动的当儿，看做 h 与 h' 第一次重合的时候.

多值有向角相等.在这个定义中,不难晓得多值有向角的相等具有反身性、对称性、传递性.

定理 197　两个多值有向角的相等,决定于它们的最小非负值的相等.

假设 ∡a,b 及 ∡a',b' 的最小非负值同等于 θ(图 568),则(§99)

$$∡a,b = \theta + p\pi$$

$$∡a',b' = \theta + p'\pi$$

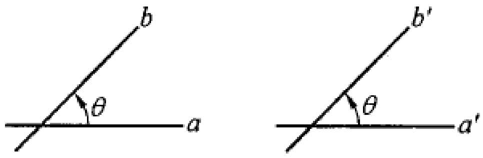


图 568

观此,可知但令 $p = p'$,就能使得

$$\theta + p\pi = \theta + p'\pi$$

这就是说,∡a,b 与 ∡a',b' 的通值能够一对一地对应相等,所以据定义,∡a,b 与 ∡a',b' 相等.

推论　若直线 a 与 a'、b 与 b' 各相平行或重合(图 569),则 ∡a,b 与 ∡a',b' 相等.

定理 198　若两个多值有向角相等,则它们的最小非负值必相等.

假定 ∡a,b 与 ∡a',b' 相等,θ 与 θ' 各是它们的最小非负值(图 569),那么

$$∡a,b = \theta + p\pi$$

$$∡a',b' = \theta' + p'\pi$$

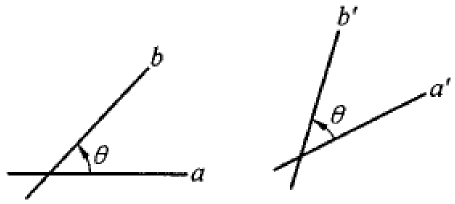


图 569

据题设,存在一种对应,以 p_1 代 p,p'_1 代 p',可以使得

$$\theta + p_1\pi = \theta' + p'_1\pi$$

由此
$$\theta - \theta' = (p'_1 - p_1)\pi$$
或
$$\theta - \theta' = q\pi$$
其中 $q = p'_1 - p_1$ 为一整数.但是 $0 \leqslant \theta < \pi$ 且 $0 \leqslant \theta' < \pi$,因此,势必 $q = 0$;从而

$$\theta = \theta'$$

推论　若 ∡a,b 与 ∡a',b' 相等,且 a 与 a' 平行或重合(图 568),则 b 与 b' 也平行或重合.

定理 199　如果两个多值有向角的任一值之差等于 $k\pi$,k 为任一整数,那么这两个多值有向角必相等.

设 ∡a,b 的一值为 $\varphi = \theta + m\pi$,∡a',b' 的一值为 $\varphi' = \theta' + m'\pi$,而 $\varphi - \varphi' = k\pi$.由此

$$\theta - \theta' = [k - (m - m')]\pi$$

或
$$\theta - \theta' = q\pi$$
其中 $q = k - (m - m')$ 为一整数.这样一来,同上可知 $q = 0$;于是
$$\theta = \theta'$$
故定理得证(定理 197).

由于多值有向角的多值性,可知 $\measuredangle a, b$ 与 $\measuredangle a', b'$ 相等,其意实为
$$\measuredangle a, b = \measuredangle a', b' + k\pi$$
但是有了定理 199,我们就不妨用
$$\measuredangle a, b = \measuredangle a', b'$$
来表示 $\measuredangle a, b$ 与 $\measuredangle a', b'$ 的相等关系了.以后,我们约定遵守这个一般性的规定:凡关于多值有向角的一切等式,其中所含 $k\pi$ 形状的项一概略而不书.

定理 200 直线 a 与 b 平行或重合的必要且充分之条件为(图 570)
$$\measuredangle a, b = 0$$

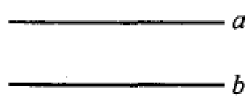


图 570

事实上,设若 a 与 b 平行或重合,则 $\measuredangle a, b = p\pi$(§99);略去 $p\pi$ 便得 $\measuredangle a, b = 0$.

其次,假定 $\measuredangle a, b = 0$.由方才所证,知 $\measuredangle a, a = 0$,于是 $\measuredangle a, a = \measuredangle a, b$.因此 a 与 b 平行或重合(定理 198 推论).

注 多值有向角不能比较大小.

§ 101 三点共线的条件

由 §100 定理 200 及定理 198 的推论,可以导出一个有关三点共线的命题如下:

定理 201 三点 A, B, C 共线的必要且充分之条件为下列二式之一:

(1) $\measuredangle ABC = 0$;

(2) $\measuredangle PAB = \measuredangle PAC$.

其中 P 是异于 A 的任意的一点(图 571).

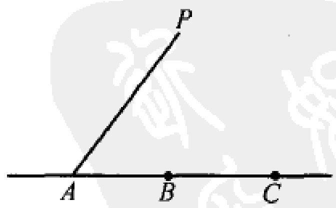


图 571

用这定理于共线点问题,将给证题带来莫大的便利.

§ 102　四点共圆的条件

设 A,B,C,D 是一圆上的四点(图 572),则

$$\angle ACB = \angle ADB \qquad ①$$

或

$$\angle ACB + \angle ADB = \pi \qquad ②$$

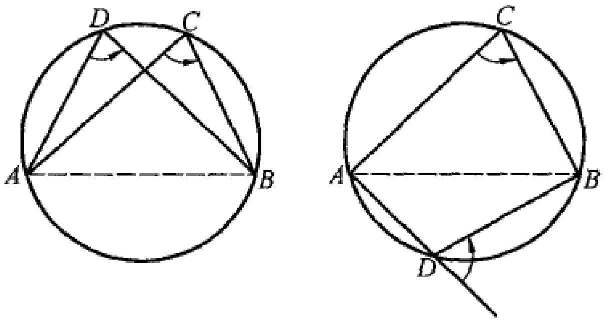


图 572

须视乎 C,D 同在 AB 的一侧或分在两侧而定.逆之,当欲证 A,B,C,D 四点共圆时,必须先视 C,D 同在 AB 的一侧或分在两侧,而后证 ① 或 ② 成立.这都是我们平常感到极其不便的地方.假如采用多值有向角,这种不便就可以消除了.

定理 202　四点 A,B,C,D(不论次序)共圆的必要且充分之条件为(图 572)

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ADB \neq 0 \qquad ③$$

首先,条件 ③ 是必要的.因为 A,B,C,D 四点共圆时,$\measuredangle ACB$ 与 $\measuredangle ADB$ 的最小非负值永远相等且不等于零(因 A,B,C,D 中无三点共线),所以 ③ 必成立(§ 100 定理 197).

其次,条件 ③ 也是充分的.由于 $\measuredangle ACB \neq 0$,故可过 A,B,C 三点作一圆,假设这圆交 AD 于 D'.据方才所证,应该

$$\measuredangle ACB = \measuredangle AD'B$$

与 ③ 比较,得

$$\measuredangle AD'B = \measuredangle ADB$$

由此可知直线 BD' 与 BD 必然重合(§ 100 定理 198 推论),因而 D' 与 D 实际合而为一.这就是说,当 ③ 成立时,A,B,C,D 四点一定共圆.

推论　设直线 $a \perp a'$ 且 $b \perp b'$(图 573),则 $\measuredangle a,b = \measuredangle a',b'$.

定理 203　直线 AT 切于 $\odot ABC$ 的必要且充分之条件为(图 574)

$$\measuredangle TAB = \measuredangle ACB$$

PDG

其证明与定理 202 相仿.

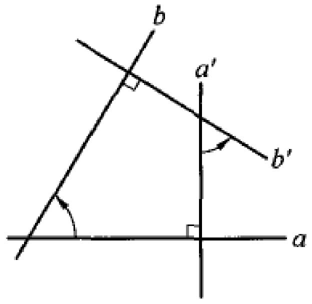


图 573

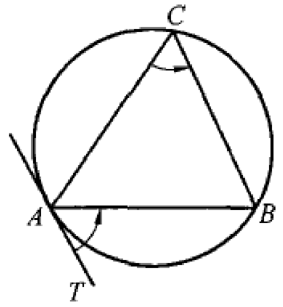


图 574

§ 103　多值有向角的和

定理 204　设 a,b,c 是任意三条直线(图 575),则

$$\measuredangle a,b+\measuredangle b,c=\measuredangle a,c$$

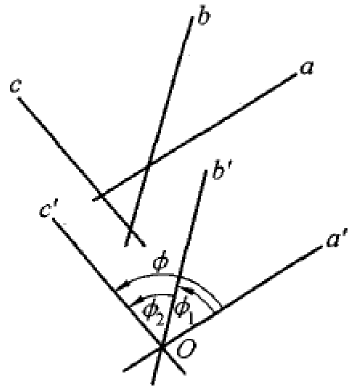


图 575

通过一点 O 作直线 a',b',c',使以次与 a,b,c 平行.

今将 a' 绕点 O 依正向旋转,至与 b' 重合而止,命 a' 此时所旋过的角度为 φ_1;继续旋转,命 a' 从 b' 至 c' 所旋过的角度为 φ_2.在 a' 从它本身至 c' 的总运动中,命其所共旋过的角度为 φ.于是

$$\varphi_1+\varphi_2=\varphi$$

据 § 99 所述,得知

$$\measuredangle a,b=\varphi_1+k_1\pi$$

$$\measuredangle b,c=\varphi_2+k_2\pi$$

$$\measuredangle a,c=\varphi+k\pi$$

令 $$k'=k_1+k_2,m=k'-k$$

则 $$(\varphi_1+k_1\pi)+(\varphi_2+k_2\pi)=\varphi+k'\pi=(\varphi+k\pi)+m\pi$$

故 $$\measuredangle a,b+\measuredangle b,c=\measuredangle a,c+m\pi$$

略去此式右端的 $m\pi$,就是所要证的式子了.

推论　$\measuredangle a,b+\measuredangle b,a=0$.

注　这式子有时也写成

$$-\measuredangle a,b=\measuredangle b,a$$

其意表示"$-\measuredangle a,b$"可以理解为"$\measuredangle b,a$".

根据上定理,可以求得任何两个多值有向角的和.例如$\measuredangle a,b$与$\measuredangle c,d$是给定的两个多值有向角(图576),可作一直线e,使得$\measuredangle b,e=\measuredangle c,d$,那么

$$\measuredangle a,b+\measuredangle c,d=\measuredangle a,b+\measuredangle b,e=\measuredangle a,e$$

这就是说$\measuredangle a,e$是$\measuredangle a,b$与$\measuredangle c,d$的和.两个以上多值有向角的和的求法,依此类推.

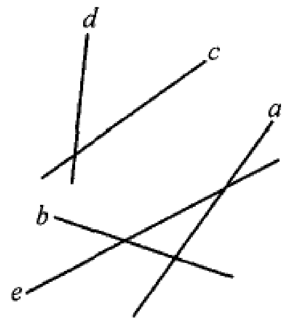


图 576

定理204的推广命题如下:

定理205　设$l_1,l_2,l_3,\cdots,l_{n-1},l_n$是任意$n$条直线,则

$$\measuredangle l_1,l_2+\measuredangle l_2,l_3+\cdots+\measuredangle l_{n-1},l_n=\measuredangle l_1,l_n$$

应用数学归纳法,不难证明这命题.

§104　轴对称的多值有向角

定理206　设直线a与a'关于轴l对称(图577),则

$$\measuredangle a,l=-\measuredangle a',l$$

因为$\measuredangle a,l$与$\measuredangle l,a'$的最小非负值相等,所以

$$\measuredangle a,l=\measuredangle l,a'$$

即
$$\measuredangle a,l=-\measuredangle a',l$$

定理207　设直线a与a',b与b'都关于轴l对称(图578),则

$$\measuredangle a,b=-\measuredangle a',b'$$

据定理206,得知

$$\measuredangle a,l=\measuredangle l,a',\measuredangle l,b=\measuredangle b',l$$

那么
$$\measuredangle a,l+\measuredangle l,b=\measuredangle b',l+\measuredangle l,a'$$

所以(§103定理204)

$$\measuredangle a,b=\measuredangle b',a'$$

即
$$\measuredangle a,b=-\measuredangle a',b'$$

定理208　设a与b是相交直线(图579),则$a\perp b$的必要且充分之条件为

$$\measuredangle a,b=\measuredangle b,a$$

先假定$a\perp b$,此时a与其本身关于b对称,故$\measuredangle a,b=\measuredangle b,a$(定理206).

次假定a与b相交且$\measuredangle a,b=\measuredangle b,a$.这无异说,$a$与$b$所交成任何两个邻补角相等(§100定理198),因此$a\perp b$.

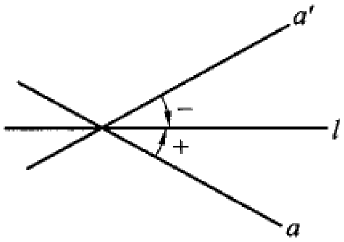


图 577

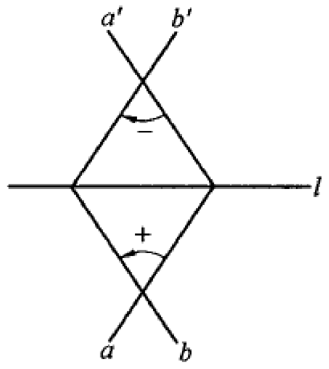


图 578

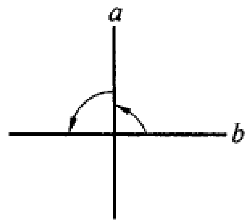


图 579

定理 209 在$\triangle ABC$中(图 580),$AB = AC$的必要且充分之条件为

$$\measuredangle ABC = -\measuredangle ACB$$

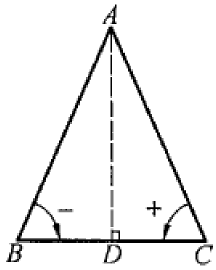


图 580

作$\angle A$的平分线AD.

第一,假定$AB = AC$.此时B与C关于AD对称,

故$\measuredangle ABC = -\measuredangle ACB$(定理 207).

第二,假定$\measuredangle ABC = -\measuredangle ACB$.据已知定理,得

$$\measuredangle AD, BC = \measuredangle DAB + \measuredangle ABC = -\measuredangle DAC - \measuredangle ACB = \measuredangle CAD + \measuredangle BCA = \measuredangle BC, AD$$

由此$AD \perp BC$(定理 208).从而$AB = AC$(§27(1)).

§105 多值有向角的整倍数

现在假设有一串相等的多值有向角

$$\measuredangle l, l' = \measuredangle l_1, l'_1 = \measuredangle l_2, l'_2 = \cdots = \measuredangle l_n, l'_n$$

那么我们把“$n\measuredangle l, l'$”来表示$\measuredangle l_1, l'_1, \measuredangle l_2, l'_2, \cdots, \measuredangle l_n, l'_n$的和

$$n\measuredangle l, l' = \measuredangle l_1, l'_1 + \measuredangle l_2, l'_2 + \cdots + \measuredangle l_n, l'_n$$

而称$n\measuredangle l, l'$为$\measuredangle l, l'$的n倍.

设θ是上述诸多值有向角的最小非负值,则

$$n\measuredangle l, l' = (\theta + p_1\pi) + (\theta + p_2\pi) + \cdots + (\theta + p_n\pi) = n\theta + p'\pi (p' = p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$$

由此可见,所谓$\measuredangle l, l'$的n倍,实际是指其最小非负值的n倍再加上π的任意倍数而言,并不是专指

$$n \measuredangle l, l' = n(\theta + p\pi) = n\theta + np\pi$$

定理 210　在 $\triangle ABC$ 中（图 581），设 $AB = AC$，则

$$\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABC = 2\measuredangle BCA$$

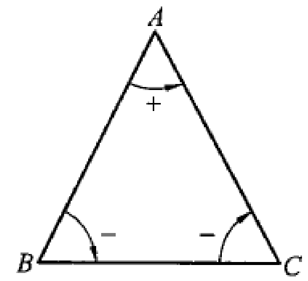


图 581

应用 §104 定理 209，即得

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ABC + \measuredangle BCA = 2\measuredangle ABC = 2\measuredangle BCA$$

定理 211　设 A, B, P 是 $\odot O$ 上的任意三点（图 582），则

$$\measuredangle AOB = 2\measuredangle APB$$

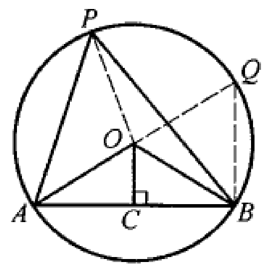


图 582

联结 OP，并应用定理 210，即得

$$\measuredangle AOB = \measuredangle AOP + \measuredangle POB = 2(\measuredangle APO + \measuredangle OPB) = 2\measuredangle APB$$

定理 212　承上定理，引 $OC \perp AB$（图 582），则

$$\measuredangle APB = \measuredangle AOC = \measuredangle COB$$

作直径 AQ，联结 QB. 已知 $QB \perp AB$，因而 $QB \parallel OC$. 由此（§102，定理 202）

$$\measuredangle APB = \measuredangle AQB = \measuredangle AOC = \measuredangle COB$$

注　多值有向角不得用非整数的数去乘. 例如，假设 l 与 l' 是相交直线，s 与 t 是平分 l 与 l' 的交角的直线（图 583），则

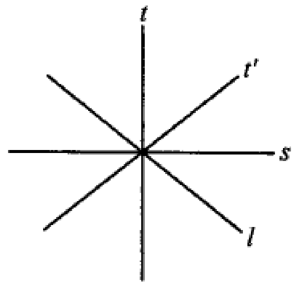


图 583

$$\measuredangle l, l' = \measuredangle l, s + \measuredangle s, l' = 2\measuredangle l, s$$

$$\measuredangle l, l' = \measuredangle l, t + \measuredangle t, l' = 2\measuredangle l, t$$

如果用 $\frac{1}{2}$ 去乘这两个式子的首末各端，那么

$$\frac{1}{2}\measuredangle l, l' = \measuredangle l, s, \quad \frac{1}{2}\measuredangle l, l' = \measuredangle l, t$$

由此

$$\measuredangle l, s = \measuredangle l, t$$

这样一来，s 与 t 就要重合为一（§100 定理 198 推论），然而这是不符合事实的. 因此，切勿把等式 $n\measuredangle a, b = \measuredangle c, d$ 改写为 $\measuredangle a, b = \frac{1}{n}\measuredangle c, d$，也不要把 $n\measuredangle a, b = n\measuredangle e, f$ 两端的公因数 n 骤然约去而写为 $\measuredangle a, b = \measuredangle e, f$.

§106　多值有向角的优点

多值有向角除了不能比较大小以及不得用非整数的数去乘之外，它常常可

使一定理包罗所有情形，并使证法普遍而无所例外. 例如，§101 定理 201 及 §102 定理 202，203，不问诸点的位置如何，均一律成立；§100 定理 197 的推论，包括了 §7 定理 32 各种情形和定理 34，而且消除了后者的两可性；§100 定理 198 的推论，不但包括了 §7 定理 29 各种情形，同时内容尤为广泛；§102 定理 202 的推论，相当于 §7 定理 35，但无其两可的缺点.

圆与角的关系非常密切，这些关系表现为 §13 定理 83 的推论 1、定理 90、定理 92、定理 93 等命题. 如果我们采用多值有向角，就可以把这些命题同冶于一炉，甚至还包容 §13 定理 89 于其中：

定理 213　设直线 l 及 l' 与一圆的公共点为 A，B 及 A'，B'（这四点可以任意重合），P 是圆上一任意点（图 584），则

$$\measuredangle l, l' = \measuredangle APA' + \measuredangle BPB'$$

证明很简单，联结 AB'，就得

$$\measuredangle l, l' = \measuredangle l, AB' + \measuredangle AB', l' = \measuredangle BA'B + \measuredangle AB'A' = \measuredangle BPB' + \measuredangle APA'$$

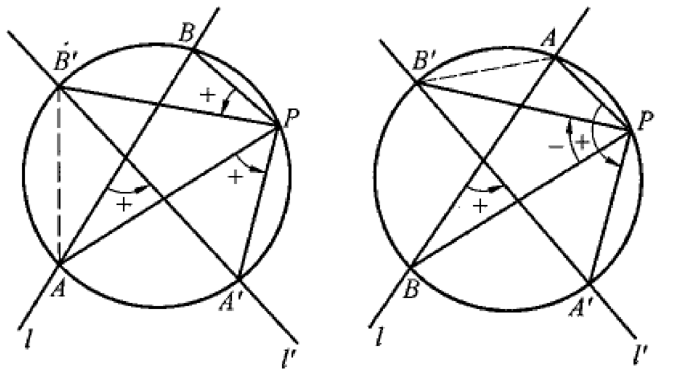


图 584

由此可见，多值有向角常能将各种不同的情形纳于一个统一体，我们所以采用多值有向角的原因即在于此. 在这个新系统之下，无论图形中各元素如何排列，各角间的位置如何，所得的结果永远具有相同的形式，这实是多值有向角的一个值得称美的优点.

§107　应用例题

上面已述及多值有向角的优点，下面我们要把多值有向角用到一些具体的问题上去，并且指出它的好处何在. 当我们应用这个新工具来证题时，首须极力除去直觉上的成见，步步均应以已立的法则和已证的命题作为凭借. 这些凭借主要有：

(1) 平行线(§100 两个推论及定理 200);

(2) 共圆点(§102 定理 202);

(3) 多值有向角的和(§103);

(4) 轴对称的多值有向角(§104 定理 206,207);

(5) 垂线(§102 定理 202 的推论;§104 定理 208);

(6) 等腰三角形(§104 定理 209;§105 定理 210);

(7) 与圆有关的角(§102 定理 203;§105 定理 211,212;§106 定理 213).

例题 125　甲、乙两圆相交于 P,Q(图 585).过 P 作一直线交甲于 A,交乙于 B;又过 Q 作一直线交甲于 C,交乙于 D,求证:AC 与 BD 平行或重合.(复习题 2 第 14,15 题)

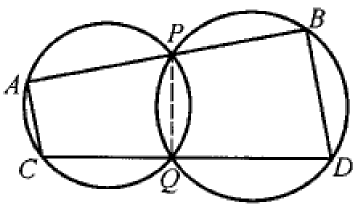


图 585

A,P,B 三点的相互位置共有六种情形:P 介于 A,B 之间,A 介于 P,B 之间,B 介于 A,P 之间,A 与 P 重合,P 与 B 重合,A 与 B 重合.C,Q,D 三点亦有类此情形.故本题图形的变化,有六六三十六种,除去重复的以外,亦不下十余种情形.若每种再要考虑 AB 与 CD 交于圆外、圆内、圆上各情形,实不胜其烦.假如采用多值有向角,既免分类之劳,而证法亦极简单.

连 PQ,则见(§102 定理 202,203)

$$\measuredangle PAC = \measuredangle PQC = \measuredangle PQD = \measuredangle PBD$$

故 AC 与 BD 平行或重合(§100,定理 198,推论).

例题 126　设在 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 所在直线上各任取一点 X,Y,Z(图 586),则三 $\odot AYZ$,$\odot BZX$,$\odot CXY$ 共点.(§48 例题 49)

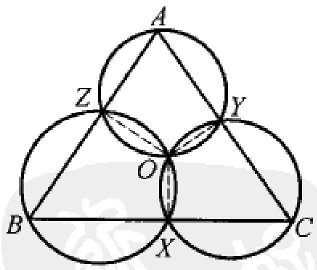


图 586

命 $\odot BZX$ 与 $\odot CXY$ 的第二交点为 O.联结 OX,OY,OZ,则

$$\measuredangle AYO = \measuredangle CYO = \measuredangle CXO = \measuredangle BXO = \measuredangle BZO = \measuredangle AZO$$

因知 O 点在 $\odot AYZ$ 上.

若用通常的方法来证这个命题,除要考虑 X,Y,Z 三点的位置(在边上、在边的延长线上或重合于边的端点),还要考虑点 O 在三角形的内、外或周界上.必须将这些情形一一证明,然后归纳,才称完备.现在采用多值有向角,仅仅一个证法,便可以包括一切了.

例题 127　在 $\triangle ABC$ 中(图 587),O 是外心,并设 AB 边的中垂线交直线 AC

于 E,AC 边的中垂线交直线 AB 于 F,求证:B,C,E,F,O 五点共圆.(习题 16 第 10 题)

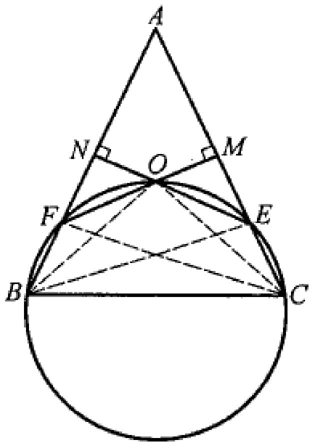


图 587

联结 BE,CF.由题设知 $EA=EB,FA=FC$;因此(§105 定理 210)

$$\measuredangle BEC=\measuredangle BEA=2\measuredangle BAE=2\measuredangle BAC$$
$$\measuredangle BFC=\measuredangle AFC=2\measuredangle FAC=2\measuredangle BAC$$

次连 BO,CO,因 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,故(§105 定理 211)

$$\measuredangle BOC=2\measuredangle BAC$$

于是 $$\measuredangle BEC=\measuredangle BFC=\measuredangle BOC$$

从而 B,C,E,F,O 五点共圆.

这个证法无论 E,F,O 三点的位置如何一律适用.

例题 128 在一圆上,设 M,N 各是$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$(劣弧或优弧)的中点(图 588),则 AB,AC,MN 三直线交成一个等腰三角形.(习题 9 第 12 题)

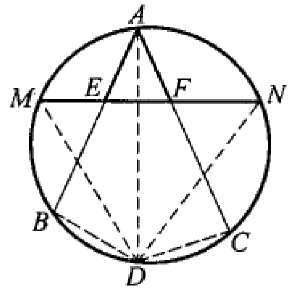


图 588

在圆上任取一点 P,联结 PA,PB,PC,PM,PN.据 §106 定理 213,有

$$\measuredangle AB,MN=\measuredangle APN+\measuredangle BPM$$
$$\measuredangle AC,MN=\measuredangle APM+\measuredangle CPN$$

题设 M,N 分别是$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{AC}$ 的中点,于是(§104 定理 206)

$$\measuredangle BPM=-\measuredangle APM,\measuredangle APN=-\measuredangle CPN$$

因知 $$\measuredangle AB,MN=-\measuredangle AC,MN$$

设 MN 交 AB,AC 于 E,F,则上面末式实即

$$\measuredangle AEF=-\measuredangle AFE$$

所以(§104 定理 209)

$$AE=AF$$

也许读者要问,应用 §13 定理 92 以证 $\angle AEF=\angle AFE$,这样岂非较上法简洁?其实这看法是片面的,只能适用于如图 588 的情形.要知道,由于 M,N 的取法不一,E,F 的位置亦随着有所变动(在圆内或圆外),对于不同的情形,要证 $\angle AEF=\angle AFE$,势非改弦更张不可,那么这是欲简反繁了.现在上面所述证法,不论图形怎样变化,无不切合,读者何妨一一绘图去征验一下呢!

例题 129　设两圆交于 P,Q(图 589),一直线交其中一圆于 A,B,交另一圆于 A',B'(A 与 B 或 A' 与 B' 都可以重合),则

$$\measuredangle APA'+\measuredangle BQB'=\measuredangle AQA'+\measuredangle BPB'=0$$

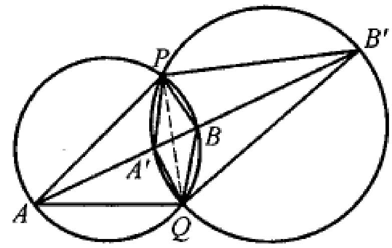


图 589

若把这式子中的诸多值有向角改为通常的角,则每节中的两角将有时相等有时互补,要看直线的位置及它与两圆的交点和顺序如何而定,因此很不易用概括的语言来表达这命题的内容[①].现在不然,我们丝毫不用顾虑位置和顺序的问题,用一个统一的式子就可以描述其中关系无遗了.证明如下:

联结 PQ,由于(§103 定理 204)

$$\measuredangle APA'=\measuredangle APQ+\measuredangle QPA'=\measuredangle ABQ+\measuredangle QB'A'=\measuredangle B'QB=-\measuredangle BQB'$$

故
$$\measuredangle APA'+\measuredangle BQB'=0$$

同理
$$\measuredangle AQA'+\measuredangle BPB'=0$$

例题 130　$\odot O$ 与 $\odot O'$ 交于 P,Q 两点(图 590),一外公切线切它们于 A,B.求证

$$2\measuredangle APB=\measuredangle OPO' \quad ①$$

$$2\measuredangle AQB=\measuredangle OQO' \quad ②$$

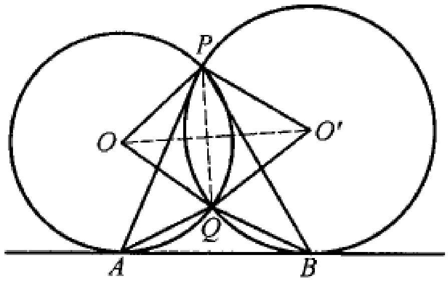


图 590

如果用通常的角来叙述本题,那么①,② 两式将具有不同的形式,并且还要看 AB 是哪一条外公切线而改变(参看习题 11 第 26 题),这使我们感到多么的不便!现在 ①,② 两式不但具有相同的形式,而且不问 AB 是哪一条外公切线它们都永远真确:

联结 OO' 和 PQ.由于 $OO'\perp PQ$,可得(§103 定理 205;§105 定理 212)

$$\measuredangle APB=\measuredangle PAQ+\measuredangle AQB+\measuredangle QBP=\measuredangle POO'+\measuredangle AQB+\measuredangle OO'P=\measuredangle AQB+\measuredangle OPO'$$

即

$$\measuredangle APB-\measuredangle AQB=\measuredangle OPO' \quad ③$$

据例题 129,又知

$$\measuredangle APB+\measuredangle AQB=0 \quad ④$$

① 参看习题 11 第 24 题,该题是本题的特殊情形.

将 ③ 与 ④ 相加，便得到 ①.

其次以 ④ 减 ③，得

$$2\measuredangle AQB = -\measuredangle OPO' \qquad ⑤$$

又因 P 与 Q 关于 OO' 对称，知（§ 104 定理 207）

$$\measuredangle OQO' = -\measuredangle OPO' \qquad ⑥$$

由 ⑤ 和 ⑥，即得 ②.

例题 131　延长 ⊙O 的半径 OA 至 B，使 $AB = OA$（图 591）. 设 t 是 ⊙O 的任意切线，C 是 B 在 t 上的射影，则

$$3\measuredangle ACB = \measuredangle CAO$$

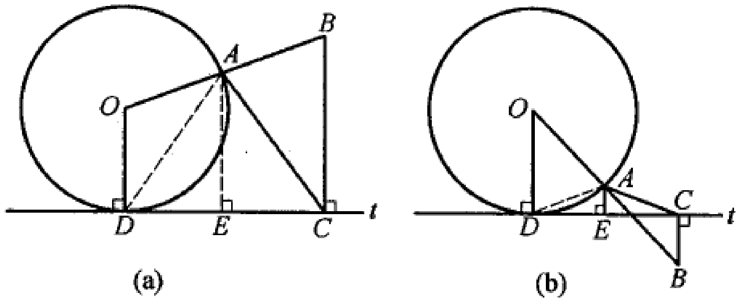


图 591

设 D 是 t 与 ⊙O 的切点，则 $OD \perp t$. 引 $AE \perp t$. 据题设，知 AE 是 CD 的中垂线，于是 $AC = AD$. 由此（§ 100 定理 197 推论）

$$\measuredangle ACB = \measuredangle CAE = \measuredangle EAD = \measuredangle ODA = \measuredangle DAO$$

故　$$3\measuredangle ACB = \measuredangle CAE + \measuredangle EAD + \measuredangle DAO = \measuredangle CAO$$

从上面的证明，可见本题的题断与 t 的位置无关. 但是如果用通常的角来表示（参看习题 11 第 23 题），当 t 穿过 A 与 B 之间时（图 591(b)），那就不适合了①.

例题 132　设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上的任一点（图 592），则 P 在直线 BC，CA，AB 上的射影 X，Y，Z 共线.（§ 42 例题 34）

联结 PB，PC，XY，XZ. 由题设，知 P，X，Y，C 四点及 P，X，Z，B 四点各共圆；因而

$$\measuredangle PXY = \measuredangle PCY = \measuredangle PCA = \measuredangle PBA = \measuredangle PBZ = \measuredangle PXZ$$

① 东利作著，黄元吉译《平面几何学——圆》（商务印书馆出版）第五章杂题集第 151 题不注意及此，是欠妥的.

所以 X,Y,Z 三点共线(§101 定理 201).

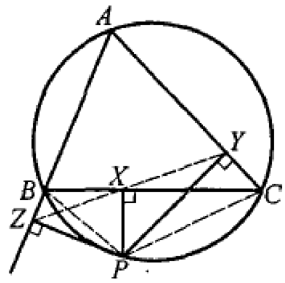


图 592

上述证法不但较从前所用的简单得多,而且无论 P 点在圆上何处以及 X,Y,Z 三点间的相对位置怎样,均一律适合.此外,多值有向角还有容易推广问题的功用.例如上题可以推广为下面的命题,而证法完全相仿:

"设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上的任一点(图 593),X,Y,Z 各是直线 BC,CA,AB 上一点.若 $\measuredangle PX,BC=\measuredangle PY,CA=\measuredangle PZ,AB$,则 X,Y,Z 三点共线."

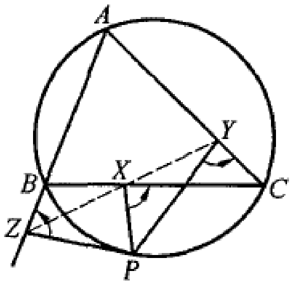
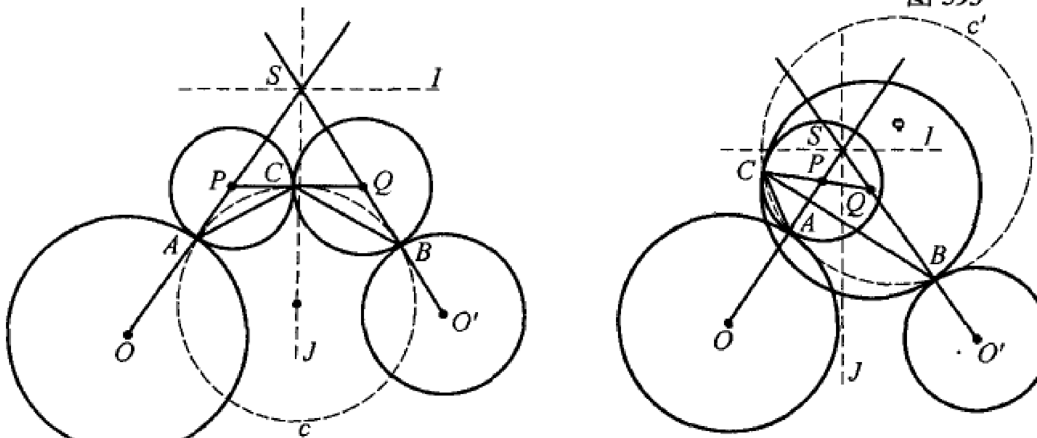


图 593

例题 133　设 A,B 各是两定圆 $\odot O,\odot O'$ 上的已知点(图 594).今有两动 $\odot P,\odot Q$ 分别切 $\odot O,\odot O'$ 于 A,B,又互相切于 C,求点 C 的轨迹.

P,Q 两点分别在 $OA,O'B$ 两直线上移动,而点 C 随着 PQ 直线的移动而移动,兼之 $\odot P$ 同 $\odot Q$ 又有外切与内切之分,在这个相当复杂的情况下,若用通常



(a)　　(b)

图 594

的角来论述,势必顾此失彼,甚或造成错误①.现在采用多值有向角,就可以避免这类缺点.

设 OA 与 $O'B$ 交于 S,则

$$2\measuredangle ACB=2(\measuredangle CAP+\measuredangle ASB+\measuredangle QBC)=$$

① 严济慈编《几何证题法》(商务印书馆出版)第四章 §47 例 2(第 71～72 页)与这里的例题 133 相同(文字有差异),但该书的解答不完备,其故即在于此.

$$\measuredangle CPA + 2\measuredangle ASB + \measuredangle BQC =$$
$$2\measuredangle ASB + \measuredangle BSA = \measuredangle ASB$$

作出 $\angle ASB$ 及其邻补角的平分线 SJ 及 SI，得

$$\measuredangle ASB = \measuredangle ASI + \measuredangle ISB = 2\measuredangle ASI$$
$$\measuredangle ASB = \measuredangle ASJ + \measuredangle JSB = 2\measuredangle ASJ$$

于是

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ASI \qquad ①$$

或

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ASJ \qquad ②$$

这样一来，问题的真相就不难明白了．

一般地说，所求轨迹是两个正交圆，其一是①所确定的圆 c（图594(a)），另一是②所确定的圆 c'（图594(b)）．

特殊情形留给读者讨论．

从以上各例看来，有力地说明了多值有向角是几何证题的绝好工具．

习 题 33

1. 若 $\measuredangle a,b = \measuredangle a',b'$，求证：$\measuredangle a,a' = \measuredangle b,b'$．

2. A,B,C,D 是任意的四点，求证：$\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = \measuredangle BAD + \measuredangle DCB$．

3. 设 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 交于 P,Q 两点．过 Q 任作一直线交 $\odot O$ 于 A，交 $\odot O'$ 于 A'，又分别过 A,A' 各作所在圆的切线 a,a'，求证：$\measuredangle a,a' = \measuredangle OPO'$．

4. 设 P,Q 是 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 的交点，A,A' 分别是这两圆上的任意点，求证：$\measuredangle APA' - \measuredangle AQA' = \measuredangle OPO'$．

5. 设 A,B,C,D 是一圆上的任意四点，L,M,N 分别是 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CD}$（劣弧或优弧）的中点，求证：$\measuredangle AB,CD = 2\measuredangle LMN$．

6. 设 P 是不在 $\square ABCD$ 周界上的一点，合于 $\measuredangle BAP = \measuredangle PCB$，求证：$\measuredangle PBA = \measuredangle ADP$．（参看 §36 例题 14．）

7. 设 P,Q 是四边形 $ABCD$ 的等角共轭点，求证：$\measuredangle APB + \measuredangle CPD = \measuredangle AQB + \measuredangle CQD = 0$．

8. 设 O 是某反演变换的反演中心，A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 互为反演点，求证：$\measuredangle BAC + \measuredangle B'A'C' = \measuredangle BOC$．

9. 在 $\triangle ABC$ 中，设 A',B',C' 分别是直线 BC,CA,AB 上的点，O 是 A',B',C' 所确定的密克点，求证：

(1) $\measuredangle BAC+\measuredangle B'A'C'=\measuredangle BOC$;

(2) $\measuredangle CBA+\measuredangle C'B'A'=\measuredangle COA$;

(3) $\measuredangle ACB+\measuredangle A'C'B'=\measuredangle AOB$.

10. 求证：P 与 P' 是 $\triangle ABC$ 的等角共轭点的必要且充分之条件为下列三式之二成立.

(1) $\measuredangle BPC+\measuredangle BP'C=\measuredangle BAC$;

(2) $\measuredangle CPA+\measuredangle CP'A=\measuredangle CBA$;

(3) $\measuredangle APB+\measuredangle AP'B=\measuredangle ACB$.

11. 设一圆与 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 所在直线的公共点依次为 A_1 与 A_2, B_1 与 B_2, C_1 与 C_2，求证：

(1) $\measuredangle BAC+\measuredangle B_1A_1C_1+\measuredangle B_2A_2C_2=0$;

(2) A_1, B_1, C_1 的密克点 P_1 与 A_2, B_2, C_2 的密克点 P_2 是 $\triangle ABC$ 的等角共轭点.

12. 设 $\triangle ABC$ 的等角共轭点 P 与 P' 在 BC, CA, AB 上的射影为 X 与 X', Y 与 Y', Z 与 Z', S 是 $\odot XYZ$ 上的任一点，求证：

(1) $\measuredangle PAP'=-(\measuredangle YSY'+\measuredangle ZSZ')$;

(2) $\measuredangle PBP'=-(\measuredangle ZSZ'+\measuredangle XSX')$;

(3) $\measuredangle PCP'=-(\measuredangle XSX'+\measuredangle YSY')$.

13. 承上题，设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心，求证

$$\measuredangle PAI+\measuredangle PBI+\measuredangle PCI=-(\measuredangle XSX'+\measuredangle YSY'+\measuredangle ZSZ')$$

14. 在 $\triangle ABC$ 中, L, M, N 分别是三边 BC, CA, AB 的中点, X, Y, Z 是一点 P 在 BC, CA, AB 上的射影. 设 MN 与 YZ, NL 与 ZX, LM 与 XY 交于 D, E, F，求证：XD, YE, ZF 三线交于一点 S，且是 $\odot LMN$ 与 $\odot XYZ$(或直线 XYZ)的交点之一.(对于 $\triangle ABC$ 来说，S 叫做 P 的奉田(Fontené)点.)

15. 求证：在 $\triangle ABC$ 中，一点 P 的垂足 $\odot O$ 与九点 $\odot K$ 在 P 的奉田点 S 的交角为 $\measuredangle OSK=\measuredangle PAI+\measuredangle PBI+\measuredangle PCI$①，其中 I 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心. 这题是著名的费尔巴哈定理(复习题 3 第 21 题)的推广命题之一.

16. 设直线 l 关于 $\triangle ABC$ 三边的对称线交成 $\triangle XYZ$，求证：$\odot XYZ$ 与 $\odot ABC$ 的交角等于直线 l 与 $\odot ABC$ 的交角.

17. 求证：五直线交成五个完全四边形，它们的五个密克点共圆.(密克定

① 若 $\odot O$ 变态为西姆森线，则以此线的垂线代替 OS 直线.

理）

18. 设 A_i 是直线 $a_i(i=1,2,3,4)$ 上的一点，而且这四点共圆，求证：A_i，A_j，A_k 对于 a_i，a_j，a_k 所交成三角形的密克点，凡四点也共圆.

19. 已知不共圆且无三点共线的四点 $A_i(i=1,2,3,4)$，命 A_i 对于 $\triangle A_jA_kA_l$ 的垂足三角形为 $\triangle_i$，凡四形；又命 A_i 关于 $\triangle A_jA_kA_l$ 的等角共轭点为 B_i，凡四点. 求证：

(1) 诸 $\triangle_i$ 彼此真正相似；

(2) 诸 $\triangle_i$ 两两都是透视三角形，六个透视中心分别落在六条连线 A_iA_j 上；

(3) A_i 是 $\triangle B_jB_kB_l$ 的外心.

20. 承上题，命 $\triangle A_jA_kA_l$ 的九点圆为 c_i，凡四圆；又命完全四角形 $A_1A_2A_3A_4$ 的对角三角形为 $\triangle_0$，求证：诸 c_i 与诸 $\triangle_i$ 及 $\triangle_0$ 的外接圆，凡九圆共点.（参看§48 例题 51.）

21. 在完全四角形 $ABCD$ 中，命 AC 与 BD，AB 与 CD，AD 与 BC 的交点为 P，Q，R，求证下列九点共圆：

(1) 完全四边形 $ABCDQR$ 的密克点 L；

(2) 完全四边形 $ADBCRQ$ 的密克点 M；

(3) 完全四边形 $ACDBPQ$ 的密克点 N；

(4) M 至 $\triangle ACR$ 外心的连线与 N 至 $\triangle ACQ$ 外心的连线之交点 X；

(5) M 至 $\triangle BDR$ 外心的连线与 N 至 $\triangle BDQ$ 外心的连线之交点 X'；

(6) N 至 $\triangle ABP$ 外心的连线与 L 至 $\triangle ABR$ 外心的连线之交点 Y；

(7) N 至 $\triangle CDP$ 外心的连线与 L 至 $\triangle CDR$ 外心的连线之交点 Y'；

(8) L 至 $\triangle ADQ$ 外心的连线与 M 至 $\triangle ADP$ 外心的连线之交点 Z；

(9) L 至 $\triangle BCQ$ 外心的连线与 M 至 $\triangle BCP$ 外心的连线之交点 Z'.

22. 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，AC，BD，EF 是对角线. 求证下列 21 点共圆：

(1) 完全四边形 $ABCDEF$ 的密克点 O；

(2) $\triangle ABF$，$\triangle BCE$，$\triangle CDF$，$\triangle DAE$ 的外心 K，L，M，N；

(3) AN，BL，FM 三线的交点 K'，BK，CM，EN 三线的交点 L'，CL，DN，FK 三线的交点 M'，DM，AK，EL 三线的交点 N'（参看复习题 3 第 60 题.）；

(4) 对节 AB 与 CD 的中垂线交点 P，AD 与 BC 的中垂线交点 P'，AE 与 CF 的中垂线交点 Q，AF 与 CE 的中垂线交点 Q'，BE 与 DF 的中垂线交点 R，BF 与 DE 的中垂线交点 R'；

(5) P 至 $\triangle ACE$ 外心的连线与 P' 至 $\triangle ACF$ 外心的连线之交点 X；

(6) P 至 $\triangle BDE$ 外心的连线与 P' 至 $\triangle BDF$ 外心的连线之交点 X'；

(7) Q 至 $\triangle EFB$ 外心的连线与 Q' 至 $\triangle EFD$ 外心的连线之交点 Y；

(8) Q 至 $\triangle ACB$ 外心的连线与 Q' 至 $\triangle ACD$ 外心的连线之交点 Y'；

(9) R 至 $\triangle BDA$ 外心的连线与 R' 至 $\triangle BDC$ 外心的连线之交点 Z；

(10) R 至 $\triangle EFA$ 外心的连线与 R' 至 $\triangle EFC$ 外心的连线之交点 Z'.

23. 已知无三点共线的五点 A,B,C,D,P，合于 $\measuredangle APB + \measuredangle CPD = 0$. 设分别过 A,B,C,D 各作一直线 a,b,c,d，使 $\measuredangle a,AP = \measuredangle b,BP = \measuredangle c,CP = \measuredangle d,DP$，则 a,b,c,d 顺接交成一有外接圆的四边形，试求这四边形的外接圆心的轨迹.

24. 设甲圆切一已知直线于定点，乙圆切另一已知直线于定点，而甲、乙两圆又彼此相切，求切点的轨迹.

25. 设甲圆切一已知直线于定点，乙圆切一已知圆于定点，而甲、乙两圆又彼此相切，求切点的轨迹.

总复习题

1. 已知▱$ABCD$,同在外边作正三角形$\triangle ABE$及$\triangle BCF$,求证:$\triangle DEF$是正三角形.

2. 设P是$\triangle ABC$内一点.若$AP\perp BC$,求证:$|PB-PC|\geqslant|AB-AC|$.

3. 求证:三角形半周的平方不小于内切圆半径平方的27倍.

4. 求证:三角形的半周不小于内切圆的内接正三角形的周长.

5. 在正三角形$\triangle ABC$中,M,N分别是AB,AC两边的中点.设连线MN交$\odot ABC$于K,K',而连线CK,CK'交直线AB于P,P',求证:这两点内外分边AB成中外比.

6. 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,M是BC的中点.设$\angle B$的平分线交AC于D,又引$DE\perp BC$于E,$DF\perp BD$而交BC于F.求证:$ME=\frac{1}{4}BF$.

7. 由圆内接凸多边形的一顶点作所有的对角线把原形分为若干个三角形.试证:这些三角形的内切圆半径和,不论所取的顶点是何点皆得相同的值.

8. 设A,B,C,P四点共线.若$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{a}{b}$,求证:$b\cdot\overline{PA}+a\cdot\overline{PB}=(a+b)\overline{PC}$.

9. 设A,B,C,D,P五点共线,M,N各是AB,CD的中点.若A,B调和分隔C,D,求证:$\overline{PA}\cdot\overline{PB}+\overline{PC}\cdot\overline{PD}=2\,\overline{PM}\cdot\overline{PN}$.

10. 在$\triangle ABC$中,设$\angle A=20°$,$AB=AC=m$,$BC=n$.求证:

(1)$m^3+n^3=3m^2n$;

(2)$(m+n)^3=6mns$(式中的s是$\triangle ABC$的半周).

11. 设I是$\triangle ABC$的内心或旁心,r是内切圆半径或对应的旁切圆半径,R是外接圆半径,求证:$IA\cdot IB\cdot IC=4Rr^2$.

12. 求证:点I为$\triangle ABC$的内心或旁心之必要且充分的条件为

$$\pm IA^2\cdot BC\pm IB^2\cdot CA\pm IC^2\cdot AB=BC\cdot CA\cdot AB$$

式中左端±号的取法:全取+号用于内心的情形,第一项取+号余两项取−号用于对着A的旁心的情形,余类推.

13. 求证：若 H 非 $\triangle ABC$ 的顶点，则 H 是这三角形的垂心之必要且充分的条件为

$$\pm HB \cdot HC \cdot BC \pm HC \cdot HA \cdot CA \pm HA \cdot HB \cdot AB = BC \cdot CA \cdot AB$$

式中左端 ± 号的取法：全取 + 号用于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形的情形，第一项取“+”，余两项取“−”用于 $\angle BAC$ 为钝角的情形，余类推.

14. 求证：三角形中，外心至内心、三个旁心的距离之平方和，等于外接圆半径平方的 12 倍.

15. 求证：三角形中，内心至三个旁心的距离之平方和，等于 4 倍外接圆直径乘以外接圆直径与内切圆半径之差所得的积.

16. 求证：三角形中，内心与外心分别至三个旁心的距离之平方和的差，等于内心与外心的距离之平方的 5 倍.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A = 120°$，它的平分线交边 BC 于 D，求证：$\frac{1}{AD} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC}$.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A$ 及其外角的平分线交直线 BC 于 D 及 D'，求证：$DD' = \frac{2abc}{|b^2 - c^2|}$，其中 $a = BC, b = CA, c = AB$.

19. 求证：三角形所有内外角的平分线之倒数平方和等于$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S^2}$，其中 a, b, c 表三角形的三边，S 表面积.

20. 过三角形的重心 G 任作一直线，设交三边所在直线，于 X, Y, Z，求证：$\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ} = 0$.

21. 过正三角形的内心或旁心 I 任作一直线，设交三边所在直线于 X, Y, Z，求证：$\frac{1}{IX^2} + \frac{1}{IY^2} + \frac{1}{IZ^2} = \frac{3}{2r^2}$，其中 r 是内切圆或旁切圆的半径.

22. 设两平行线在正三角形三边所在直线上分别截下线段 x, y, z，求证：$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{2d^2}$，其中 d 是两平行线间的距离.

23. 设一线段 a 在正三角形三边所在直线上的射影为 x, y, z，求证：$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}a^2$.

24. 设互相垂直的两线段 AB 及 CD 在正三角形三边所在直线上的射影为 A_iB_i 及 $C_iD_i (i = 1,2,3)$，求证：$\sum_{i=1}^{3} \overline{A_iB_i} \cdot \overline{C_iD_i} = 0$.

25.设 S_0 表 $\triangle ABC$ 的面积，S_1,S_2,S_3 分别表边长等于 BC,CA,AB 的正三角形的面积.现在分别以 BC,CA,AB 为边向两侧作正三角形，命同在 $\triangle ABC$ 外边的三个正三角形的中心为 L,M,N，其他三个正三角形的中心为 L',M',N'，而设 $\triangle LMN$ 及 $\triangle L'M'N'$ 的面积分别为 S 及 S'.求证：

(1) $S - S' = S_0$；

(2) $S + S' = \dfrac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)$.

26.设 X,Y,Z 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 上的点，$\triangle A'B'C'$ 是 AX,BY,CZ 三线交成的三角形.若 $\dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \dfrac{1}{2}$ 或2，求证：$S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{1}{7}S_{\triangle ABC}$.

27.设 A,B,C,D 是 $\odot O(r)$ 上四点，E,F 分别是连线 AB 与 CD，AD 与 BC 的交点，求证：$EF^2 = OE^2 + OF^2 - 2r^2$.

28.设 $\odot O_1(r_1)$ 与 $\odot O_2(r_2)$ 相外切而又各内切 $\odot O(r)$ 于 A,B，试证：$AB = 2r\sqrt{\dfrac{r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}}$.

29.设大小两圆 $\odot O(r)$，$\odot O'(r')$ 内切于 A，AB 是大圆 $\odot O$ 的直径，t 是切 $\odot O$ 于 B 的切线.今在这两圆的间隙作互外切的两个内切圆 $\odot O_1$ 及 $\odot O_2$，记它们与 $\odot O$ 的切点为 X 及 Y.联结 AX,AY,AO_1,AO_2 使交 t 于 P,Q,M,N，求证：

(1) $PQ = \dfrac{2r(r-r')}{r'}$；

(2) $MN = \dfrac{4r(r-r')}{r+r'}$.

30.设在互相内切的两圆的间隙中，挨次作四个内切圆.若所作四圆除首末二者外各挨次相外切，求证：$\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{3}{r_2} + \dfrac{3}{r_3} - \dfrac{1}{r_4} = 0$，式中 r_i 以次表所作四圆的半径.(周达定理)

31.设 C 是线段 AB 上的一点(图595)，分别以 AB,BC,CA 为直径且在 AB 的同侧作半圆，则这三个半圆所围成的图形叫做鞋匠皮刀形.作 $CD \perp AB$ 而交半圆 AB 于 D；又作其他两个半圆 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 的外公切线 EF，E,F 是切点.求证：

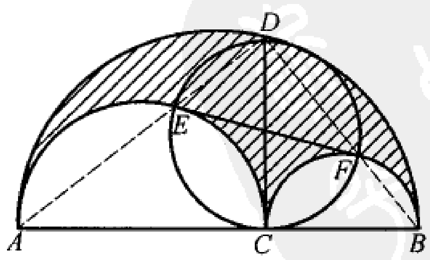


图 595

(1) C,D,E,F 四点共圆，这圆与鞋匠皮刀形等积；

(2) A, E, D 三点及 B, F, D 三点分别共线；

(3) A, B, E, F 四点共圆；

(4) CD 分鞋匠皮刀形为两形，它们有相等的内切圆，半径等于$\frac{BC \cdot CA}{2AB}$.

32. 在直角扇形 OAB 中作内切圆 $\odot C$，又在半径 OA，弧$\overparen{AB}$，圆 $\odot C$ 间的隙缝作内切圆 $\odot P$. 引 $PQ \perp OC$ 于 Q，求证：$\triangle OPQ$ 是商高三角形.

33. 设某四边形同时有外接圆 $\odot O(R)$ 和内切圆 $\odot I(r)$，求证

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}$$

式中的 d 表两圆的圆心距.

34. 设共线的六点 A, A', B, B', C, C' 适合关系

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}:\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}:\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

求证：直径分别为 $BC, CA, AB, B'C', C'A', A'B'$ 的六圆必有两个公切圆.

35. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，连线 AO, BO, CO 分别交 BC, CA, AB 于 X, Y, Z，求证：直径分别为 AX, BY, CZ 的圆同切于 $\triangle ABC$ 的九点圆.

36. 设分别过三角形的内心、旁心作每边的垂线，而为该边及过对顶点的平行线所限. 以所限线段为直径作圆，共得 12 圆. 求证：

(1) 这 12 圆同切于三角形的外接圆(提示：应用上题.)；

(2) 这 12 圆可分为三组，切于同边的四圆为一组，每组圆又各有一公切圆，这三个公切圆同与三角形的九点圆相切.

37. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，$\odot OBC$ 交 AB, AC 于 A', A''，$\odot OCA$ 交 BC, BA 于 B', B''，$\odot OAB$ 交 CA, CB 于 C', C''. 联结 $A'A'', B'B'', C'C''$ 交成一三角形，求证：这三角形的外接圆与 $\odot ABC$ 相切.

38. 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的外接圆直径，联结 BD, CD 分别交 AC, AB 于 E, F，命 A 分别关于 EF, DE, DF 的对称点为 A', B', C'. 又设 $\triangle ABC$ 的陪位中线 AK 交外接圆于 K，求证：A', B', C', D, E, F, K 七点共圆.(这圆叫做 $\triangle ABC$ 的**七点圆**. 一三角形可有三个七点圆.)

39. 设 A 是定圆 $\odot I$ 外的定点，过 A 作 $\odot I$ 的切线 AX, AY，又任意作切线交 AX, AY 于 B, C，求证：$\triangle ABC$ 的外接圆常切于某一定圆.(曼海姆定理)

40. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心，过 I 且垂直于 IA 作直线交 AB, AC 于 B', C'，余类推. 以 $B'C'$ 为弦作圆使切于 AB 及 AC，余类推. 这样共得 12 圆. 求证：

(1) 这 12 圆同切于 $\triangle ABC$ 的外接圆(提示：应用上题.)；

(2) 这 12 圆可分为三组,同切于两边(所在直线)的四圆为一组,每组圆又分别以 $\triangle ABC$ 的三个七点圆为公切圆.

41.设自三角形的顶点至某直线引垂线,又过各垂足分别引对边的平行线,求证:后三线交成的三角形与原三角形全等.

42.在上题中,若某直线通过原三角形的外心,求证:

(1) 所得三角形的外接圆内切于原三角形的九点圆;

(2) 所得三角形的九点圆内切于原三角形的外接圆.

43.设 P,Q 是 $\triangle ABC$ 的等截共轭点,联结 AP,BP,CP 分别交 BC,CA,AB 于 X,Y,Z.命 YZ,ZX,XY 的中点分别为 A',B',C',$\triangle ABC$ 的重心为 G,求证:

(1) AA',BB',CC' 三线交于一点 O;

(2) O,G,Q 三点共线,且 $\overline{OG}=\frac{1}{2}\overline{GQ}$.

44.三角形的重心 G,内心或旁心 I,对应的纳格尔点 N 三者共线,且 $\overline{IG}=\frac{1}{2}\overline{GN}$.(提示:应用上题.)

45.求证:三角形的四个纳格尔点组成垂心组,而四个热尔岗点分别为四个纳格尔点所连成四个三角形的陪位重心.

46.求证:三角形任一纳格尔点至各顶点联结线的中点所连成的三角形,与原三角形的中点三角形有一共同的内切圆或旁切圆.(斯俾克定理)(因此,三角形的中点三角形的内切圆及旁切圆又叫做原三角形的斯俾克圆.)

47.求证:三角形的泰勒圆心是垂三角形的斯皮克圆心之一.

48.求证:三角形各边中点对于垂三角形的三条西姆森线,及各高线足对于中点三角形的三条西姆森线,会于原三角形的泰勒圆心.(提示:应用复习题 3 第 55,57 题.)

49.求证:三角形的外心、泰勒圆心、垂三角形的垂心三者共线.

50.三角形的内心及旁心的垂足三角形,凡四形,每两形有两对边分别垂直,共得 12 个垂足,求证:

(1) 这 12 点分布在原三角形的六条内外平分角线上,每线上两点;

(2) 这 12 点分布在原三角形的三条中位线上,每线上四点;

(3) 这 12 点分布在四个圆上,每圆上六点,这四圆与原三角形的四个斯俾克圆同心,且每圆分别正交于原三角形的内切圆及旁切圆中的三圆.

51.设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心,N 是对应的纳格尔点.联结 AN,BN,CN 分别交 BC,CA,AB 于 X,Y,Z,引 $IP\perp BC,IQ\perp CA,IR\perp AB$ 于 P,Q,R,命 P,

Q, R 在 AX, BY, CZ 上的射影分别为 P', Q', R'. 在 AX, BY, CZ 上各取一点 A', B', C', 使 $\overline{AA'} = \overline{P'X}, \overline{BB'} = \overline{Q'Y}, \overline{CC'} = \overline{R'Z}$, 求证: $\odot A'B'C'$ 与 $\odot ABC$ 相切, 且 N 是这两圆的相似中心之一.

52. 三角形的陪位重心 K, 重心 G, 垂心等截点 H 三者共线, 且 $\overline{KG} = \frac{1}{2}\overline{GH}$. (提示: 应用第 43 题.)(所谓垂心等截点, 即垂心的等截共轭点.)

53. 求证: 三角形的中点三角形, 及垂心等截点至三顶点联结线的中点所连成的三角形, 二者的边相互交于共圆的六点, 这圆同为二者的余弦圆.

54. 两平行线 l 与 l' 交三直线 x, y, z 于 X, Y, Z 及 X', Y', Z'. 过这些交点分别作所在线的垂线, 设前三垂线交成 $\triangle ABC$, 后三垂线交成 $\triangle A'B'C'$, 求证: 这两个三角形的外接圆相切.

55. 求证: 圆心不共线的三圆, 它们两两的等幂轴共点. (这点叫做三圆的等幂心.)

56. 求证: 圆心共线且具下列条件之一的一组圆必是共轴圆系.

(1) 同正交于一定圆;

(2) 均径割一定圆.

57. 求证: 具有下列条件之一的一组圆必是共轴圆系.

(1) 同正交于两定圆;

(2) 均径割两定圆;

(3) 同正交于一定圆且均径割另一定圆.

58. 求证: 分别以一完全四边形的对角线为直径所作的三圆共轴, 它们的等幂轴就是完全四边形的垂心线. (高斯定理)

59. 求证: 不同心的三圆, 它们两两的相似圆共轴.

60. 求证: 三角形的外接圆、九点圆、重圆共轴或同心.

61. 求证: 以一固定线段为一边的所有三角形, 它们的重圆组成共幂圆系. (所谓共幂圆系是这样的一组圆: 其中每两圆的等幂轴会于一点.)

62. 设三点 A, B, C 对于 $\odot O$ 的幂为 a, b, c, 求证: 直线 ABC 或 $\odot ABC$ 切于 $\odot O$ 的必要且充分之条件为 $\pm BC\sqrt{a} \pm CA\sqrt{b} \pm AB\sqrt{c} = 0$.

63. 求证: 在三角形中, 凡与外心共线的任一对等角共轭点, 它们的垂足圆恒与九点圆相切.

64. 设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆, $\odot A, \odot B, \odot C$ 同正交于 $\odot I$,

$\odot K$,$\odot K'$ 是 $\odot A$,$\odot B$,$\odot C$ 的公切圆[①],求证:K,K' 对于 $\triangle ABC$ 的垂足圆均与 $\odot I$ 相切.

65. 求证:四圆 c_1,c_2,c_3,c_4 有一公切圆 k 的必要且充分之条件为

$$\pm t_{41}t_{23} \pm t_{42}t_{31} \pm t_{43}t_{12} = 0$$

式中的 t_{ij} 表 c_i 与 c_j 的公切线长,其为外公切线或内公切线,要看 c_i,c_j 与 k 系同态相切或异态相切[②]而定.(凯西定理)

当 k 未出现时,注意上式中的 t_{ij} 须符合下列三种情形之一:

(1) 都是外公切线;

(2) 有一足码相同的同是内公切线,其余都是外公切线;

(3) 其中一项的两条同是外公切线,其他两项的四条都是内公切线.

万一 c_i 与 c_j 无公切线,可用下两式代替

$$t_{ij} = \sqrt{d_{ij}^2 - (r_i - r_j)^2}, \bar{t}_{ij} = \sqrt{d_{ij}^2 + (r_i - r_j)^2}$$

66. 在 $\triangle ABC$ 中,设 I_i,I_j($i,j = 0,1,2,3; i \neq j$)是与 A 共线的内心或旁心.分别通过 I_i,I_j 作 AB,AC 的平行线,又分别过 B,C 作外接圆的切线,试证:这所作六线连同 BC 同切于一圆,这圆的中心是 AI_i 与外接圆的交点.余类推.

67. 设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆,AI,BI,CI 交外接圆于 L,M,N.作 $\odot L$,$\odot M$,$\odot N$ 使分别切于 BC,CA,AB,试证:这所作三圆与 $\odot I$ 有一公切圆.

68. 承上题,设 LL',MM',NN' 是外接圆的直径.作 $\odot L'$,$\odot M'$,$\odot N'$ 使分别切于 BC,CA,AB,试证:这所作三圆与 $\odot I$ 也有一公切圆.

69. 设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆,AI,BI,CI 分别交 BC,CA,AB 于 D,E,F.分别以 AD,BE,CF 为弦作圆使分别切于 BC,CA,AB,试证:这所作三圆与 $\odot I$ 有一公切圆.

70. 设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆.在 AI,BI,CI 三线上各任取一点 X,Y,Z 两两相连,并分别以 YZ,ZX,XY 的中点为心作圆使分别切于 BC,CA,AB,试证:这所作三圆与 $\odot I$ 有一公切圆.

71. 设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆.在 AI,BI,CI 三线上各取一点 A',B',C',使 I 是 $\triangle A'B'C'$ 的重心(怎样作?),试证:分别以 A',B',C' 为心且分别切于 BC,CA,AB 的三圆与 $\odot I$ 有一公切圆.

72. 设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆.在 AI,BI,CI 三线上各取一点 A',

---

① 此时 $\odot A$,$\odot B$,$\odot C$ 必两两相切,故仅有两个公切圆.

② 两圆与同一圆相切,若均是外切或内切,则称为**同态相切**;如果是一外切一内切,便称为异态相切.

B'，C'，使 I 是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心，试证：分别以 A'，B'，C' 为心且分别切于 BC，CA，AB 的三圆与 $\odot I$ 有一公切圆，这公切圆与 $\odot I$ 的切点亦即 $\triangle ABC$ 的九点圆与 $\odot I$ 的切点.

73. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\odot I_0(r_0)$，$\odot I_1(r_1)$，$\odot I_2(r_2)$，$\odot I_3(r_3)$ 依次是内切圆及对着 A，B，C 的旁切圆. 命 $\odot I_i$，$\odot I_j$，$\odot I_k$ 两两的第四公切线（即除 BC，CA，AB 外的公切线）交成的三角形为 $\triangle_i$，试证 $\triangle I_iI_jI_k$ 的外心 P_l 是 $\triangle_l$ 的内心或旁心，而 $\triangle_l$ 中以 P_l 为心的内切圆或旁切圆的半径分别为：

(1) $\rho_0 = 2R + r_0 = \dfrac{1}{2}(r_0 + r_1 + r_2 + r_3)$；

(2) $\rho_1 = |2R - r_1| = \dfrac{1}{2}|-r_0 - r_1 + r_2 + r_3|$；

(3) $\rho_2 = |2R - r_2| = \dfrac{1}{2}|-r_0 + r_1 - r_2 + r_3|$；

(4) $\rho_3 = |2R - r_3| = \dfrac{1}{2}|-r_0 + r_1 + r_2 - r_3|$.

式中的 R 表 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

74. 承上题，求证：

(1) 四圆 $\odot I_i(\rho_i)$ 有一公切圆 c；

(2) 四圆 $\odot P_i(\rho_i)$ 也有一公切圆 c'；

(3) c 与 c' 的半径等于 $\dfrac{5}{2}R$.

75. 求证：三角形的三条中位线将原形划分为四个全等三角形. 在这四个三角形中，各内切圆有一公切圆，对应的旁切圆也各有一公切圆，这所得的四个公切圆又同原三角形的中点三角形的九点圆相切.

76. 作一圆的四条切线使交成四个三角形，试证：它们的外接圆有一公切圆.

77. 设四边形有内切圆或旁切圆 $\odot O$，求证：

(1) 直径分别为四边的圆有两公切圆；

(2) 分别以四边中心为心且正交于 $\odot O$ 的圆也有两公切圆，这两公切圆分别与前两公切圆同心.

78. 一三角形的内外角三等分线共 12 条，求证：

(1) 在六条内角三等分线中，与每边相邻的两线各交于一点，这三交点是一正三角形的顶点（莫利定理）；

(2) 在六条外角三等分线中，与每边相邻的两线各交于一点，这三交点也是一正三角形的顶点；

(3) 在每一内角的两条三等分线及不相邻两外角的四条三等分线中，与每边相邻的两线各交于一点，这三交点也是一正三角形的顶点.（提示：应用习题16第15题.）

79. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，L,M,N 分别是 BC,CA,AB 三边的中点，X,Y,Z 分别是 OL,OM,ON 三线上的点. 若 $\frac{\overline{XO}}{\overline{XL}}=\frac{\overline{YO}}{\overline{YM}}=\frac{\overline{ZO}}{\overline{ZN}}$，求证：$AX,BY,CZ$ 三线与 $\triangle ABC$ 的欧拉线共点或互相平行.

80. 求证：三角形垂心等截点的等角共轭点在欧拉线上.

81. 求证：三角形诸热尔岗点及纳格尔点的等角共轭点分别是外接圆与内切圆及外接圆与旁切圆的相似中心.

82. 求证：三角形每边的中点与这边的高线中点之连线必交于陪位重心.（提示：应用 §60 例题 77.）

83. 一点 P 与 $\triangle ABC$ 各顶点相连，在连线 PA,PB,PC 上各取一点 A',B',C'，使 $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}=\overline{PC}\cdot\overline{PC'}$，过 A',B',C' 依次作 PA,PB,PC 的垂线，设分别交 BC,CA,AB 于 X,Y,Z，试证：X,Y,Z 三点共线.

84. 在 $\triangle ABC$ 中，设一点 P 在 BC,CA,AB 上的射影为 X,Y,Z. 今在 PX,PY,PZ 三线上各取一点 X',Y',Z'，使 $\overline{PX}\cdot\overline{PX'}=\overline{PY}\cdot\overline{PY'}=\overline{PZ}\cdot\overline{PZ'}$，试证：$AX',BY',CZ'$ 三线共点或互相平行.

85. 设 P,Q 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上两点，A',B',C' 是 Q 关于 BC,CA,AB 的对称点，求证：PA' 与 BC，PB' 与 CA，PC' 与 AB 的交点 X,Y,Z 共线.

86. 将圆上四点两两连成四个三角形，而这圆上任两点对于该四个三角形中每形的两条西姆森线各交于一点，试证：这四交点共线.

87. 求证：完全四边形的密克点在对角三角形的九点圆上，而且该密克点对于对角三角形的中点三角形的西姆森线重合于完全四边形的西姆森线.

88. 已知 $\triangle ABC$ 及两点 P,P'. 设 AP,BP,CP 及 AP',BP',CP' 交 $\odot ABC$ 于 D,E,F 及 D',E',F'，而 DD' 与 BC，EE' 与 CA，FF' 与 AB 分别交于 X,Y,Z，求证：X,Y,Z 三点共线.

89. 设 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆，它切 BC,CA,AB 于 D,E,F. 任取一点 P，联结 DP,EP,FP 使交 $\odot I$ 于 X,Y,Z，求证：AX,BY,CZ 三线共点或互相平行.

90. 设一直线被三角形每角的内外平分线各截下一线段，求证：各顶点分别与所截的对应线段的中点之连线交于三角形的外接圆上一点.

91. 求证：一直线关于三角形各边的对称线所交成的三角形，与原三角形是

透视的，它们的透视中心在原三角形的外接圆上.

92. 求证：两个真正相似但不是位似的三角形，若它们的对应顶点连线共点，则这点必是它们的外接圆的交点之一.

93. 设自一点向一圆内接四边形的四边及两对角线(所在直线)引垂线，求证：两对角线上的垂足是顺次联结四边上的垂足所成四边形的等角共轭点.

94. 求证：四边形任一对等角共轭点联结线的中点与两对角线的中点共线.

95. 设 P, Q 是四边形 $ABCD$ 的等角共轭点，求证：

(1) $\triangle PAB, \triangle QBC, \triangle PCD, \triangle QDA$ 的垂心共线；

(2) $\triangle QAB, \triangle PBC, \triangle QCD, \triangle PDA$ 的垂心也共线；

(3) 以上所得两直线互相平行.

96. 在四边形 $ABCD$ 中，设 $AC \perp BD$，求证：两对角线的等角线交于一点 O，且 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODA$ 的垂心共线.

97. 求证：在完全四边形的每对对节中，自此节的中点向他节引垂线，所引两垂线的交点必落在完全四边形的垂心线上.

98. 完全四边形各边共交成四个三角形，若通过每形的垂心及任两顶点作圆，试证：所作 12 个圆除三三交于该四个三角形的垂心外，又三三交于其他四点，这四点同在完全四边形的垂心线上.

99. 在四边形 $ABCD$ 中，A', C' 是 BD 上的两点，B', D' 是 AC 上的两点. 若 $A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, C'D' \parallel CD$，求证：$D'A' \parallel DA$，且 $A'B'$ 与 CD，$B'C'$ 与 DA，$C'D'$ 与 AB，$D'A'$ 与 BC 的交点共线.

100. 在上题中，若 $A'B'$ 与 AB，$B'C'$ 与 BC，$C'D'$ 与 CD 的交点共线，求证：$D'A'$ 与 DA 的交点也在此线上，此外仍保持其余的结论.

101. 已知 $\triangle ABC$ 及三点 $P_i(i = 1,2,3)$. 联结 AP_i, BP_i, CP_i 设依次交 BC，CA，AB 于 X_i, Y_i, Z_i，而命 $\dfrac{\overline{X_iB}}{\overline{X_iC}} = x_i, \dfrac{\overline{Y_iC}}{\overline{Y_iA}} = y_i, \dfrac{\overline{Z_iA}}{\overline{Z_iB}} = z_i$，求证：三点 P_i 共线的必要且充分之条件为下列三式之一成立.

(1) $\dfrac{x_2 - x_3}{z_1} + \dfrac{x_3 - x_1}{z_2} + \dfrac{x_1 - x_2}{z_3} = 0$;

(2) $\dfrac{y_2 - y_3}{x_1} + \dfrac{y_3 - y_1}{x_2} + \dfrac{y_1 - y_2}{x_3} = 0$;

(3) $\dfrac{z_2 - z_3}{y_1} + \dfrac{z_3 - z_1}{y_2} + \dfrac{z_1 - z_2}{y_3} = 0$.

102. 设三直线 $l_i(i = 1,2,3)$ 交 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 或其延长线于 X_i，

Y_i, Z_i,而命$\frac{\overline{X_iB}}{\overline{X_iC}} = x_i, \frac{\overline{Y_iC}}{\overline{Y_iA}} = y_i, \frac{\overline{Z_iA}}{\overline{Z_iB}} = z_i$,求证:三直线 l_i 共点或互相平行的必要且充分之条件为下列三式之一成立.

(1) $\frac{x_2 - x_3}{y_1} + \frac{x_3 - x_1}{y_2} + \frac{x_1 - x_2}{y_3} = 0$;

(2) $\frac{y_2 - y_3}{z_1} + \frac{y_3 - y_1}{z_2} + \frac{y_1 - y_2}{z_3} = 0$;

(3) $\frac{z_2 - z_3}{x_1} + \frac{z_3 - z_1}{x_2} + \frac{z_1 - z_2}{x_3} = 0$.

103.设直线 l 交 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 或其延长线于 X, Y, Z,而命$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = x, \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = y, \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = z$,求证:直线 l 通过 $\triangle ABC$ 的重心的必要且充分之条件为下列三式之一成立.

(1) $y + \frac{1}{z} = -1$;

(2) $z + \frac{1}{x} = -1$;

(3) $x + \frac{1}{y} = -1$.

104.设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,X, Y, Z 分别是 AG, BG, CG 三线上的点,而命$\frac{\overline{XA}}{\overline{XG}} = x, \frac{\overline{YB}}{\overline{YG}} = y, \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZG}} = z$,求证:$X, Y, Z$ 三点共线的必要且充分之条件为 $x + y + z = 3$.

105.设 S 是 $\triangle ABC$ 的等力点,X 与 X', Y 与 Y', Z 与 Z' 分别是直线 BC, CA, AB 上的点,合于

$$\begin{cases}\overline{AC} \cdot \overline{AY} = \overline{AB} \cdot \overline{AZ'} = k \cdot \overline{AS}^2 \\ \overline{BA} \cdot \overline{BZ} = \overline{BC} \cdot \overline{BX'} = k \cdot \overline{BS}^2 \\ \overline{CB} \cdot \overline{CX} = \overline{CA} \cdot \overline{CY'} = k \cdot \overline{CS}^2\end{cases}$$

k 是一常数,求证:X, X', Y, Y', Z, Z' 六点共圆.(这样所得的圆属于 $\triangle ABC$ 的塔刻圆系.)

106.设 Ω, Ω' 是 $\triangle ABC$ 的正负布罗卡尔点,Y 与 Z', Z 与 X', X 与 Y' 分别是直线 BC, CA, AB 上的点,合于

$$\begin{cases}\Omega Y = \Omega B, \Omega Z = \Omega C, \Omega X = \Omega A \\ \Omega' Z' = \Omega' C, \Omega' X' = \Omega' A, \Omega' Y' = \Omega' B\end{cases}$$

求证：X,X',Y,Y',Z,Z' 六点共圆.(这圆也属于 $\triangle ABC$ 的塔刻圆系.)

107. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，K 是陪位重心，Ω,Ω' 是正负布罗卡尔点，A_1，B_1，C_1 分别是 $B\Omega$ 与 $C\Omega'$，$C\Omega$ 与 $A\Omega'$，$A\Omega$ 与 $B\Omega'$ 的交点，A_2，B_2，C_2 分别是 $\odot\Omega CA$ 与 $\odot\Omega' AB$，$\odot\Omega AB$ 与 $\odot\Omega' BC$，$\odot\Omega BC$ 与 $\odot\Omega' CA$ 的交点，求证：O,K，$\Omega,\Omega',A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2$ 十点共圆，这圆与 $\triangle ABC$ 的三乘比圆同心.(所得的圆叫做 $\triangle ABC$ 的布罗卡尔圆.)

108. 承上题，求证：

(1) 自 Ω 引线平行于 BC,CA,AB 而分别交 $\odot\Omega BC$，$\odot\Omega CA$，$\odot\Omega AB$ 于 X,Y，Z 三点，又自 Ω' 引线平行于 BC,CA,AB 而分别交 $\odot\Omega' BC$，$\odot\Omega' CA$，$\odot\Omega' AB$ 于 X',Y',Z' 三点，则 $X,X',Y,Y',Z,Z',\Omega,\Omega'$ 八点共圆；

(2) $\triangle ABC$ 的外心，垂心及 A_2,B_2,C_2 的等角共轭点凡五点共圆；

(3) 设 $\odot\Omega CA$，$\odot\Omega' AB$ 交 BC 于 L,L'. 引 LP 平行于 BA 而交 AC 于 P，又引 $L'P'$ 平行于 CA 而交 AB 于 P'. 在 $\odot ABC$ 中作一弦 AA' 使平行于 $\Omega\Omega'$，则 A,A'，L,L',P,P' 六点共圆. 余类推.

109. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，I 是内心或旁心，N 是对应的纳格尔点. 联结 AI,BI,CI 交 $\odot ABC$ 于 A',B',C'，命这三点分别关于 BC,CA,AB 的对称点为 A_2,B_2,C_2. 引 $NA_1\perp AH$，$NB_1\perp BH$，$NC_1\perp CH$ 于 A_1,B_1,C_1，则 A_1,B_1,C_1,A_2，B_2,C_2,H,N 八点共圆.(富赫曼定理)

110. 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是任意点. 联结 AP,BP,CP 交 $\odot ABC$ 于 A'，B',C'，命这三点分别关于 BC,CA,AB 的对称点为 A_2,B_2,C_2，又联结 A_2P，B_2P,C_2P 分别交 AH,BH,CH 于 A_1,B_1,C_1，求证：$A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2,H$ 七点共圆.(哈格定理)

111. 在调和四边形 $ABCD$ 中：设 c_1 是过 D 而切 AB 于 A 的圆，c_2 是过 A 而切 BC 于 B 的圆，c_3 是过 B 而切 CD 于 C 的圆，c_4 是过 C 而切 DA 于 D 的圆；又设 c'_1 是过 B 而切 DA 于 A 的圆，c'_2 是过 C 而切 AB 于 B 的圆，c'_3 是过 D 而切 BC 于 C 的圆，c'_4 是过 A 而切 CD 于 D 的圆. 求证：

(1) c_1,c'_1,c_3,c'_3 四圆交于一点 M，c_2,c'_2,c_4,c'_4 四圆交于一点 N，M,N 是 $ABCD$ 的等角共轭点；

(2) c_1,c_2,c_3,c_4 四圆交于一点 Ω，c'_1,c'_2,c'_3,c'_4 四圆交于一点 Ω'，Ω,Ω' 也是 $ABCD$ 的等角共轭点；

(3) $A\Omega$ 与 $B\Omega'$，$B\Omega$ 与 $C\Omega'$，$C\Omega$ 与 $D\Omega'$，$D\Omega$ 与 $A\Omega'$，AC 与 BD 的交点 A_1,B_1，C_1,D_1,P 连同 M,N,Ω,Ω' 凡九点共圆；

(4) $A\Omega$ 与 c'_1，$A\Omega'$ 与 c_1，… 的第二交点 X，X'，… 连同 Ω，Ω' 凡十点共圆.
(所谓调和四边形是这样的四边形：它有外接圆而且对边的乘积彼此相等.)

112. 设过调和四边形的对角线交点引直线平行于每边而与两邻边相交，求证：所得八交点共圆.

113. 求证：在调和四边形 $ABCD$ 中，A'，C' 是 AC 上的两点，B'，D' 是 BD 上的两点. 若四边形 $A'B'C'D'$ 与 $ABCD$ 有三对对应边各相平行，则第四对对应边也相平行，而非对应边(所在直线)相交于 12 点，其中八点共圆，四点共线.

114. 求证：在上题中，如果 A'，C' 是 BD 上的两点，B'，D' 是 AC 上的两点，其他条件不改，那么仍有相仿的结论.

115. 求证：完全四边形各边共交成四个三角形，它们的内心、旁心共 16 点. 在每个三角形中，分别以内心、旁心两两的联结线为直径作图，如此一共可得 24 个圆. 这 24 个圆，除三三交于各三角形的内心、旁心外，又三三交于其他 16 点. 这 16 点连同各三角形的内心、旁心合计 32 点，分布在八个圆上，每圆上有八点. 这八圆组成两组互相正交的共轴圆，每组含四圆，它们的等幂轴同过完全四边形的密克点.

116. 求证：设 P，Q 是四边形 $ABCD$ 的等角共轭点. 在 $\triangle PAB$，$\triangle QBC$，$\triangle PCD$，$\triangle QDA$ 中，分别以每个三角形的内心、旁心两两的联结线为直径作图，如此一共可得 24 个圆. 这 24 圆，除三三交于各三角形的内心、旁心外，又三三会于其他 16 点. 这 16 点连同各三角形的内心、旁心合计 32 点，分布在八个圆上，每圆上有八点.

117. 设 A，B，是两定点. 过 B 引割线交已知圆 $\odot O$ 于 C，D；联结 AC，AD 交 $\odot O$ 于 E，F，求 $\triangle AEF$ 的外心的轨迹.

118. 设 P 是已知圆 $\odot O$ 内的定点，AB 是过点 P 的定弦. 今过点 P 任作一弦 CD，求 $\odot PAC$ 与 $\odot PBD$ 的第二交点的轨迹.

119. 设 A，B，C，D 是共圆的四定点，u 是通过 A，B 的任意圆，v 是通过 C，D 且与 u 相切的圆，求 u 与 v 的切点的轨迹.

120. 过两定圆的一交点 P 引正交的两直线分别交两圆于 X，Y，求 XY 的中点的轨迹.

121. 在 $\square ABCD$ 中，设边 AB 固定，边 AD 等于定长，求 $\angle C$ 与 $\angle D$ 的平分线之交点的轨迹.

122. 在面积一定的 $\triangle ABC$ 中，设点 A 固定且 $\angle BAC$ 等于已知角，点 B 在一条定直线上移动，求点 C 的轨迹.

123. 设 a，b 是两条已知直线，B 是 b 上的动点. 引 $BA \perp a$ 于 A，$BP \parallel a$，且

使 $AB+BP$ 等于定长，求点 P 的轨迹.

124. 设两条已知直线 a,b 交于 O，动点 P 在它们上面的射影为 A,B，若 $OA+OB$ 等于定长，求点 P 的轨迹.

125. 求对定等腰三角形两腰有相等视角的点的轨迹.

126. 求对定正方形中指定的三边有相等视角的点的轨迹.

127. 设定圆的弦 AB 对已知点 P 张开直角，求 AB 的极点的轨迹.

128. 设 AB 是定半圆形的直径，AX 是异于 AB 的定直线，$BC\perp AX$ 于 C. 以半圆上任意点 P 为心作圆使切于 AX，而自 A,C 向所作圆各另引切线，试求这两条切线的交点 Q 的轨迹.（提示：$\angle APC$ 有一定大小.）

129. 在已知圆 $\odot O$ 中，AB 是不过点 O 的定弦. 以 $\odot O$ 上某点 P 为心作圆使切于直线 AB，而自 A,B 向所作圆各另引切线，命这两条切线的交点为 Q. 设令点 P 在 $\odot O$ 上自原位置起移动到半周而止，试求点 Q 的轨迹.

130. 设 A,B,C 是三个定点，P 是适合关系 $a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2=k$ 的点，其中 a,b,c,k 都是常数，求点 P 的轨迹.

131. 设 A,B,C,D 是四个定点，P 是适合关系 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=k$ 的点，k 是常数，求点 P 的轨迹.

132. 已知一正 $2n$ 边形，它的边依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$. 设 P 是适合关系 $d_1d_{n+1}+d_2d_{n+2}+\cdots+d_nd_{2n}=k$ 的点，其中 d_i 是 P 与 a_i 的距离，k 是常数，求点 P 的轨迹.

133. 已知 $\triangle ABC$，直线 l. 设动直线 p 垂直 l 于 O，交 $\triangle ABC$ 的周界于 Q,R. 在 p 上取点 P，使 $OP=\frac{1}{2}QR$，求点 P 的轨迹，并证明这轨迹所包围的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积.

134. 给定一梯形，求作一直线平行于它的底边且把它分为两个相似的梯形.

135. 已知一边的长，求作一个矩形，使它的四边（所在直线）分别通过四个定点.

136. 过一定点求作一直线，使与另外两定点的距离和等于定长.

137. 自已知圆上两定点求作两平行弦，使它们的积等于一已知线段的平方.

138. 自已知圆上两定点求作两平行弦，使它们的和等于定长.

139. 设 A,B,C 是已知圆上三定点，求作互相平行的三弦 AA',BB',CC'，使 $\overline{AA'}=\overline{BB'}+\overline{CC'}$.（提示：作出 A 关于 BC 的中点之对称点.）

140. 设一定三角形的两底角都是锐角，求作已知对角线长的矩形，使它有一边落在定三角形的底边上，其他两顶点分别落在两腰上.

141. 已知 $\triangle ABC$ 及线段 r，求过点 A 作直线 l，并引 $BM \perp l$ 于 M，$CN \perp l$ 于 N，使得 $BM^2 - CN^2 = r^2$.（提示：平移 CN 至 PM，设法确定点 P.）

142. 已知顶角的平分线、两底角的差、两腰的和是底边的 3 倍，求作三角形.（提示：作出底边的高.）

143. 已知一边、对角的平分线、另两边的和，求作三角形.

144. 已知 $\triangle A'B'C'$，$\odot O$，两点 P，Q，求作 $\triangle ABC$，使真正全等于 $\triangle A'B'C'$，且 BC 切于 $\odot O$，AB，AC 分别通过 P，Q.（提示：过 A 平行于 BC 的直线通过一定点.）

145. 已知两底角的差、底边的高、两腰的积，求作三角形.（提示：以底边的中垂线为轴施行反射，又外接圆的大小可定.）

146. 已知 $\triangle ABC$，求过定点 P 作直线 l，交 BC，CA，AB 于 X，Y，Z，使 $XY = YZ$.

147. 已知中心不共线的三圆 $\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$，在这三圆上各求一点 A_1，A_2，A_3，使 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle O_1O_2O_3$ 真正全等.

148. 求把一已知三角形裁去一部分，使剩下的是一个极大的正方形.（提示：参看习题 12 第 24 题，但注意该题不适用于钝角三角形.）

149. 已知一圆及不在圆上的三点，求作这圆的内接三角形，使它的三边或其延长线分别通过该三点.（卡斯蒂隆问题）

150. 已知一圆及不与圆相切的三条直线，求作这圆的外切三角形，使它的顶点分别落在该三条直线上.（提示：作出三已知直线的极点.）

151. 求作三圆使其两两相切，并分别切一已知圆于三定点.（提示：先作两两相切于三定点的三圆.）

152. 求作所设圆的内接梯形，已知它的周长及一底角.

153. 已知两腰及两对角线，求作梯形.（提示：任一底边的中垂线分另一底边于一定的分比，可用放大法，或用代数分析法计算一底边的长.）

附　录

附录一　朋力点

§1　绪　言

在初等近世几何学上，关于三角形之定理中，除新颖之布罗卡尔图象(Brocard configuration)外，最著名者莫过于费尔巴哈定理(Feuerbach's theorem)①.此定理乃德国埃尔兰根之教师名费尔巴哈(Karl Wilhelm Feuerbach，1800—1834)者于1822年所首先发现，载于其著作中，世称之为费氏定理.数年后，德国柏林大学教授施泰纳(Steiner)复独自发现之，唯无证明，近百年中，又经屡次发现，因是乃嚣著于世焉.

费氏对此定理之证明，后以代数之方法计算得之，其他诸名家如哈维(Harvey)等亦大都依据代数之方法作证；而丐纯(J.Mention)则用纯粹几何法，直接由图形以证之；更有泰勒(Taylor)等则利用反演法(inversion)②之原理以求证.每种方法，各着重于某一方面，因之，益增吾人对此定理之欣赏.

1905年，奉田(Fontené)乃重新由另一方面进行，以探究此定理之证法，而获决定九点圆③上某定点之原则.于此，不但给予费氏定理以有力之考证，且更推得其扩张之情形④.著者对于费氏定理，一方既赞叹其美妙而加以欣赏不止，一方则欲探求其更普遍之图象.经十余年研究之结果，共得若干种推广之情形，种种图象，莫不包容费氏定理于其中.本文所述，即属此中图象之一部.此于初等近世几何学上，其价值若何，尚有待于海内学者之评定，唯著者学浅识稚非敢谓追并于先贤，盖欲抛砖而引玉耳.

① 见 §3(3).
② 反演法在近世几何学上为重要法则之一，其用甚妙.
③ 见 §2(3).
④ 见 §3(4)①.

本文之内容:系先论述费氏定理及其有关之定理,继即讨论三角形之燧心、羽心、连环点、朋力点等之性质.诸名词皆系著者所杜撰,亦为本文之主要题材,前三者本皆归属于后者之范畴中,而后者则为费氏定理之推广情形之一.今吾人先由特例之研究,而后推及普遍之情形,此非特合于思考之途径,抑亦增加研究之趣味,尤以连环点图象之精致,内容之丰富,不可不加以详细之论述,冀使吾人对之获得深刻之印象.因之,吾人对于朋力点之出现,乃不致觉其过于突兀,且觉其实为理之所当然.后次,更探索三角形之羔点之作图法,其理论略涉及射影几何学中之若干知识,似已超出本文之范围,但吾人得赖彼之启导与帮助,因而引出朋力共轭点之概念;至是,朋力点之规矩作图法乃得而解决,此对于朋力点图象之研究,始称圆满无缺.最后,则阐明由朋力点所引出之四圆有一公切圆之特性,并由是衍得深饶兴味之诸例,因更获知费氏定理由另数种观点所得之扩张图象.观此,吾人实感几何图象竟如同一网中各线之互相联系,而赞叹其图形组织之调和及微妙不置.

今先声明:本文乃系假定读者对于初等近世几何学之知识已具有相当根柢者,故关于应用若干已知之事实,不再详加证明或叙述.如是,乃可省去若干累赘而俾读者得一简洁之印象,否则必致庞杂而仍不免"挂一漏万"之弊,殊非得当也.虽然,仍乞读者谅之.

§2 等角共轭点

(1) **定义** 设于 $\triangle ABC$ 平面上任取一点 P,则恒有一点 P' 能适合下列之关系者

$$\measuredangle PAB=-\measuredangle P'AC,\measuredangle PBC=-\measuredangle P'BA,\measuredangle PCA=-\measuredangle P'CB$$ [①]

此时,称 P 与 P' 为关于 $\triangle ABC$ 之等角共轭点(isogonally conjugates).如是,平面上之点皆可配合成对,使为等角共轭点,唯当 P 趋近于 A 时,则 P' 亦渐趋近于边 BC;P 合于 A,P' 即在 BC 上,反之亦然,故三角形之顶点与对边上任何点皆为等角共轭点,此唯一之例外也.又当 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上之点时,则 P' 即为无穷远点(points at infinity),但其配合系一与一的,此吾人之应注意者.

等角共轭点乃为近世几何学上一重要之资料,吾人对之宜先有相当之认识.

---

① $\measuredangle$ 乃系向角(directed angle)之记号.在近世几何学上,研究角之性质时,采用向角之概念,实为一大利器,且极方便.

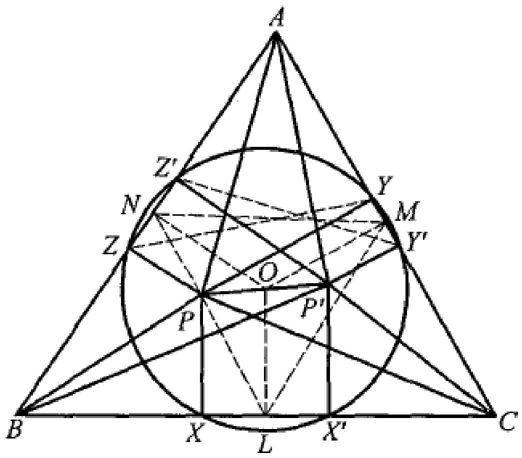


图 1

定理　三角形任两等角共轭点至三边之垂距成反比例.或云:两等角共轭点至每边之垂距积彼此相等.

证明　如图 1,设 P 及 P' 至 $\triangle ABC$ 三边之垂趾分别为 X, Y, Z 及 X', Y', Z',则由等角之关系,易知

$\triangle PCX \backsim \triangle P'CY'$, $\triangle PCY \backsim \triangle P'CX'$①

因有

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{P'Y'}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{P'C}} \quad \frac{\overline{PY}}{\overline{P'X'}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{P'C}}②$$

从而

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{P'Y'}} = \frac{\overline{PY}}{\overline{P'X'}}$$

或

$$\overline{PX} : \overline{PY} = \frac{1}{\overline{P'X'}} : \frac{1}{\overline{P'Y'}}$$

同理,得

$$\overline{PY} : \overline{PZ} = \frac{1}{\overline{P'Y'}} : \frac{1}{\overline{P'Z'}}$$

故

$$\overline{PX} : \overline{PY} : \overline{PZ} = \frac{1}{\overline{P'X'}} : \frac{1}{\overline{P'Y'}} : \frac{1}{\overline{P'Z'}}$$

或

$$\overline{PX} \cdot \overline{P'X'} = \overline{PY} \cdot \overline{P'Y'} = \overline{PZ} \cdot \overline{P'Z'}$$

(2)① **戴维斯定理**(Davies' theorem)　三角形三边上各有两点,设每两边上之四点均各为共圆点,则此六点必共圆.

证明　借用图 1,命三角形为 $\triangle ABC$,所设之六点顺次为 X, X', Y, Y', Z, Z'.若该三圆不相合为一,则 XX', YY', ZZ' 即为彼等两两之根轴(radical axis),故 XX', YY', ZZ' 共点.但此结论为谬误的,盖因 XX', YY', ZZ' 乃 $\triangle ABC$ 之三边,不能共点也,是则该三圆非相合不可,即 X, X', Y, Y', Z, Z' 六点共圆.

② **定义**　设由一点至已知三角形三边作垂线,则以三垂趾为顶点之三角形,称为该点对于已知三角形之垂趾三角形(pedal triangle);垂趾三角形之外接圆称为垂趾圆(pedal circle).

定理　三角形任一对等角共轭点皆各有同一之垂趾圆,其心即为该对等

① $\backsim$为反向相似(inverse similitude)之记号.

② 线段上加一横线,乃表示该线段为有向线段,有向线段是近世几何学中一重要之元素(element),为用甚大.

角共轭点连线之中点.

证明 沿用图 1,由共圆点之关系及等角共轭点之定义,有

$$\measuredangle YY'Z' = \measuredangle AY'Z' = \measuredangle AP'Z' = \measuredangle P'AZ' + \measuredangle AZ'P' = -\measuredangle PAY + \measuredangle PYA =$$
$$\measuredangle PYA + \measuredangle YAP = \measuredangle YPA = \measuredangle YZA = \measuredangle YZZ'$$

故 Y, Y', Z, Z' 四点共圆,同理亦可证知 Z, Z', X, X' 及 X, X', Y, Y' 各为共圆点.于是由(2)① 定理即知 X, X', Y, Y', Z, Z' 六点共圆矣.

至于该圆之心显然同时在 XX', YY', ZZ' 之中垂线(perpendicular lisector)上,故必为 PP' 之中点 O.

③ **定理** 以等角共轭点为西焦点(focus)恒有一锥线俾切于三角形之三边,此锥线之外辅圆(external auxiliary circle)[①]即该对等角共轭点之垂趾圆.

凡曾习近世几何学者,对此定理类皆知之.

(3) **庞斯列定理**(Poncelet's theorem) 三角形三边之中点,三高线趾,垂心(orthocentrer)至三顶点距离之中点.如是凡九点共圆,此圆称为九点圆(nine-point circle).

证明 如图 2,设 $\triangle ABC$ 之三边中点顺次为 L, M, N 三高线趾为 D, E, F,垂心 H 至三顶点距离之中点为 P, Q, R,命 $\triangle ABC$ 之外心(circumcenter)为 O,则 L, M, N 显然即为 O 至三边之垂趾.然 H 与 O 吾人甚易知之为等角共轭点,故 D, E, F, L, M, N 六点共圆((2)②).亦即云:三角形之三高线趾与三边之中点共圆.

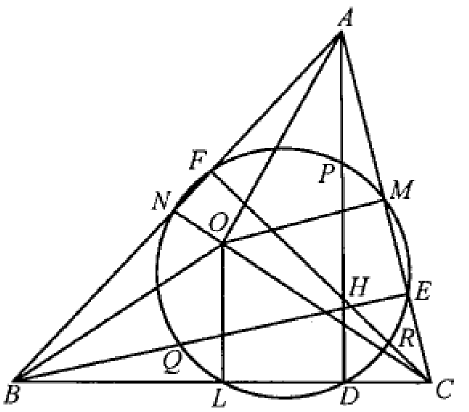


图 2

吾人试以 $\triangle HBC$ 视之,则由前证可知 D, E, F, L, R, Q 六点共圆;再以 $\triangle HCA$ 视之,又知 D, E, F, M, P, R 六点共圆.

观是,即 $D, E, F, L, M, N, P, Q, R$ 九点共圆也.

系 三角形之九点圆半径,等于外半径之一半.

① 以锥线之横轴及纵轴(被锥线所限之部分)为直径各作圆,前者称为外辅圆,后者称为内辅圆(internal auxiliary circle),统称之为辅圆(auxiliary circles),外辅圆恒为实圆或直线,内辅圆可为实圆或虚圆(imaginary circle).

§3　费尔巴哈定理

(1) 对于费氏定理,为欲得一最直接且简单之证明,兹先论述一二重要之定理,并为以后引用之张本.

定义　设由定点 P 引一动线交定圆 k 于 X, Y(图 3),则吾人已知

$$\overline{PX} \cdot \overline{PY} = p$$

而为一常数(constant),此 p 值称为 P 对于圆 k 之幂(power),幂之方根称为幂根.当 P 在圆外时,幂根之值为实,可以 P 至圆之切线长表之;如 P 在圆内,则幂根之值为虚,可以过点 P 之极小弦(minimum chord)之半乘以 $\sqrt{-1}$ 表之;若 P 在圆上,则幂根之值为零矣.

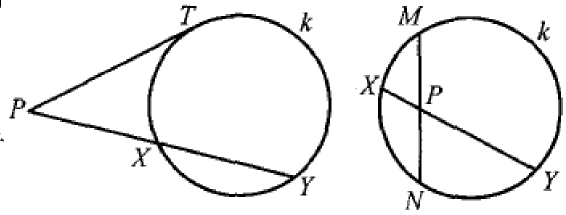


图 3

定理　设 A, B, C 三点对于圆 k 之幂根各为 a, b, c,则 $\odot ABC$ 与圆 k 相切(图 4)之充要条件[①]为

$$\pm a \cdot \overline{BC} \pm b \cdot \overline{CA} \pm c \cdot \overline{AB} = 0$$

此关系式特称之为幂根式.

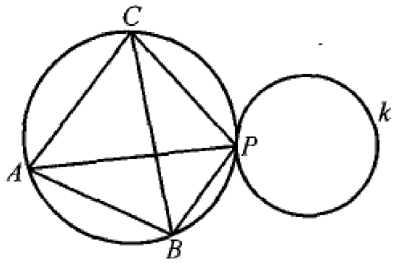


图 4

证明　在上之关系式中,假定 a, b, c 均视为正量,如是则此式之三项必不能同时为正或负.今设第一项取正,余二项取负,就此情形以证之,至其他之情形,仅须将此证法略加修改,即可适用,故不再述.此时,上之关系式可书如

$$a \cdot \overline{BC} = b \cdot \overline{CA} + c \cdot \overline{AB} \qquad ①$$

设一动点 P 移动,恒有

$$\overline{PB} : \overline{PC} = b : c$$

则依阿波罗尼奥斯定理(Apollonius' theorem)[②],知点 P 之轨迹为一圆,且与 $\odot ABC$ 直交(intersect orthogonally);其两交点中,一与 A 分在 BC 之两侧,他一则否,今命前者为点 P.若吾人视 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ 均为正量,则由托勒密定理

① 所谓充要条件者,意即原定理及逆定理皆真也.

② 此定理在普通之几何学书籍大都载有.

(Ptolemy's theorem)[①]有

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}=\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}$$

但
$$\overline{PB}:b=\overline{PC}:c=u$$

或
$$\overline{PB}=ub,\overline{PC}=uc$$

故

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}=u(b\cdot\overline{CA}+c\cdot\overline{AB}) \quad ②$$

以式 ① 与式 ② 相较,得

$$\overline{PA}=ua$$

由是
$$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=a:b:c$$

观此,吾人依据凯西(Casey)关于共轴圆(coaxial circles)之定理[②],即知 ⊙ABC 与零圆(null circle)P 及圆 k 共轴;易言之,即 ⊙ABC 与圆 k 相切于点 P.

逆之,设 ⊙ABC 与圆 k 相切于点 P,假定 A 与 P 系分在 BC 之两侧者,如是乃有

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}=\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}$$

但 ⊙ABC 与零 ⊙P 及圆 k 共轴,故

$$\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=a:b:c$$

或
$$\overline{PA}=ua,\overline{PB}=ub,\overline{PC}=uc$$

代入上得之式中,并约去公因数 u,即得

$$a\cdot\overline{BC}=b\cdot\overline{CA}+c\cdot\overline{AB}$$

(2)① **定理** 设一点 P 至线段 AB 之垂趾为 Q,命 AB 之中点为 O(图 5),则有

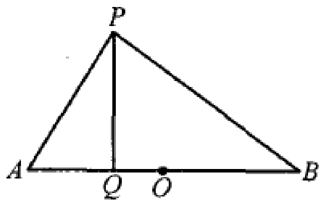


图 5

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=-2\overline{AB}\cdot\overline{QO}$$

证明 应用商高定理[③],即得

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{QA}^2-\overline{QB}^2=(\overline{QA}-\overline{QB})(\overline{QA}+\overline{QB})=$$
$$\overline{BA}(\overline{QO}+\overline{OA}+\overline{QO}+\overline{OB})=-2\overline{AB}\cdot\overline{QO}$$

② **定理** 设△ABC 三边之中点顺次为 L,M,N,任一点 P 至三边之垂趾为 X,Y,Z(图 6),则恒有次之关系式

$$\overline{LX}\cdot\overline{BC}+\overline{MY}\cdot\overline{CA}+\overline{NZ}\cdot\overline{AB}=0$$

证明 应用(2)① 定理,知

① 此定理在普通之几何学书籍大都载有.
② 此定理在普通之几何学书籍大都载有.
③ 此定理在普通之几何学书籍大都载有.

$$\overline{LX}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}(\overline{PB}^2-\overline{PC}^2),\overline{MY}\cdot\overline{CA}=\frac{1}{2}(\overline{PC}^2-\overline{PA}^2),\overline{NZ}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}(\overline{PA}^2-\overline{PB}^2)$$

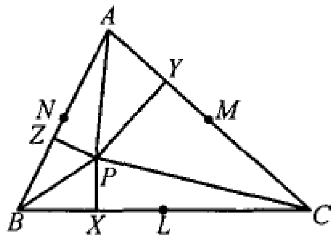


图 6

加之,即得所欲证之关系式矣.

③　**定理**　普遍言之,任一线段在三角形三边上之正射影(orthogonal projection)与各该边之乘积,其和之值恒为零.

证明　如图 7,命 $\overline{PP'}$ 在 $\triangle ABC$ 三边上之正射影顺次为 $\overline{XX'},\overline{YY'},\overline{ZZ'}$. 设 L,M,N 各为三边之中点,则由(2)② 中定理有

$$\overline{LX}\cdot\overline{BC}+\overline{MY}\cdot\overline{CA}+\overline{NZ}\cdot\overline{AB}=0$$

及
$$\overline{LX'}\cdot\overline{BC}+\overline{MY'}\cdot\overline{CA}+\overline{NZ'}\cdot\overline{AB}=0$$

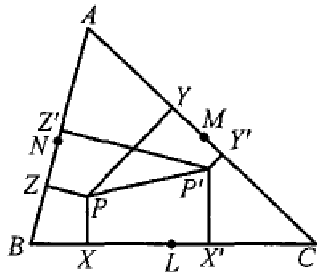


图 7

后式减前式,得

$$(\overline{LX'}-\overline{LX})\overline{BC}+(\overline{MY'}-\overline{MY})\overline{CA}+(\overline{NZ'}-\overline{NZ})\overline{AB}=0$$

故
$$\overline{XX'}\cdot\overline{BC}+\overline{YY'}\cdot\overline{CA}+\overline{ZZ'}\cdot\overline{AB}=0$$

系
$$\overline{XX'}\cdot\sin A+\overline{YY'}\cdot\sin B+\overline{ZZ'}\cdot\sin C=0$$

证明　应用正弦定则(law of sines)[①]甚易知之.

(3)　**费尔巴哈定理**(Feuesbach's theorem)　三角形之九点圆同时与四切圆[②]相切.

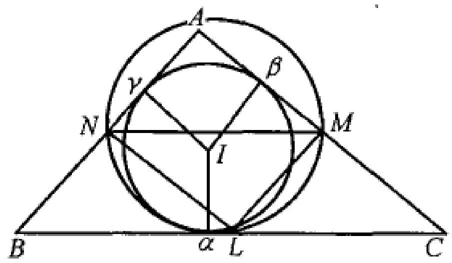


图 8

证明　设 $\triangle ABC$ 三边之中点为 L,M,N,则 $\odot LMN$ 即为九点圆(§2(3)). 命切 $\odot I$ 与三边之切点为 α,β,γ(图 8),则依据(2)② 中定理有

$$\overline{L\alpha}\cdot\overline{BC}+\overline{M\beta}\cdot\overline{CA}+\overline{N\gamma}\cdot\overline{AB}=0$$

但
$$\overline{MN}=-\frac{1}{2}\overline{BC},\overline{NL}=-\frac{1}{2}\overline{CA}$$

$$\overline{LM}=-\frac{1}{2}\overline{AB}$$

① 此定则在普通之三角学书籍均载有.

② 三角形之内切圆(incircle)及三旁切圆(excircles),统称为切圆.

故由上式,得

$$\overline{L\alpha}\cdot\overline{MN}+\overline{M\beta}\cdot\overline{NL}+\overline{N\gamma}\cdot\overline{LM}=0$$

此即 ⊙LMN 与切圆 ⊙I 相切之条件也(§3(1)).

定义 三角形之九点圆与四切圆之切点,特称为费氏切点(points of contact of Feuerbach).

系 1 以三角形之垂心至各顶点连线为直径作圆,此三圆与外接圆必有四个公切圆.

证明 设以三角形之极圆(polar circle)[①]为反演基圆(circle of inversion)而施行反演法,则所作三圆反演为三角形之三边,外接圆反演为九点圆,如是即易得证矣.

系 2 以三角形之外心至三边垂距为直径作圆,此三圆与九点圆必有四个公切圆.

系 3 以三角形之等心(equicenters)[②]至各顶点连线为直径作圆,此三圆与外接圆必有四个公切圆.

证明 如图9,设 I 为 $\triangle ABC$ 之等心,切圆 ⊙I 与三边之切点为 α,β,γ,命 IA,IB,IC 各交 $\beta\gamma,\gamma\alpha,\alpha\beta$ 于 L,M,N,则此三点乃为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 三边之中点.

兹以切圆 ⊙I 为反演基圆而施行反演法,则所作三圆反演为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之三边,⊙ABC 反演为 ⊙LMN,由是即易得证.

系 4 以三角形之垂心至三边垂距为直径作圆,此三圆与九点圆必有四个公切圆.

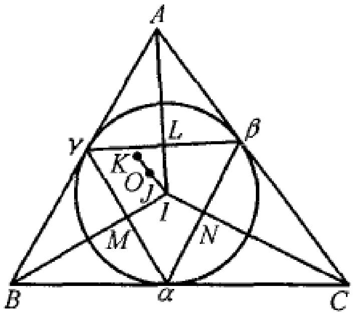


图 9

(4)① **奉田定理**(Fontené's theorem)[③] 设三角形之某对等角共轭点与外心共线,则其垂趾圆必与九点圆相切.

证明 此定理乃奉氏研究费氏定理所得之扩张情形,盖因等心乃为自等角共轭点(self-isogonally conjugate)故也,次所示之证法,系直接的,非奉氏之原证:

借用图1,设 $\triangle ABC$ 三边之中点为 L,M,N,外心为 O,等角共轭点 P,P' 与

---

① 三角形之垂心分每高线所得之两线份,其乘积皆相等,此乘积之值称为三角形之极幂,以垂心为心,极幂之方根为半径之圆,称为极圆.三角形为锐角者,则极圆为虚圆;钝角者为实圆;直角者为零圆.

② 三角形之内心(incenter)及三旁心(excenter),统称为等心,盖以其至三边均有等距故也.

③ 此定理之逆亦真,但在此不易证之,且于本文并无需要,故从略.

O 三者共线,若 P,P' 之垂趾圆与九点圆相切,则据(1)定理有

$$\pm \overline{MN}\sqrt{\overline{LX}\cdot\overline{LX'}} \pm \overline{NL}\sqrt{\overline{MY}\cdot\overline{MY'}} \pm \overline{LM}\sqrt{\overline{NZ}\cdot\overline{NZ'}} = 0 \qquad ①$$

因
$$\frac{\overline{LX'}}{\overline{LX}} = \frac{\overline{MY'}}{\overline{MY}} = \frac{\overline{NZ'}}{\overline{NZ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = k$$

故
$$\overline{LX'} = k\cdot\overline{LX}, \overline{MY'} = k\cdot\overline{MY}, \overline{NZ'} = k\cdot\overline{NZ}$$

代入式 ①,得

$$\pm\sqrt{k}\cdot\overline{LX}\cdot\overline{MN} \pm \sqrt{k}\cdot\overline{MY}\cdot\overline{NL} \pm \sqrt{k}\cdot\overline{NZ}\cdot\overline{LM} = 0$$

约去公因数 $\pm\sqrt{k}$ 后,又以 -2 乘之,则为

$$\overline{LX}\cdot\overline{BC} + \overline{MY}\cdot\overline{CA} + \overline{NZ}\cdot\overline{AB} = 0 \qquad ②$$

然由(2)② 定理知式 ② 为真,故式 ① 亦为真,于是定理得证.

注意　设 PP' 垂直于 $\triangle ABC$ 之任一边,则 P,P' 为虚点(imaginary points)而其垂趾圆退缩为该边之中点;若 PP' 复为对角之平分线,则此时 P,P' 之数无穷.

② 设过 $\triangle ABC$ 之外心 O 作一动直线 p,则在 p 上恒有亦仅有一对等角共轭点 P 与 P'[①],此两点可为实点、虚点或重合点. 如是,吾人由 §2(2)③ 中定理及应用绵续原则(principle of continuity)[②],即引得次之定理:

定理　设一锥线内切[③]于三角形且其轴通过外心,则此锥线之一辅圆必与三角形之九点圆相切,该辅圆之为外辅圆或内辅圆,视乎该轴之为横轴或纵轴而定.

系 1　以三角形之外心为中心,且切于三边之锥线[④],其两辅圆均与三角形之九点圆相切.

系 2　设以三角形之外心为心作切于九点圆之两圆,则以此两圆为辅圆之椭圆必内切于该三角形.

§4　燧　心

(1) **定义**　以三角形之垂心为一焦点且通过三顶点之锥线,其数有四,此四锥线,均称为燧锥线;彼等之他一焦点,均称为燧心. 命 H 为 $\triangle ABC$ 之垂心,

① 在一已知直线上,求作三角形之等角共轭点,著者对此曾有详细之论述,但因牵涉过广,未便载于本文,以专篇论之为宜.

② 此为近世综合几何学上之一重要概念,实系借镜于解析几何学所得之推广之利器.

③ 凡锥线切于三角形之三边,无论其位置如何,为便宜计,均谓为内切.

④ 此锥线恒为椭圆.

K, K_1, K_2, K_3 为四燧心，则按下列诸情形.

(甲) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，定：

(Ⅰ) $+(\overline{KA} \pm \overline{HA}) = +(\overline{KB} \pm \overline{HB}) = +(\overline{KC} \pm \overline{HC}) = k$;

(Ⅱ) $-(\overline{K_1A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_1B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_1C} - \overline{HC}) = k_1$;

(Ⅲ) $+(\overline{K_2A} - \overline{HA}) = -(\overline{K_2B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_2C} - \overline{HC}) = k_2$;

(Ⅳ) $+(\overline{K_3A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_3B} - \overline{HB}) = -(\overline{K_3C} - \overline{HC}) = k_3$.

(乙) 设 $\angle A$ 为钝角，定：

(Ⅰ) $+(\overline{K_1A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_1B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_1C} - \overline{HC}) = k_1$;

(Ⅱ) $-(\overline{KA} - \overline{HA}) = +(\overline{KB} - \overline{HB}) = +(\overline{KC} - \overline{HC}) = k_2$;

(Ⅲ) $+(\overline{K_3A} - \overline{HA}) = -(\overline{K_3B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_3C} - \overline{HC}) = k_3$;

(Ⅳ) $+(\overline{K_2A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_2B} - \overline{HB}) = -(\overline{K_2C} - \overline{HC}) = k_2$.

(丙) 设 $\angle B$ 为钝角，定：

(Ⅰ) $+(\overline{K_2A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_2B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_2C} - \overline{HC}) = k_2$;

(Ⅱ) $-(\overline{K_3A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_3B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_3C} - \overline{HC}) = k_3$;

(Ⅲ) $+(\overline{KA} - \overline{HA}) = -(\overline{KB} - \overline{HB}) = +(\overline{KC} - \overline{HC}) = k$;

(Ⅳ) $+(\overline{K_1A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_1B} - \overline{HB}) = -(\overline{K_1C} - \overline{HC}) = k_1$.

(丁) 设 $\angle C$ 为钝角，定：

(Ⅰ) $+(\overline{K_3A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_3B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_3C} - \overline{HC}) = k_3$;

(Ⅱ) $-(\overline{K_2A} - \overline{HA}) = +(\overline{K_2B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_2C} - \overline{HC}) = k_2$;

(Ⅲ) $+(\overline{K_1A} - \overline{HA}) = -(\overline{K_1B} - \overline{HB}) = +(\overline{K_1C} - \overline{HC}) = k_1$;

(Ⅳ) $+(\overline{KA} - \overline{HA}) = +(\overline{KB} - \overline{HB}) = -(\overline{KC} - \overline{HC}) = k$.

而特称 K 为内燧心，K_1, K_2, K_3 为旁燧心；此时 K, K_1, K_2, K_3 顺次与 $\triangle ABC$ 之内心，对 A，对 B，对 C 之旁心各分别相应.

定理 三角形诸燧锥线之外辅圆均与三角形之外接圆相切.

证明 吾人已知以锥线之焦点半径(focal radius)为直径之圆，恒切于外辅圆，由是依据 §3(3) 系 1，即知本定理为真矣.

(2)① **定理** 三角形相应之燧心等心，必与垂心共线.

证明 命 HK, HK_1, HK_2, HK_3 之中点为 O, O_1, O_2, O_3，此即四燧锥线之外辅圆之心，兹以 $\triangle ABC$ 之极 $\odot H$ 为反演基圆而施行反演法，则 $\odot ABC$ 反演为 $\triangle ABC$ 之九点圆，三圆 $\odot HA, \odot HB, \odot HC$①，反演为 $\triangle ABC$ 之三边，故由(1)中

① 此为表示以 HA, HB, HC 为直径之圆，以后类此.

定理知四燧锥线之外辅 $\odot O, \odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 必反演为 $\triangle ABC$ 之四切圆 $\odot I$, $\odot I_1, \odot I_2, \odot I_3$（§3(3)）；此即示 $HOI, HO_1I_1, HO_2I_2, HO_3I_3$ 皆为直线，亦即 $HKI, HK_1I_1, HK_2I_2, HK_3I_3$ 皆为直线也.

② **问题**　求作三角形之燧心.

解　由(2)① 定理之证法所示，即可得本问题之作图法如次：

以极圆 $\odot H$ 为反演基圆，作切圆 $\odot I$ 之反演圆 $\odot O$，在 HO 上取一点 K，俾

$$\overline{HK} = 2\,\overline{HO}$$

则 K 即为 $\triangle ABC$ 之燧心.

(3)　**定义**　联结一点至已知三角形三顶点作三直线，后在三顶点各作三连线之垂线，此三垂线所成之三角形，称为该点对于已知三角形之逆垂趾三角形(antipedal triangle).

定理　三角形燧心之逆垂趾三角形，其相应之切圆与原三角形之外接圆相切.

证明　如图10，设 K 为 $\triangle ABC$ 之燧心，命 K 之逆垂趾三角形为 $\triangle XYZ$，在 $\triangle XYZ$ 中，作 K 之等角共轭点 K'，并作其垂趾三角形 $\triangle \alpha\beta\gamma$，以 K 为反演中心(center of inversion)，命 A, B, C 之反演点各为 A', B', C'，过此三点分别作 KA, KB, KC 之垂线，组成 $\triangle X'Y'Z'$，则 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle X'Y'Z'$ 为位似形(similar figures in homothetic position). 由 §2(1) 定理，有

$$\overline{K'\alpha} : \overline{K'\beta} : \overline{K'\gamma} = \frac{1}{KA} : \frac{1}{KB} : \frac{1}{KC}$$

又由作图，有

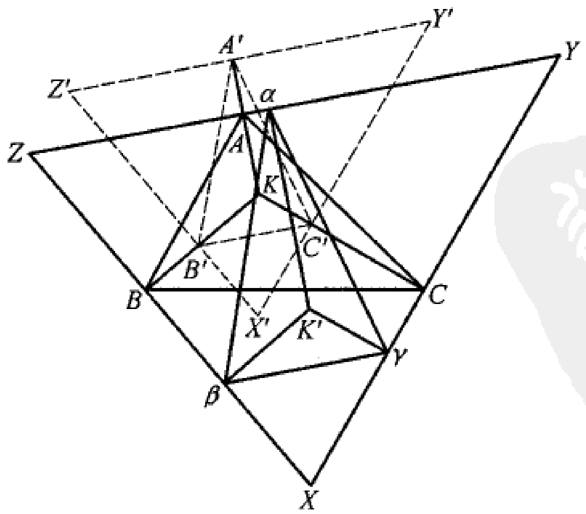


图 10

$$\overline{KA'}:\overline{KB'}:\overline{KC'}=\frac{1}{\overline{KA}}:\frac{1}{\overline{KB}}:\frac{1}{\overline{KC}}$$

故
$$\overline{K'\alpha}:\overline{K'\beta}:\overline{K'\gamma}=\frac{1}{\overline{KA'}}:\frac{1}{\overline{KB'}}:\frac{1}{\overline{KC'}}$$

从此式,知 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 与 $\triangle A'B'C'$ 必为位似形.因之,$\triangle\alpha\beta\gamma$ 在 $\triangle XYZ$ 中之位置,相当于 $\triangle A'B'C'$ 在 $\triangle X'Y'Z'$ 中之位置.

在适所行之反演法中,$\odot ABC$ 反演为 $\odot A'B'C'$,三圆 $\odot KA$,$\odot KB$,$\odot KC$ 反演为 $\triangle X'Y'Z'$ 之三边,因 $\odot ABC$ 与三圆 $\odot KA$,$\odot KB$,$\odot KC$ 有一公切圆(1),故 $\odot A'B'C'$ 必与 $\triangle X'Y'Z'$ 一相应之切圆相切.于是由位似之关系,即知 $\odot\alpha\beta\gamma$ 与 $\triangle XYZ$ 一相应之切圆相切,但 $\odot\alpha\beta\gamma$ 与 $\odot ABC$ 为同物(§2(2)),是即 $\triangle XYZ$ 一相应之切圆与 $\triangle ABC$ 之外接圆相切也.

(4) **定理** 三角形诸燧心之垂趾圆,分别与相应之切圆相切.

证明 如图11,设 H 为 $\triangle ABC$ 之垂心,I 及 K 为相应之等心及燧心,则 H,I,K 三点共线((2)①).今假定 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,I 为内心,K 为内燧心而证之,至他种情形之证法,与此仅大同小异,不再论述.

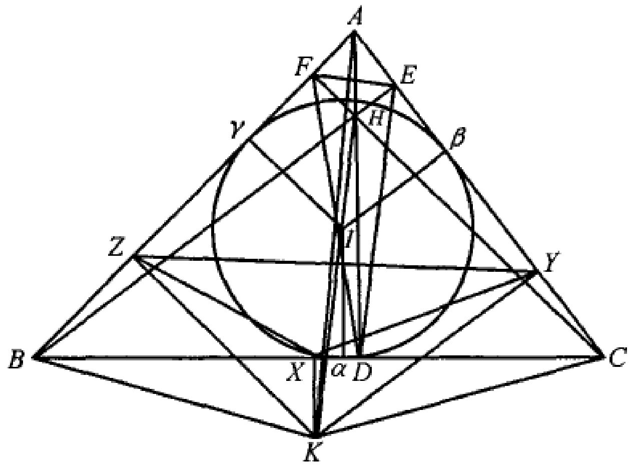


图 11

命三高线趾为 D,E,F,内切 $\odot I$ 与三边之切点为 α,β,γ,内燧心 K 至三边之垂趾为 X,Y,Z,则有

$$\frac{\overline{X\alpha}}{\overline{D\alpha}}=\frac{\overline{Y\beta}}{\overline{E\beta}}=\frac{\overline{Z\gamma}}{\overline{F\gamma}}=\frac{\overline{KI}}{\overline{HI}}=u$$

或
$$\overline{X\alpha}=u\cdot\overline{D\alpha},\overline{Y\beta}=u\cdot\overline{E\beta},\overline{Z\gamma}=u\cdot\overline{F\gamma}$$

因
$$\overline{KA}=k\pm\overline{HA},\overline{KB}=k\pm\overline{HB},\overline{KC}=k\pm\overline{HC}$$

得
$$\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=u(\overline{D\alpha}\cdot\overline{KA}\cdot\sin A+\overline{E\beta}\cdot\overline{KB}\cdot\sin B+$$
$$\overline{F\gamma}\cdot\overline{KC}\cdot\sin C)=u[\overline{D\alpha}(k\pm\overline{HA})\sin A+$$

$\overline{E\beta}(k \pm \overline{HB})\sin B + \overline{F\gamma}(k \pm \overline{HC})\sin C] =$

$uk(\overline{D\alpha} \cdot \sin A + \overline{E\beta} \cdot \sin B + \overline{F\gamma} \cdot \sin C) \pm$

$u(\overline{D\alpha} \cdot \overline{HA} \cdot \sin A + \overline{E\beta} \cdot \overline{HB} \cdot \sin B +$

$\overline{F\gamma} \cdot \overline{HC} \cdot \sin C) = \pm u(\overline{D\alpha} \cdot \overline{EF} + \overline{E\beta} \cdot \overline{FD} + \overline{F\gamma} \cdot \overline{DE}) = 0$

故 $\odot XYZ$ 与内切圆 $\odot I$ 相切（§3(1)）.

§5　羽　心

(1) **定义**　以三角形每等心为一焦点且通过三顶点之锥线，其数每种有四，共得 16 锥线，均称为羽锥线；彼等之他一焦点，均称为羽心. 羽心之由内心所得者，称为内羽心；由旁心所得者，称为旁羽心.

定理　三角形诸羽锥线之外辅圆均与三角形之外接圆相切（§3(3) 系 3）.

(2)① **定理**　设 I 为 $\triangle ABC$ 之等心，切圆 I 与三边之切点为 α,β,γ；命相应于 I 之羽心为 K_1,K_2,K_3,K_4，又命 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之四等心为 J_1,J_2,J_3,J_4，则 IJ_1K_1，IJ_2K_2，IJ_3K_3，IJ_4K_4 皆为直线.

证明　借用图 9，命 IK 之中点为 O，此即羽锥线之外辅圆之心. 兹以 $\odot I$ 为反演基圆而施行反演法，则 $\odot ABC$ 反演为 $\odot LMN$ 即 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之九点圆，三圆 $\odot IA$，$\odot IB$，$\odot IC$ 反演为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之三边，故由(1) 中定理知羽锥线之外辅圆 $\odot O$ 必反演为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之切圆 $\odot J$（§3(3)），此即示 IJO 为直线，亦即 IJK 为直线也.

② **问题**　求作三角形之羽心.

解　由(2)① 中定理之证法所示，即可得本问题之作图法如次：

以 $\odot I$ 为反演基圆，作 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之切圆 $\odot J$ 之反演圆 $\odot O$，在 IO 上取一点 K，俾

$$\overline{IK} = 2\,\overline{IO}$$

则 K 即为 $\triangle ABC$ 之羽心.

(3) **定理**　三角形羽心之逆垂趾三角形，其相应之切圆与原三角形之外接圆相切.

此定理之证法，完全类似于 §4(3) 中定理.

(4) **定理**　三角形每组羽心之垂趾圆，均与相应之切圆相切.

证明　如图 12，设 I 为 $\triangle ABC$ 之内心，K 为相应于 I 之羽心之一，而有

$$\overline{KA} \pm \overline{IA} = \overline{KB} \pm \overline{IB} = \overline{KC} \pm \overline{IC} = k$$

者，今仅就此情形以证之，其余之例，仿此证法可也.

命内切圆 $\odot I$ 切 $\triangle ABC$ 三边之点为 α,β,γ，K 至三边之垂趾为 X,Y,Z，欲证 $\odot XYZ$ 与 $\odot I$ 相切，仅须证次式成立即可（§3(1)）

$$\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0 \quad ①$$

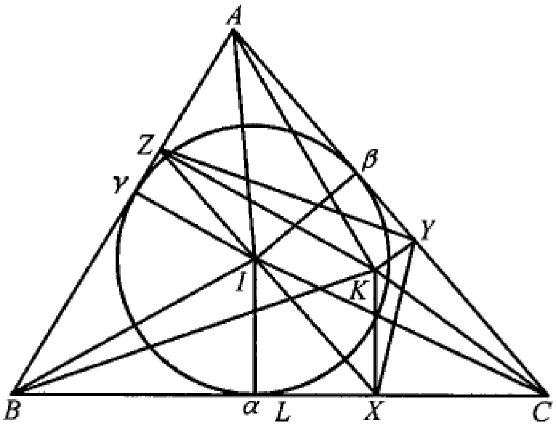


图 12

设以 a 表$\overline{BC}$，命此边之中点为 L，则依 §3(2)① 中定理有

$$\overline{XL}=-\frac{\overline{KB}^2-\overline{KC}^2}{2a}$$

$$\overline{\alpha L}=-\frac{\overline{IB}^2-\overline{IC}^2}{2a}$$

前式减后式，得

$$\overline{XL}-\overline{\alpha L}=\frac{1}{2a}(\overline{IB}^2-\overline{IC}^2-\overline{KB}^2+\overline{KC}^2)$$

化之，为

$$\begin{aligned}\overline{X\alpha}&=\frac{1}{2a}[(\overline{KC}^2-\overline{IC}^2)-(\overline{KB}^2-\overline{IB}^2)]=\\&\frac{1}{2a}[(\overline{KC}\pm\overline{IC})(\overline{KC}\mp\overline{IC})-(\overline{KB}\pm\overline{IB})(\overline{KB}\mp\overline{IB})]=\\&\frac{1}{2a}[k(\overline{KC}+\overline{KC}-k)-k(\overline{KB}+\overline{KB}-k)]=\\&-\frac{k}{a}(\overline{KB}-\overline{KC})\end{aligned}$$

又命 $\triangle ABC$ 之外半径为 R，则有

$$\overline{YZ}=\overline{KA}\cdot\sin A=\frac{a}{2R}\cdot\overline{KA}$$

故

$$\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}=-\frac{k}{2R}\cdot\overline{KA}(\overline{KB}-\overline{KC})$$

同理,得

$$\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}=-\frac{k}{2R}\cdot\overline{KB}(\overline{KC}-\overline{KA})$$

$$\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=-\frac{k}{2R}\cdot\overline{KC}(\overline{KA}-\overline{KB})$$

以之代入式 ①,立知其能成立也.

§6　连环点

(1)① **定义**　设△ABC之切圆与三边之切点为α,β,γ,以A,B,C各为心作圆,俾同直交于该切圆,则三所作圆必两两切于α,β,γ三点.依据阿波罗尼奥斯问题(Apollonius' problem)[①]之作图法,可作得此三所作圆之两公切圆,命其圆心为K及K'.如是,K与K'称为△ABC之连环共轭点,单独称之则为连环点,KK'称为连环轴.因一三角形有四切圆,故知一三角形,共有四对连环共轭点——八连环点,四连环轴.

② **定理**　以三角形每对连环共轭点为焦点,均可各得一锥线俾通过三顶点,如是之四锥线,一为椭圆,三为双曲线.

证明　如图13,假定⊙$\alpha\beta\gamma$为△ABC之内切圆,命⊙K及⊙K'之半径为r及r',△ABC之三边为a,b,c,半周为S,则从圆知

$$\overline{KA}=r+(s-a)$$
$$\overline{KB}=r+(s-b)$$
$$\overline{KC}=r+(s-c)$$

及

$$\overline{K'A}=r'-(s-a)$$
$$\overline{K'B}=r'-(s-b)$$
$$\overline{K'C}=r'-(s-c)$$

分别加之,得

$$\overline{KA}+\overline{K'A}=\overline{KB}+\overline{K'B}=\overline{KC}+\overline{K'C}=r+r'$$

故以K,K'为焦点,可得一锥线通过A,B,C三点,此为椭圆.

其余之例,可仿此证之.

① 此问题在普通之几何学书籍大都载有.

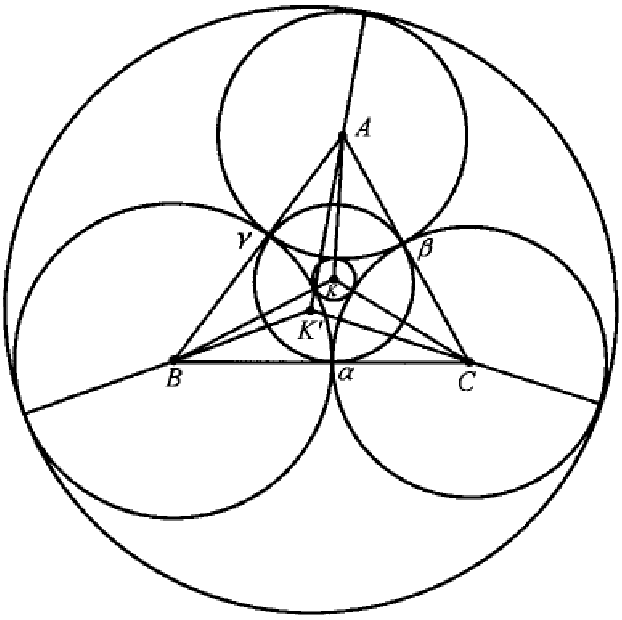


图 13

定义 如是之四锥线,称为环锥线,其外辅圆称为环辅圆.

系 命 $\triangle ABC$ 之四对连环共轭点依次为 K 与 K', K_1 与 K'_1, K_2 与 K'_2, K_3 与 K'_3,则有

$$+(\overline{KA}+\overline{K'A})=+(\overline{KB}+\overline{K'B})=+(\overline{KC}+\overline{K'C})=k$$
$$-(\overline{K_1A}-\overline{K'_1A})=+(\overline{K_1B}-\overline{K'_1B})=+(\overline{K_1C}-\overline{K'_1C})=k_1$$
$$+(\overline{K_2A}-\overline{K'_2A})=-(\overline{K_2B}-\overline{K'_2B})=+(\overline{K_2C}-\overline{K'_2C})=k_2$$
$$+(\overline{K_3A}-\overline{K'_3A})=+(\overline{K_3B}-\overline{K'_3B})=-(\overline{K_3C}-\overline{K'_3C})=k_3$$

③ **定理** D 为 $\triangle ABC$ 之连环点之充要条件为

$$\overline{DA}\pm\overline{BC}=\overline{DB}\pm\overline{CA}=\overline{DC}\pm\overline{AB}$$

证明 应用证(1)② 中定理之诸式,即得

$$\overline{KA}+\overline{BC}=\overline{KB}+\overline{CA}=\overline{KC}+\overline{AB}=r+s$$

及
$$\overline{K'A}-\overline{BC}=\overline{K'B}-\overline{CA}=\overline{K'C}-\overline{AB}=r'-s$$

等等.

次,吾人由此诸式,不难逆推知 K 等为连环点,故该条件为充要的.

(2)① **定理** 设 D 为 $\triangle ABC$ 之连环点,则 A,B,C 亦各为 $\triangle DBC$, $\triangle DCA$, $\triangle DAB$ 之连环点.

证明 在图 13 中,三圆 $\odot K$, $\odot B$, $\odot C$ 两两相切, $\odot A$ 为彼等之公切圆,故依定义,知 A 为 $\triangle KBC$ 之连环点,其余之例,均可同样知之.

定义　由是,平面上四点,设其中一点为余三点所成三角形之连环点,则其余之点均具有此同样性质,故如是之四点可称之为连环点组,其所组成之完全四角形,特称为连环形.

系　两两均相切之四圆,其圆心成连环点组.

② **定义**　今有两两均相切之四圆,设过每三圆之切点作圆,凡得四圆,吾人易知此四圆亦两两均相切.如是之两组圆,其圆心各成一连环点组((2)①系),此两连环点组,称为共轭连环点组;其各所成之完全四角形,称为共轭连环形.

定理　两共轭连环形,其边分别彼此相垂直,亦即,此形之边与他形相应边之对边相垂直.

(3)① **定理**　连环形任两对对边必同切于一圆,凡三圆.

证明　由(1)③中定理之式,知道为连环形任两对对边同切于一圆之条件,故云.

定义　如是之三圆,统称为连环形之环切圆;其圆心组成之三角形,称为环心三角形.

② **定理**　逆之,设完全四角形每两对对边均各同切于一圆,则为连环形.

(4) **定理**　设 D 为 $\triangle ABC$ 之连环点,联结 AD, BD, CD 各交对边于 X, Y, Z,则恒有

$$\overline{XB}+\overline{XC}+\overline{YC}+\overline{YA}+\overline{ZA}+\overline{ZB}=0$$

证明　如图14,今假定 D 合于 K 而证之,因四边形 $KYAZ$, $KZBX$, $KXCY$ 各有一内切圆((3)①),故取绝对量,有

$$YA-ZA=KY-KZ$$
$$ZB-XB=KZ-KX$$
$$XC-YC=KX-KY$$

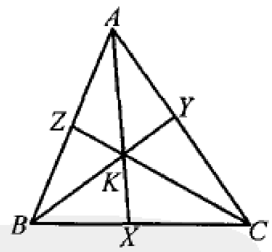


图 14

加之,得

$$-XB+XC-YC+YA-ZA+ZB=0$$

如取有向,则为

$$\overline{XB}+\overline{XC}+\overline{YC}+\overline{YA}+\overline{ZA}+\overline{ZB}=0$$

当 D 处其他之位置时,亦不难仿此以证之.

(5) **定理** 三角形之连环轴,为相应之切三角形[①]之布罗卡尔轴(Brocard axis)[②],因而通过相应之等心及热尔岗点(Gergonne point)[③].

证明 在图 13 中,因 $\odot K$ 及 $\odot K'$ 属于 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之斯豪特共轴圆组(Schoute coaxial system)[④],故 KK' 为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之布罗卡尔轴,而相应之等心及热尔岗点,亦即 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之外心及类似重心[⑤],故在 KK' 上.

(6)① **定理** 共轭连环形有相同之环切圆.

证明 如图 15,设 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 为共轭连环形,则吾人由定义(2)②,极易知 A',B',C',D' 各为 $\triangle DBC,\triangle DCA,\triangle DAB,\triangle ABC$ 之等心,反之亦然,由(2)② 中定理已知

$$D'A'\perp BC,D'B'\perp CA,D'C'\perp AB,B'C'\perp DA,C'A'\perp DB,A'B'\perp DC$$

命其垂趾为 $\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'$,此诸点即四圆 $\odot A,\odot B,\odot C,\odot D$ 两两之切点,亦为四圆 $\odot A',\odot B',\odot C',\odot D'$ 两两之切点.

作连环形 $ABCD$ 之三环切圆 L,M,N,因 $A\alpha,B\beta,C\gamma$ 同交于热尔岗点,故 $A\alpha$ 与 $\beta\gamma$ 调和分割 BC[⑥].又因 BM 与 CN 交于 D',BN 与 CM 交于 A',故 $D'A'\alpha$ 与 MN

亦调和分割 BC,由是已知 $BC,\beta\gamma,MN$ 三线必同交于一点 P.

P 为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之一阿波罗尼奥斯圆心(the center of Apollonius circle)[⑦],故阿氏 $\odot P(P\alpha)$ 直交于 $\odot D$ 及 $\odot D'$,盖此两圆均属于 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之斯豪特共轴圆组也;且又直交于 $\odot A$,因 P 在 $\odot D'$ 与 $\odot A$ 之根轴 $\beta\gamma$ 上也;由是该阿氏圆必通过点 α',以 α' 为 $\odot D$ 与 $\odot A$ 之切点也.于是 $P\alpha'$ 乃为 $\odot D$ 与 $\odot A$ 之公切线,故与 $B'C'$ 相合,易言之,即 $B'C'$ 通过点 P.

设直线 $D'A'\alpha$ 交 MN 于点 P',则因 (B,C,P,α) 为调和列点(harmonic range),故 (M,N,P,P') 亦为调和列点.已知 P 为 $\odot M$ 与 $\odot N$ 之一相似中心(homothetic center of similitude),由是 P' 必为另一相似中心,而 DA 为 $\odot M$ 与 $\odot N$ 之公切线,彼既属不通过点 P,故必通过点 P',已知

$$D'A'\perp BC,DA\perp B'C'$$

---

① 三角形诸等心之垂趾三角形,特称为切三角形,其数凡四.

② 布罗卡尔轴乃为布罗卡尔图象中之一要素,亦即为三角形之外心与类似重心(symmedian center)之连线.

③ 连三角形之顶点,至对边上同一切圆之切点之线,凡三连线必共点,此点称为热尔岗点,其数凡四.

④ 斯豪特共轴圆组亦为布罗卡尔图象中之一要素,凡熟悉之者,类皆知之.

⑤ 三角形之热尔岗点为切三角形之类似重心,是谓默刁定理(Mathiew's theorem).

⑥ 此为射影几何学中基本定理之一.

⑦ 此亦属于布罗卡尔图象者.

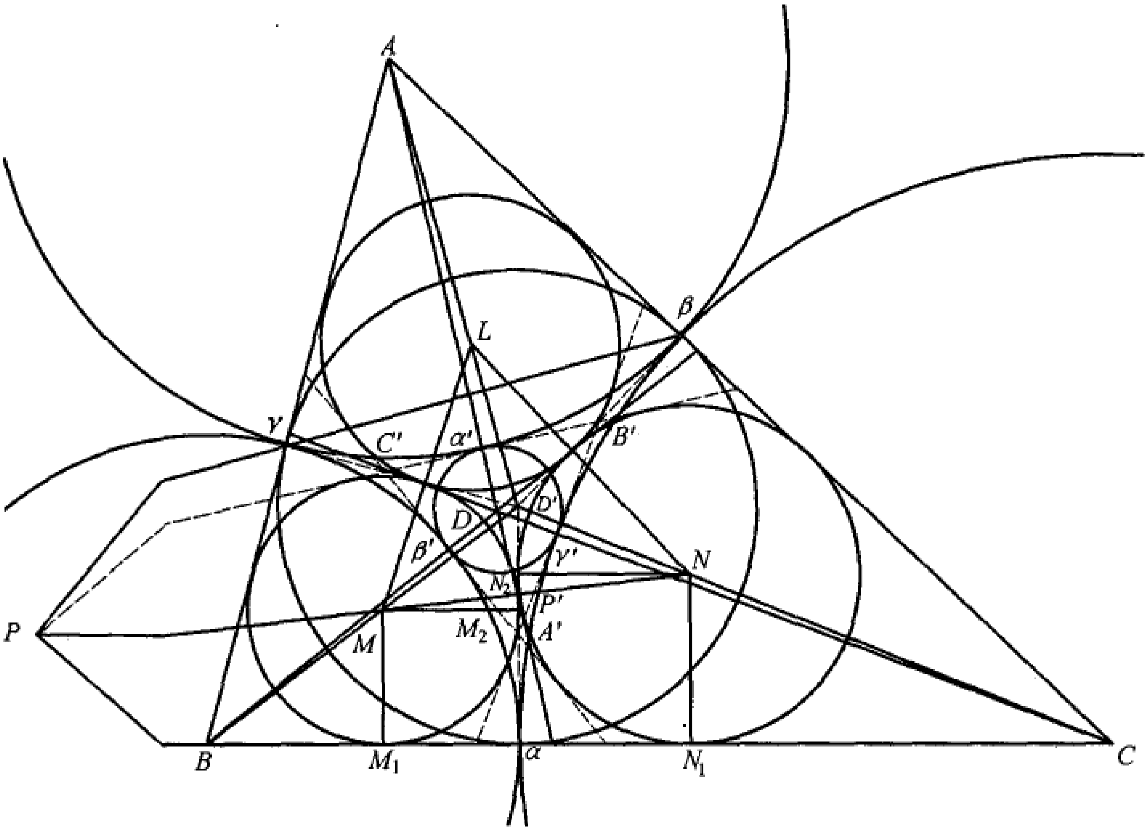


图 15

即　　　　　　　　$P'\alpha \perp P\alpha, P'\alpha' \perp P\alpha'$

但适已证知　　　　$P\alpha = P\alpha'$

从而　　　　　　　$P'\alpha = P'\alpha'$

故知 PP' 为 $\angle \alpha P\alpha'$ 及 $\angle \alpha P'\alpha'$ 之平分线,亦即:BC 与 $B'C'$,DA 与 $D'A'$ 关于 MN 互为反映线,于是由对称之关系,乃知 $B'C'$,$D'A'$ 亦为 $\odot M$ 与 $\odot N$ 之公切线矣.

同理,在另一方面者,亦得证之.

如是,即知连环形 $A'B'C'D'$ 亦以三圆 $\odot L, \odot M, \odot N$ 为彼之环切圆也.

② **定理**　共轭连环形相应边之交点,乃为三环切圆之六相似中心.

证明　在(6)① 中定理之证明中,已证知 BC 与 $B'C'$ 交于 P,DA 与 $D'A'$ 交于 P',而 P,P' 为 $\odot M$ 与 $\odot N$ 之相似中心 …

③ **定理**　共轭连环形相应顶点之连线共点.

证明　因相应边相交于三环切圆之六相似中心((6)②),此六点已知三三同在四直线上,故应用德扎格(Desargues)关于配景位置三角形(triangles in

perspective) 之定理[1],即得本定理之证明.

④ **定理** 共轭连环形每双相应顶点均为环心三角形之等角共轭点.

证明 命 DA 与 $D'A'$, DB 与 $D'B'$, DC 与 $D'C'$ 之交点为 P', Q', R',则此三点各在 $\triangle LMN$ 之三边上((6)②),今四边形 $DQ'D'R'$, $DR'D'P'$, $DP'D'Q'$ 各外切于 $\odot L$, $\odot M$, $\odot N$,因有

$$\overline{DP'} \pm \overline{D'P'} = \overline{DQ'} \pm \overline{D'Q'} = \overline{DR'} \pm \overline{D'R'}$$

而 MN、NL、LM 又显然各为 $\angle DP'D'$, $\angle DQ'D'$, $\angle DR'D'$ 之外或内平分线,可知以 D, D' 为焦点,必有一锥线内切于 $\triangle LMN$,其与三边之切点即为 P', Q', R'. 故 D, D' 为 $\triangle LMN$ 之等角共轭点(§2(2)③).

其余得同理证之.

系 设以连环形之每顶点为一焦点,作环心三角形之内切锥线,则此四锥线必两两相切于三环切圆之六相似中心.

(7)① **定理** 连环形之三环切圆,任两圆之公切线等于该两圆之半径和及差.

证明 在图 15 中,命 M 及 N 在 BC 上之垂趾为 M_1 及 N_1,在 $D'A'$ 上之垂趾为 M_2 及 N_2, $\odot M$ 及 $\odot N$ 之半径为 m 及 n,则因

$$D'A' \perp BC$$

故

$$\overline{M_1N_1} = \overline{M_1\alpha} + \overline{\alpha N_1} = \overline{MM_2} + \overline{N_2N} = m + n$$

及

$$\overline{M_2N_2} = \overline{M_2\alpha} - \overline{N_2\alpha} = \overline{MM_1} - \overline{NN_1} = m - n$$

同理得证其余.

② **定理** 逆之,设三圆两两之公切线等于其半径之和及差,则彼等凡十二公切线,必三三相交于八点,而组成共轭连环点组.

证明 此时每两圆之外公切线与内公切线各相垂直,据此即易证之.

(8)① **定义** 设自 $\triangle ABC$ 之顶点引 $\triangle A'B'C'$ 相应边之垂线共一点 D,则自 $\triangle A'B'C'$ 之顶点引 $\triangle ABC$ 相应边之垂线亦必共一点 D',此已为吾人所证知之事实.如是,吾人称完全四角形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 互为对垂完全四角形,盖以此形之边与他形相应边之对边互相垂直故也.

② **定理** 两对垂完全四角形,设一为连环形,则他一亦为连环形((2)②).

---

① 此为射影几何学中重要定理之一.

定义　设将此两连环形之位置任意施行旋转(revolution)或伸缩(expansion),则最后所得之两形称为互轨连环形.

系1　P 与 P' 为 $\triangle ABC$ 之等角共轭点,设 P 为 $\triangle ABC$ 之连环点,则 P' 必为本身之垂趾三角形 $A'B'C'$ 之连环点.

证明　因 $\triangle A'B'C'$ 之边分别垂直于 PA,PB,PC 故也.

系2　设 P 为 $\triangle ABC$ 之连环点,P 之逆垂趾三角形为 $\triangle XYZ$,则 P 关于 $\triangle XYZ$ 之等角共轭点 P' 必为 $\triangle XYZ$ 之连环点.

此盖为系1之逆说.

系3　设 P 为 $\triangle ABC$ 之连环点,关于 P,命 $\triangle ABC$ 之反演三角形为 $\triangle A'B'C'$[①],则 P 为其对于 $\triangle A'B'C'$ 之逆垂趾 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之连环点.

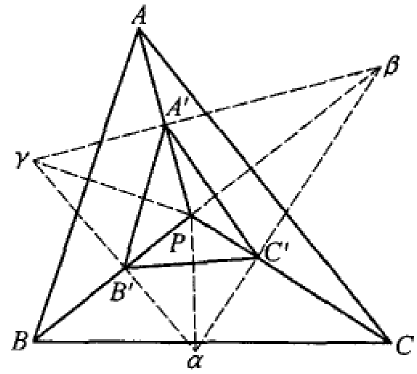


图 16

证明　如图16,因 BC 与 $B'C'$,CA 与 $C'A'$,AB 与 $A'B'$ 各关于 $\triangle BPC$,$\triangle CPA$,$\triangle APB$ 互为逆平行线(antiparallels),由此易知

$$P\alpha\perp BC,P\beta\perp CA,P\gamma\perp AB$$

故 P 为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之连环点.

系4　设四圆之心成连环点组,则其四根心(radical center)亦成连环点组,逆理亦真.

(9)① **定理**　关于 P,命 $\triangle ABC$ 之反演三角形为 $\triangle\alpha\beta\gamma$,又命 P 对于 $\triangle ABC$ 之垂趾三角形为 $\triangle A'B'C'$,设 P 关于 $\triangle A'B'C'$ 之等角共轭点为 P'(图17),则 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 与 $\triangle A'B'C'$ 同向相似(direct similitude),而 P 与 P' 为其一对之相当点.

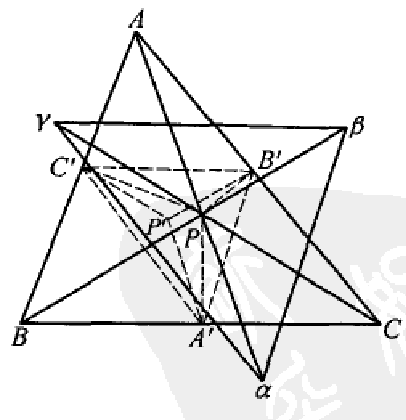


图 17

证明　由共圆点之关系,得

$$\measuredangle\gamma\alpha\beta=\measuredangle\gamma\alpha A+\measuredangle A\alpha\beta=\measuredangle\gamma CA+\measuredangle AB\beta=\measuredangle PCB'+\measuredangle C'BP=\measuredangle PA'B'+$$

① 此乃仅指 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 之顶点关于 P 各互为反演点而言,以后亦同.

$$\measuredangle C'A'P = \measuredangle C'A'B'$$

等等.故

$$\triangle\alpha\beta\gamma \backsim \triangle A'B'C'$$ [1]

次因 $$\measuredangle P\alpha\beta = \measuredangle A\alpha\beta = \measuredangle AB\beta = \measuredangle C'BP = \measuredangle C'A'P = \measuredangle P'A'B'$$

等等.故知 P 与 P' 为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 与 $\triangle A'B'C'$ 之相当点.

② **定理** P 与 P' 为 $\triangle ABC$ 之等角共轭点,设 P 为其逆垂趾三角形之连环点,则 P' 亦为其逆垂趾三角形之连环点,且两者成为互轭连环形.

证明 如图 18,命 P 对于 $\triangle ABC$ 之逆垂趾三角形为 $\triangle XYZ$,关于 P,设 $\triangle XYZ$ 之反演三角形为 $\triangle A'B'C'$,则依(9)① 中定理知

完全四角形 $P'ABC \backsim$ 完全四角形 $PA'B'C'$

今 P 为 $\triangle XYZ$ 之连环点,则 P 为其对于 $\triangle A'B'C'$ 之逆垂趾 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之连环点((8)② 系 3),由是 P' 亦为其对于 $\triangle ABC$ 之逆垂趾 $\triangle X'Y'Z'$ 之连环点,盖因二者相似也.

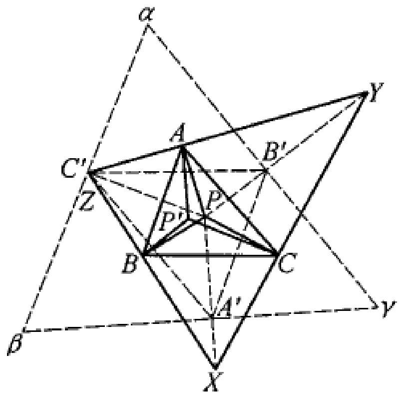


图 18

由(8)② 系 3 之证时,知 $PXYZ$ 与 $P\alpha\beta\gamma$ 为互轭连环形,而

$$\text{连环形 } P'X'Y'Z' \backsim \text{连环形 } P\alpha\beta\gamma$$

故 $PXYZ$ 与 $P'X'Y'Z'$ 必为互轭连环形.

(10) **定理** 三角形之连环轴与三边所成射角[2]之余弦,其连比依次为:

(1) $\dfrac{b-c}{a} : \dfrac{c-a}{b} : \dfrac{a-b}{c}$;

(2) $\dfrac{b-c}{a} : \dfrac{c+a}{b} : \dfrac{a+b}{-c}$;

(3) $\dfrac{b+c}{-a} : \dfrac{c-a}{b} : \dfrac{a+b}{c}$;

(4) $\dfrac{b+c}{a} : \dfrac{c+a}{-b} : \dfrac{a-b}{c}$.

诸式中之 a,b,c,乃为三角形之三边.

① $\backsim$ 为同向相似之记号.

② 射角或称二半直线之角,为近世几何学中一重要之概念,凡研究三角函数者,以射角表之为宜.

证明　今仅取 $\triangle ABC$ 连环轴之一 KK' 证之如次，其余仿此作证可也.

如图 19，命 KK' 与 $\triangle ABC$ 之三边所成射角为 x, y, z，K 及 K' 至三边之垂趾为 X, Y, Z 及 X', Y', Z'，则有

$$\cos x = \frac{\overline{XX'}}{\overline{KK'}}, \cos y = \frac{\overline{YY'}}{\overline{KK'}}, \cos z = \frac{\overline{ZZ'}}{\overline{KK'}}$$

故 $\cos x : \cos y : \cos z = \overline{XX'} : \overline{YY'} : \overline{ZZ'}$

设 L 为 BC 之中点，则由 §3(2)① 中定理有

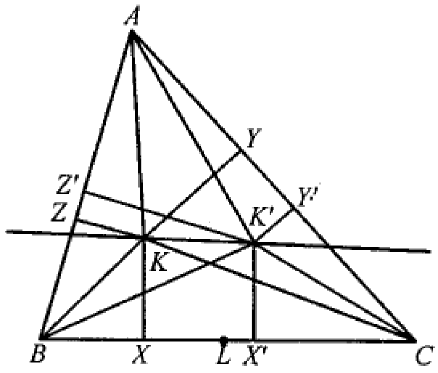


图 19

$$\overline{XL} = -\frac{\overline{KB}^2 - \overline{KC}^2}{2a}, \overline{X'L} = -\frac{\overline{K'B}^2 - \overline{K'C}^2}{2a}$$

前式减后式，得

$$\overline{XL} - \overline{X'L} = \frac{1}{2a}(\overline{K'B}^2 - \overline{K'C}^2 - \overline{KB}^2 + \overline{KC}^2)$$

化之，为

$$\overline{XX'} = \frac{1}{2a}[(\overline{KC}^2 - \overline{K'C}^2) - (\overline{KB}^2 - \overline{K'B}^2)] =$$

$$\frac{1}{2a}[(\overline{KC} + \overline{K'C})(\overline{KC} - \overline{K'C}) - (\overline{KB} + \overline{K'B})(\overline{KB} - \overline{K'B})] =$$

$$\frac{1}{2a}[k(\overline{KC} + \overline{KC} - k) - k(\overline{KB} + \overline{KB} - k)] = \qquad ((1)①\text{ 系})$$

$$\frac{k}{a}(\overline{KC} - \overline{KB}) =$$

$$\frac{k}{a}[r + (s - c) - r - (s - b)] = \qquad ((1)①\text{ 证明})$$

$$k \cdot \frac{b - c}{a}$$

同理，得

$$\overline{YY'} = k \cdot \frac{c - a}{b}, \overline{ZZ'} = k \cdot \frac{a - b}{c}$$

故
$$\cos x : \cos y : \cos z = \frac{b - c}{a} : \frac{c - a}{b} : \frac{a - b}{c}$$

系　三角形热尔岗点之三重极线(trilinear polar)与三边所成射角之正弦，其连比与上述者相同.

证明 因热尔岗点之三重极线与相应之连环轴相垂直[①]故也.

(11) **定理** 三角形每对连环共轭点之垂趾圆,均与相应之切圆相切.

证明 今仅取$\triangle ABC$连环点之一K以证之,其余之例,只需将此证法略加修改,即可适用,不再论述.

如图20,命K对于$\triangle ABC$之垂趾三角形为$\triangle XYZ$,$\triangle ABC$之内切圆$\odot I$与三边之切点为α,β,γ,欲证$\odot XYZ$与$\odot I$相切,仅须证次式成立即可(§3(1))

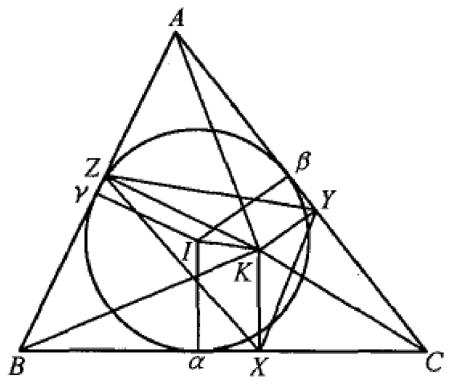


图 20

$$\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0 \quad ①$$

因I在连环轴KK'上((5)),故知((10))

$$\overline{X\alpha}:\overline{Y\beta}:\overline{Z\gamma}=\cos x:\cos y:\cos z=\frac{b-c}{a}:\frac{c-a}{b}:\frac{a-b}{c}$$

由是式①可变为

$$\frac{b-c}{a}\cdot\overline{YZ}+\frac{c-a}{b}\cdot\overline{ZX}+\frac{a-b}{c}\cdot\overline{XY}=0 \quad ②$$

依据(1)②定理之证明中诸式,并命R为$\triangle ABC$之外半径,有

$$\overline{YZ}=\overline{KA}\cdot\sin A=\frac{a}{2R}(r+s-a)$$

$$\overline{ZX}=\overline{KB}\cdot\sin B=\frac{b}{2R}(r+s-b)$$

$$\overline{XY}=\overline{KC}\cdot\sin C=\frac{c}{2R}(r+s-c)$$

代入式②中,并约去公因式$\frac{1}{2R}$,得

$$(b-c)(r+s-a)+(c-a)(r+s-b)+(a-b)(r+s-c)=0 \quad ③$$

此式中,$(r+s)$之系数为

$$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$$

其余之项为

$$-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)=0$$

故式③为真,于是式①成立矣.

---

① 应用(5)中定理并详布罗卡尔图象,即可知之.

(12) **定理**　三角形连环点之逆垂趾三角形一相应之切圆，与原三角形之外接圆相切.

证明　如图21，设 P 为 $\triangle ABC$ 之连环点，P 之逆垂趾三角形为 $\triangle XYZ$，命 P 关于 $\triangle XYZ$ 之等角共轭点为 P'，则 P' 必为 $\triangle XYZ$ 之连环点((8)② 系2)，由是依(11)中定理，即知 P' 对于 $\triangle XYZ$ 之垂趾圆——$\triangle ABC$ 之外接圆(§2(2)②)，与 $\triangle XYZ$ 一相应之切圆相切.

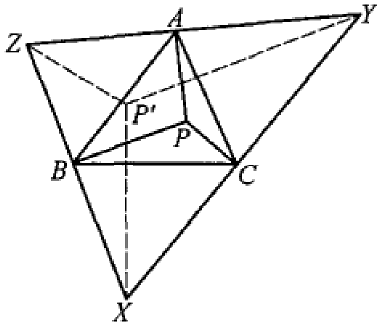


图 21

系　对于某三角形，设一点为其垂趾三角形之连环点，则其垂趾圆与原三角形一相应之切圆相切.

(13) **定理**　三角形之四环辅圆均与外接圆相切.

证明　如图22，设 P 与 P' 为 $\triangle ABC$ 之连环共轭点，则其环辅圆之心即为 PP' 之中点 M，而此环辅圆 $\odot M$ 吾人已知其与三圆 $\odot PA$，$\odot PB$，$\odot PC$ 皆相切.

兹以 P 为反演中心而施行反演法，命 A,B,C 之反演点为 A',B',C'，则 $\odot ABC$ 即反演为 $\odot A'B'C'$.

命 P 对于 $\triangle A'B'C'$ 之逆垂趾三角形为 $\triangle\alpha\beta\gamma$，则 P 为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之连环点((8)② 系3)，故 $\odot A'B'C'$ 与 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 一相应之切圆 m' 相切((11)).

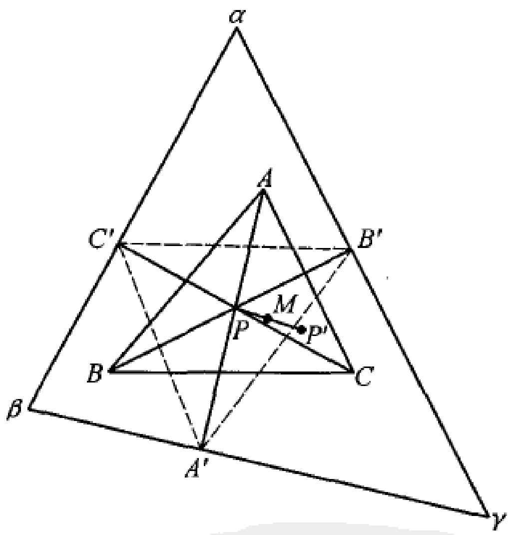


图 22

然三圆 $\odot PA$，$\odot PB$，$\odot PC$ 之反演形即为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之三边，故环辅圆 $\odot M$ 之反演圆 $\odot M'$ 乃为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 中之一切圆.

今乃欲考证 $\odot M'$ 与圆 m' 是否为同物，果然，即 $\odot M'$ 与 $\odot A'B'C'$ 相切，则 $\odot M$ 与 $\odot ABC$ 亦相切，如是定理证矣.

设 $PABC$ 之共轭连环形为 $P_1A_1B_1C_1$，则 P_1 为 $\triangle ABC$ 一相应之等心而在连环轴 PP' 上(5)，但 P 亦为 $\triangle A_1B_1C_1$ 一相应之等心，故 P_1P 即 PP' 亦为 $\triangle A_1B_1C_1$ 一相应之连环轴.

因连环形 $P_1A_1B_1C_1$ 与 $P\alpha\beta\gamma$ 之相当边分别同垂直于 $PABC$ 之边((2)②,(8)② 系3证明),故 $P_1A_1B_1C_1$ 与 $P\alpha\beta\gamma$ 为位似形,由是 $\triangle A_1B_1C_1$ 之连环轴 PP' 与 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之相当连环轴 P 平行,但 P 通过 P,于是 PP' 与 P 相合,是则 PP' 又为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 一相应之连环轴.

圆 m' 既为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 一相应之切圆,故其心在 PP' 上(5),又 M 为 PP' 之中点,故 $\odot M'$ 之心亦在 PP' 上.如是,苟 m' 与 $\odot M'$ 非为同物,则 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 有两切圆 m',M' 之心同在 PP' 上,此时 PP' 即为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之一分角线;然此结论显然系谬误的,故圆 m' 与 $\odot M'$ 非为同物不可,至是乃完成其证.

§7 朋力点

(1) **定义** 对于 $\triangle ABC$,设一点 P 之垂趾圆与 $\triangle ABC$ 之切圆之一相切,则称 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点.如是,可知三角形之垂心、外心、等心、燧心、羽心、连环点等,均属朋力点之一,是以若关于后者有一定理,则关于前者亦各有一定理与之相当,唯是前者处于特殊之位置,故另具有特殊之性质而较为显著而已.

定理 三角形之两等角共轭点中,设其一为朋力点,则他一亦为朋力点.

(2) 为备下款定理之证明所引用,特先述次之二定理.

① **定理** 设命 $\triangle ABC$ 之三边为 a,b,c,三边之中点为 L,M,N,切圆 t 与三边之切点为 α,β,γ,则有下列诸关系:

$$\text{圆 } t \text{ 为内切圆}\begin{cases}\overline{L\alpha}=-\dfrac{1}{2}(b-c)\\[2ex]\overline{M\beta}=-\dfrac{1}{2}(c-a);\\[2ex]\overline{N\gamma}=-\dfrac{1}{2}(a-b)\end{cases}$$

$$\text{圆 } t \text{ 为对 } A \text{ 之旁切圆}\begin{cases}\overline{L\alpha}=\dfrac{1}{2}(b-c)\\[2ex]\overline{M\beta}=-\dfrac{1}{2}(c+a);\\[2ex]\overline{N\gamma}=\dfrac{1}{2}(a+b)\end{cases}$$

$$\text{圆 } t \text{ 为对 } B \text{ 之旁切圆}\begin{cases}\overline{L\alpha} = \dfrac{1}{2}(b+c)\\ \overline{M\beta} = \dfrac{1}{2}(c-a)\\ \overline{N\gamma} = -\dfrac{1}{2}(a+b)\end{cases};$$

$$\text{圆 } t \text{ 为对 } C \text{ 之旁切圆}\begin{cases}\overline{L\alpha} = -\dfrac{1}{2}(b+c)\\ \overline{M\beta} = \dfrac{1}{2}(c+a)\\ \overline{N\gamma} = \dfrac{1}{2}(a-b)\end{cases}$$

② **定理**　关于 P，设 A 与 A'，B 与 B' 互为反演点，命 P 至 AB 及 $A'B'$ 之垂趾为 Q 及 Q'，AB 及 $A'B'$ 之中点为 O 及 O'（图 23），则有次之二关系式

$$\overline{A'B'} = \frac{p}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}\cdot\overline{AB},\overline{Q'O'} = -\frac{p}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}\cdot\overline{QO}$$

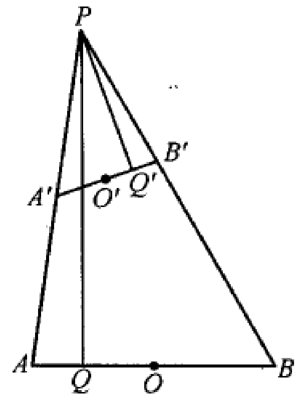


图 23

式中之 p 乃为反演率（power of inversion）.

证明　因 A,A',B,B' 四点共圆，故有

$$\measuredangle PA'B' = \measuredangle AA'B' = \measuredangle ABB' = \measuredangle ABP = -\measuredangle PBA$$

及
$$\measuredangle PB'A' = \measuredangle BB'A' = \measuredangle BAA' = \measuredangle BAP = -\measuredangle PAB$$

由是
$$\triangle PA'B' \backsim \triangle PBA$$

从而
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}}$$

故得
$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}}\cdot\overline{AB} = \frac{\overline{PA}\cdot\overline{PA'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}\cdot\overline{AB} = \frac{p}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}\cdot\overline{AB}$$

次,依 §3(2)① 中定理,有

$$-2\,\overline{A'B'}\cdot\overline{Q'O'}=\overline{PA'^2}-\overline{PB'^2}=\frac{p^2}{\overline{PA^2}}-\frac{p^2}{\overline{PB^2}}=\frac{p^2}{\overline{PA^2}\cdot\overline{PB^2}}(\overline{PB^2}-\overline{PA^2})=$$

$$\frac{2p^2}{\overline{PA^2}\cdot\overline{PB^2}}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{QO}$$

故由前式,即得

$$\overline{Q'O'}=-\frac{p}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}\cdot\overline{QO}$$

(3) **定理** 设以三角形之朋力点为反演中心将三角形反演之,则该朋力点仍为反演三角形之朋力点.

证明 如图24,设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,关于 P,$\triangle A'B'C'$ 为 $\triangle ABC$ 之反演三角形.命 P 对于 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 之垂趾三角形为 $\triangle XYZ$ 及 $\triangle X'Y'Z'$,$\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 之相应切圆 t 及 t' 各与三边之切点为 α,β,γ 及 α',β',γ',若 P 为 $\triangle A'B'C'$ 之朋力点,则有次式(§3(1))

$$\pm\overline{X'\alpha'}\cdot\overline{Y'Z'}\pm\overline{Y'\beta'}\cdot\overline{Z'X'}\pm\overline{Z'\gamma'}\cdot\overline{X'Y'}=0$$

但 $$\overline{Y'Z'}=\overline{PA'}\cdot\sin A'=\frac{p}{\overline{PA}}\cdot\sin A'$$

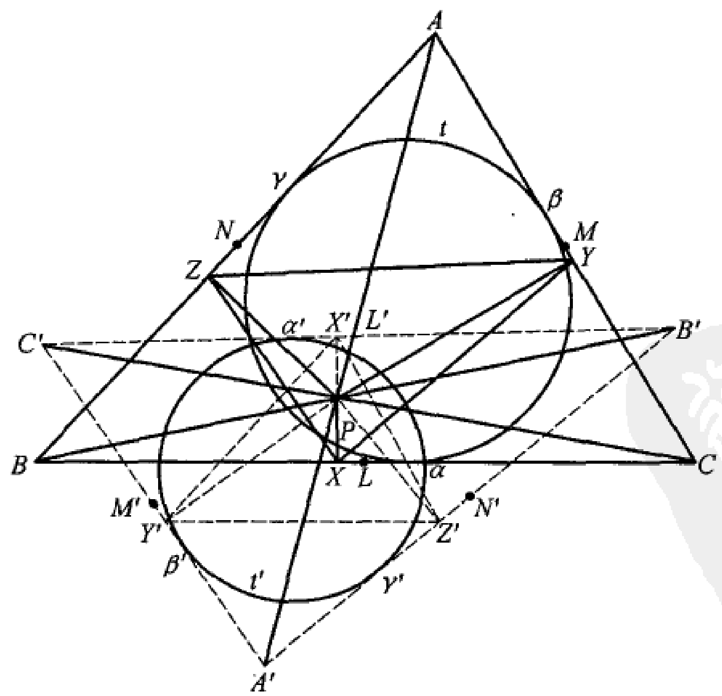


图 24

$$\overline{Z'X'} = \overline{PB'} \cdot \sin B' = \frac{p}{\overline{PB}} \cdot \sin B'$$

$$\overline{X'Y'} = \overline{PC'} \cdot \sin C' = \frac{p}{\overline{PC}} \cdot \sin C'$$

代入上式,并约去 p,可得

$$\pm \frac{\overline{X'\alpha'}}{\overline{PA}} \cdot \sin A' \pm \frac{\overline{Y'\beta'}}{\overline{PB}} \cdot \sin B' \pm \frac{\overline{Z'\gamma'}}{\overline{PC}} \cdot \sin C' = 0$$

又因(§6(9)) $\triangle A'B'C' \backsim \triangle XYZ$

故 $\sin A' : \sin B' : \sin C' = \sin X : \sin Y : \sin Z = \overline{YZ} : \overline{ZX} : \overline{XY} =$

$$\overline{PA} \cdot \sin A : \overline{PB} \cdot \sin B : \overline{PC} \cdot \sin C$$

于是该式又变为

$$\pm \overline{X'\alpha'} \cdot \sin A \pm \overline{Y'\beta'} \cdot \sin B \pm \overline{Z'\gamma'} \cdot \sin C = 0$$

因之,吾人欲证 P 为 $\triangle A'B'C'$ 之朋力点,仅需证明此式成立即可(§3(1)).

唯圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 之何种切圆,与圆 t 在 $\triangle ABC$ 中之位置及幂根式各项正负号之排列方式甚有关系,兹逐一详论之如次.但以下所云之 R 乃表 $\triangle ABC$ 之外半径,a,b,c 及 a',b',c' 乃表 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 之诸边,L,M,N 及 L',M',N' 乃为诸边之中点,并利用次之诸记号

$$u = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC}}{p}$$

$$x = \frac{p}{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}, y = \frac{p}{\overline{PC} \cdot \overline{PA}}, z = \frac{p}{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}$$

$$ux = \overline{PA}, uy = \overline{PB}, uz = \overline{PC}$$

(甲)设圆 t 为 $\triangle ABC$ 之内切圆,此时因幂根式之四种方式,而圆 t' 在 $\triangle A'B'C'$ 之位置,可有四种:

(Ⅰ) $+\overline{X\alpha} \cdot \overline{YZ} + \overline{Y\beta} \cdot \overline{ZX} + \overline{Z\gamma} \cdot \overline{XY} = 0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆;

(Ⅱ) $-\overline{X\alpha} \cdot \overline{YZ} + \overline{Y\beta} \cdot \overline{ZX} + \overline{Z\gamma} \cdot \overline{XY} = 0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆;

(Ⅲ) $+\overline{X\alpha} \cdot \overline{YZ} - \overline{Y\beta} \cdot \overline{ZX} + \overline{Z\gamma} \cdot \overline{XY} = 0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 B' 之旁切圆;

(Ⅳ) $+\overline{X\alpha} \cdot \overline{YZ} + \overline{Y\beta} \cdot \overline{ZX} - \overline{Z\gamma} \cdot \overline{XY} = 0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆.

证明　今证(Ⅰ)之情形,假定圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆,则由(2)有

$$\left.\begin{aligned}\overline{X'L'}&=-x\cdot\overline{XL}=-x(\overline{X\alpha}+\overline{\alpha L})=-x(\overline{X\alpha}+\frac{b-c}{2})\\\overline{Y'M'}&=-y\cdot\overline{YM}=-y(\overline{Y\beta}+\overline{\beta M})=-y(\overline{Y\beta}+\frac{c-a}{2})\\\overline{Z'N'}&=-z\cdot\overline{ZN}=-z(\overline{Z\gamma}+\overline{\gamma N})=-z(\overline{Z\gamma}+\frac{a-b}{2})\end{aligned}\right\}\quad①$$

及

$$\left.\begin{aligned}\overline{L'\alpha'}&=-\frac{1}{2}(b'-c')=-\frac{1}{2}(by-cz)\\\overline{M'\beta'}&=-\frac{1}{2}(c'-a')=-\frac{1}{2}(cz-ax)\\\overline{N'\gamma'}&=-\frac{1}{2}(a'-b')=-\frac{1}{2}(ax-by)\end{aligned}\right\}\quad②$$

以①与②各式分别相加,得

$$\left.\begin{aligned}\overline{X'\alpha'}&=\overline{X'L'}+\overline{L'\alpha'}=-x(\overline{X\alpha}+\frac{b-c}{2})-\frac{1}{2}(by-cz)\\\overline{Y'\beta'}&=\overline{Y'M'}+\overline{M'\beta'}=-y(\overline{Y\beta}+\frac{c-a}{2})-\frac{1}{2}(cz-ax)\\\overline{Z'\gamma'}&=\overline{Z'N'}+\overline{N'\gamma'}=-z(\overline{Z\gamma}+\frac{a-b}{2})-\frac{1}{2}(ax-by)\end{aligned}\right\}\quad③$$

由是 $-u(+\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A+\overline{Y'\beta'}\cdot\sin B+\overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C)=$

$$(+\overline{X\alpha}\cdot\overline{PA}\cdot\sin A+\overline{Y\beta}\cdot\overline{PB}\cdot\sin B+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{PC}\cdot\sin C)+$$

$$\frac{1}{2}\sin A[(b-c)\overline{PA}+b\cdot\overline{PB}-c\cdot\overline{PC}]+$$

$$\frac{1}{2}\sin B[(c-a)\overline{PB}+c\cdot\overline{PC}-a\cdot\overline{PA}]+$$

$$\frac{1}{2}\sin C[(a-b)\overline{PC}+a\cdot\overline{PA}-b\cdot\overline{PB}]=$$

$$(+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY})+$$

$$\frac{1}{4R}[a(b-c)\overline{PA}+ab\cdot\overline{PB}-ca\cdot\overline{PC}+b(c-a)\overline{PB}+$$

$$bc\cdot\overline{PC}-ab\cdot\overline{PA}+c(a-b)\overline{PC}+$$

$$ca\cdot\overline{PA}-bc\cdot\overline{PB}]=0$$

故 $$+\overline{X'\alpha'}\sin A+\overline{Y'\beta'}\sin B+\overline{Z'\gamma'}\sin C=0$$

次证(Ⅱ)之情形,假定圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆,则有

$$\left.\begin{aligned}\overline{L'\alpha'} &= \frac{1}{2}(b'-c') = \frac{1}{2}(by-cz)\\ \overline{M'\beta'} &= -\frac{1}{2}(c'+a') = -\frac{1}{2}(cz+ax)\\ \overline{N'\gamma'} &= \frac{1}{2}(a'+b') = \frac{1}{2}(ax+by)\end{aligned}\right\} \quad ④$$

以 ① 与 ④ 各式分别相加,得

$$\left.\begin{aligned}\overline{X'\alpha'} &= \overline{X'L'} + \overline{L'\alpha'} = -x\left(\overline{X\alpha} + \frac{b-c}{2}\right) + \frac{1}{2}(by-cz)\\ \overline{Y'\beta'} &= \overline{Y'M'} + \overline{M'\beta'} = -y\left(\overline{Y\beta} + \frac{c-a}{2}\right) - \frac{1}{2}(cz+ax)\\ \overline{Z'\gamma'} &= \overline{Z'N'} + \overline{N'\gamma'} = -z\left(\overline{Z\gamma} + \frac{a-b}{2}\right) + \frac{1}{2}(ax+by)\end{aligned}\right\} \quad ⑤$$

由是

$$\begin{aligned}&-u(-\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A + \overline{Y'\beta'}\cdot\sin B + \overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C) =\\ &(-\overline{X\alpha}\cdot\overline{PA}\cdot\sin A + \overline{Y\beta}\cdot\overline{PB}\cdot\sin B + \overline{Z\gamma}\cdot\overline{PC}\cdot\sin C) +\\ &\frac{1}{2}\sin A[-(b-c)\overline{PA} + b\cdot\overline{PB} - c\cdot\overline{PC}] +\\ &\frac{1}{2}\sin B[(c-a)\overline{PB} + c\cdot\overline{PC} + c\cdot\overline{PA}] +\\ &\frac{1}{2}\sin C[(a-b)\overline{PC} - a\cdot\overline{PA} - b\cdot\overline{PB}] =\\ &(-\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ} + \overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX} + \overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}) +\\ &\frac{1}{4R}[-a(b-c)\overline{PA} + ab\cdot\overline{PB} -\\ &ca\cdot\overline{PC} + b(c-a)\overline{PB} + bc\cdot\overline{PC} + ab\cdot\overline{PA} +\\ &c(a-b)\overline{PC} - ca\cdot\overline{PA} - bc\cdot\overline{PB}] = 0\end{aligned}$$

故

$$-\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A + \overline{Y'\beta'}\cdot\sin B + \overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C = 0$$

至(Ⅲ)及(Ⅳ)两种情形,均与(Ⅱ)相仿,应用换式原理(principle of transformation)即可推知.

(乙)设圆 t 为 $\triangle ABC$ 对 A 之旁切圆,此时亦有四种情形:

(Ⅰ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ} + \overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX} + \overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY} = 0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆;

(Ⅱ) $-\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ} + \overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX} + \overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY} = 0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆;

(Ⅲ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ} - \overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX} + \overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY} = 0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆;

(Ⅳ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}-\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 B' 之旁切圆.

证明 先证(Ⅰ)之情形,假定圆 ′ 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆.则有

$$\left.\begin{aligned}\overline{X'L'}&=-x\cdot\overline{XL}=-x(\overline{X\alpha}+\overline{\alpha L})=-x\left(\overline{X\alpha}-\frac{b-c}{2}\right)\\\overline{Y'M'}&=-y\cdot\overline{YM}=-y(\overline{Y\beta}+\overline{\beta M})=-y\left(\overline{Y\beta}+\frac{c+a}{2}\right)\\\overline{Z'N'}&=-z\cdot\overline{ZN}=-z(\overline{Z\gamma}+\overline{\gamma N})=-z\left(\overline{Z\gamma}-\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad⑥$$

及

$$\left.\begin{aligned}\overline{L'\alpha'}&=\frac{1}{2}(b'-c')=\frac{1}{2}(by-cz)\\\overline{M'\beta'}&=-\frac{1}{2}(c'+a')=-\frac{1}{2}(cz+ax)\\\overline{N'\gamma'}&=\frac{1}{2}(a'+b')=\frac{1}{2}(ax+by)\end{aligned}\right\}\quad⑦$$

以 ⑥ 与 ⑦ 各式分别相加,得

$$\left.\begin{aligned}\overline{X'\alpha'}&=\overline{X'L'}+\overline{L'\alpha'}=-x\left(\overline{X\alpha}-\frac{b-c}{2}\right)+\frac{1}{2}(by-cz)\\\overline{Y'\beta'}&=\overline{Y'M'}+\overline{M'\beta'}=-y\left(\overline{Y\beta}+\frac{c+a}{2}\right)-\frac{1}{2}(cz+ax)\\\overline{Z'\gamma'}&=\overline{Z'N'}+\overline{N'\gamma'}=-z\left(\overline{Z\gamma}-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}(ax+by)\end{aligned}\right\}\quad⑧$$

由是

$$\begin{aligned}&-u(+\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A+\overline{Y'\beta'}\cdot\sin B+\overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C)=\\&(+\overline{X\alpha}\cdot\overline{PA}\cdot\sin A+\overline{Y\beta}\cdot\overline{PB}\cdot\sin B+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{PC}\cdot\sin C)+\\&\frac{1}{2}\sin A[-(b-c)\overline{PA}-b\cdot\overline{PB}+c\cdot\overline{PC}]+\\&\frac{1}{2}\sin B[(c+a)\overline{PB}+c\cdot\overline{PC}+a\cdot\overline{PA}]+\\&\frac{1}{2}\sin C[-(a+b)\overline{PC}-a\cdot\overline{PA}-b\cdot\overline{PB}]=\\&(+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY})+\\&\frac{1}{4R}[-a(b-c)\overline{PA}-ab\cdot\overline{PB}+\\&ca\cdot\overline{PC}+b(c+a)\overline{PB}+bc\cdot\overline{PC}+ab\cdot\overline{PA}-\\&c(a+b)\overline{PC}-ca\cdot\overline{PA}-bc\cdot\overline{PB}]=0\end{aligned}$$

故

$$+\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A+\overline{Y'\beta'}\cdot\sin B+\overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C=0$$

次证(Ⅱ)之情形,假定圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆,则有

$$\left.\begin{aligned}\overline{L'\alpha'} &= -\frac{1}{2}(b'-c') = -\frac{1}{2}(by-cz)\\ \overline{M'\beta'} &= -\frac{1}{2}(c'-a') = -\frac{1}{2}(cz-ax)\\ \overline{N'\gamma'} &= -\frac{1}{2}(a'-b') = -\frac{1}{2}(ax-by)\end{aligned}\right\} \quad ⑨$$

以⑥与⑨各式分别相加,得

$$\left.\begin{aligned}\overline{X'\alpha'} &= \overline{X'L'}+\overline{L'\alpha'} = -x\left(\overline{X\alpha}-\frac{b-c}{2}\right)-\frac{1}{2}(by-cz)\\ \overline{Y'\beta'} &= \overline{Y'M'}+\overline{M'\beta'} = -y\left(\overline{Y\beta}+\frac{c+a}{2}\right)-\frac{1}{2}(cz-ax)\\ \overline{Z'\gamma'} &= \overline{Z'N'}+\overline{N'\gamma'} = -z\left(\overline{Z\gamma}-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}(ax-by)\end{aligned}\right\} \quad ⑩$$

由是　$-u(-\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A+\overline{Y'\beta'}\cdot\sin B+\overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C)=$

$$\begin{aligned}&(-\overline{X\alpha}\cdot\overline{PA}\cdot\sin A+\overline{Y\beta}\cdot\overline{PB}\cdot\sin B+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{PC}\cdot\sin C)+\\ &\frac{1}{2}\sin A[(b-c)\overline{PA}-b\cdot\overline{PB}+c\cdot\overline{PC}]+\\ &\frac{1}{2}\sin B[(c+a)\overline{PB}+c\cdot\overline{PC}-a\cdot\overline{PA}]+\\ &\frac{1}{2}\sin C[-(a+b)\overline{PC}+a\cdot\overline{PA}-b\cdot\overline{PB}]=\\ &(-\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY})+\\ &\frac{1}{4R}[a(b-c)\overline{PA}-ab\cdot\overline{PB}+\\ &ca\cdot\overline{PC}+b(c+a)\overline{PB}+bc\cdot\overline{PC}-ab\cdot\overline{PA}-\\ &c(a+b)\overline{PC}+ca\cdot\overline{PA}-bc\cdot\overline{PB}]=0\end{aligned}$$

故　$$-\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A+\overline{Y'\beta'}\cdot\sin B+\overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C=0$$

再证(Ⅲ)之情形,假定圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆,则有

$$\left.\begin{aligned}\overline{L'\alpha'} &= -\frac{1}{2}(b'+c') = -\frac{1}{2}(by+cz)\\ \overline{M'\beta'} &= \frac{1}{2}(c'+a') = \frac{1}{2}(cz+ax)\\ \overline{N'\gamma'} &= \frac{1}{2}(a'-b') = \frac{1}{2}(ax-by)\end{aligned}\right\} \quad ⑪$$

以⑥与⑪各式分别相加,得

$$\left.\begin{aligned}\overline{X'\alpha'}&=\overline{X'L'}+\overline{L'\alpha'}=-x\left(\overline{X\alpha}-\frac{b-c}{2}\right)-\frac{1}{2}(by+cz)\\\overline{Y'\beta'}&=\overline{Y'M'}+\overline{M'\beta'}=-y\left(\overline{Y\beta}+\frac{c+a}{2}\right)+\frac{1}{2}(cz+ax)\\\overline{Z'\gamma'}&=\overline{Z'N'}+\overline{N'\gamma'}=-z\left(\overline{Z\gamma}-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}(ax-by)\end{aligned}\right\}\qquad ⑫$$

由是 $-u(+\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A-\overline{Y'\beta'}\cdot\sin B+\overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C)=$

$(+\overline{X\alpha}\cdot\overline{PA}\cdot\sin A-\overline{Y\beta}\cdot\overline{PB}\cdot\sin B+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{PC}\cdot\sin C)+$

$\frac{1}{2}\sin A[-(b-c)\overline{PA}+b\cdot\overline{PB}+c\cdot\overline{PC}]+$

$\frac{1}{2}\sin B[-(c+a)\overline{PB}+c\cdot\overline{PC}+a\cdot\overline{PA}]+$

$\frac{1}{2}\sin C[-(a+b)\overline{PC}-a\cdot\overline{PA}+b\cdot\overline{PB}]=$

$(+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}-\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY})+$

$\frac{1}{4R}[-a(b-c)\overline{PA}+ab\cdot\overline{PB}+$

$ca\cdot\overline{PC}-b(c+a)\overline{PB}+bc\cdot\overline{PC}+ab\cdot\overline{PA}-$

$c(a+b)\overline{PC}-ca\cdot\overline{PA}+bc\cdot\overline{PB}]=0$

故 $+\overline{X'\alpha'}\cdot\sin A-\overline{Y'\beta'}\cdot\sin B+\overline{Z'\gamma'}\cdot\sin C=0$

至(Ⅳ)之情形,与(Ⅲ)相仿,不再论述.

(丙)设圆 t 为 $\triangle ABC$ 对 B 之旁切圆,此时亦有四种情形:

(Ⅰ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 B' 之旁切圆;

(Ⅱ) $-\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆;

(Ⅲ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}-\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆;

(Ⅳ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}-\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆.

(丁)设圆 t 为 $\triangle ABC$ 对 C 之旁切圆,此时亦有四种情形:

(Ⅰ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆;

(Ⅱ) $-\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 B' 之旁切圆;

(Ⅲ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}-\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆;

(Ⅳ) $+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}-\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$,则圆 t' 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆.

(丙)及(丁)的情形,均可由(乙)类推,故不另证.

注意　设 P 趋近于 $\triangle ABC$ 之等心而与之相合,则 $\overline{X\alpha}$,$\overline{Y\beta}$,$\overline{Z\gamma}$ 亦渐趋近于零而等于零,斯时,$\overline{X\alpha}$,$\overline{Y\beta}$,$\overline{Z\gamma}$ 之值对于(甲)、(乙)、(丙)、(丁)四种情形中任一种,其四类幂根式均可谓同时成立,故 P 对于 $\triangle A'B'C'$ 之重趾圆必同时与 $\triangle A'B'C'$ 之四切圆相切. 然 P 斯时乃为 $\triangle A'B'C'$ 之垂心,此即示费氏定理(§3(3))实为此定理之一特例也.

(4)① **定理**　三角形之朋力点亦为其垂趾三角形之朋力点.

证明　在图 24 中,设命 P 关于 $\triangle XYZ$ 之等角共轭点为 P',则依 §6(9)①中定理,已知

$$\triangle A'B'C' \backsim \triangle XYZ$$

而 P 与 P' 为彼等之相当点,当 P 为 $\triangle A'B'C'$ 这朋力点((3)),故 P' 当为 $\triangle XYZ$ 之朋力点,于是 P 乃为 $\triangle XYZ$ 之朋力点矣((1)).

注意　当 P 重合于 $\triangle ABC$ 之等心时,吾人已知 $\overline{X\alpha}$,$\overline{Y\beta}$,$\overline{Z\gamma}$ 之值可以同时适合于四类之幂根式,故 P 对于 $\triangle XYZ$ 之垂趾圆必同时切于 $\triangle XYZ$ 之四切圆,但 P 此时乃为 $\triangle XYZ$ 之外心,由是费氏定理(§3(3)),即可由此而导出焉.

② **定理**　非系朋力点不能为其垂趾三角形之朋力点.

证明　在图 24 中,设 P 非为 $\triangle ABC$ 之朋力点,则 P 亦必非为 $\triangle A'B'C'$ 之朋力点,此由(3)中定理可以推知,因是 P' 亦非 $\triangle XYZ$ 之朋力点,故 P 非为 $\triangle XYZ$ 之朋力点也.

③ **定理**　$PABC$ 与 $P'A'B'C'$ 互为对垂完全四角形,设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,则 P' 亦为 $\triangle A'B'C'$ 之朋力点.

证明　如图 25,设 P 关于 $\triangle ABC$ 之等角共轭点为 Q,命 Q 对于 $\triangle ABC$ 之垂趾三角形为 $\triangle XYZ$,则易知 $QXYZ$ 与 $PABC$ 互为对垂完全四角形;因之,$QXYZ$ 与 $P'A'B'C'$ 必为位似形. 今 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,则 Q 亦为 $\triangle ABC$ 之朋力点((1)),于是 Q 亦为 $\triangle XYZ$ 之朋力点

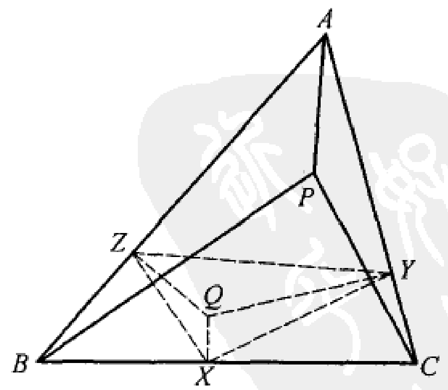


图 25

((4)①),故知 P' 为 $\triangle A'B'C'$ 之朋力点.

(5)① **定理** 三角形之朋力点亦为其逆垂趾三角形之朋力点.

证明 借用图21,设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,若 P 非为 $\triangle XYZ$ 之朋力点,则 P 亦非 $\triangle ABC$ 之朋力点((4)②),但此与题设相悖,故 P 必为 $\triangle XYZ$ 之朋力点.

② **定理** 非系朋力点不能为其逆垂趾三角形之朋力点.

证明 在图21中,设 P 非为 $\triangle ABC$ 之朋力点,若 P 为 $\triangle XYZ$ 之朋力点,则 P 亦为 $\triangle ABC$ 之朋力点((4)①),但此与题设不合,故 P 不能为 $\triangle XYZ$ 之朋力点.

(6)① **定理** 设以三角形之朋力点至三边之垂距为直径作圆,则此三圆与该朋力点之垂趾圆必有一公切圆,其逆亦真.

证明 如图26,设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,P 至三边之垂趾为 X,Y,Z,兹以 P 为反演中心而施行反演法,命 X,Y,Z 之反演点为 X',Y',Z',过此三点各作 PX,PY,PZ 之垂线俾组成 $\triangle A'B'C'$.则因 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,故 P 亦为 $\triangle XYZ$ 之朋力点((4)①),由是 P 亦为 $\triangle X'Y'Z'$ 之朋力点((3)),于是 P 亦为 $\triangle A'B'C'$ 之朋力点((5)①)—— 亦即:$\odot X'Y'Z'$ 切于 $\triangle A'B'C'$ 一相应之切圆((1)),或云 $\odot X'Y'Z'$ 与三线 $B'C'$,$C'A'$,$A'B'$ 有一公切圆,但 $\odot X'Y'Z'$ 及三线 $B'C'$,$C'A'$,$A'B'$ 乃为 $\odot XYZ$ 及三圆 $\odot PX$,$\odot PY$,$\odot PZ$ 之反演形,故知后四圆亦必有一公切圆.

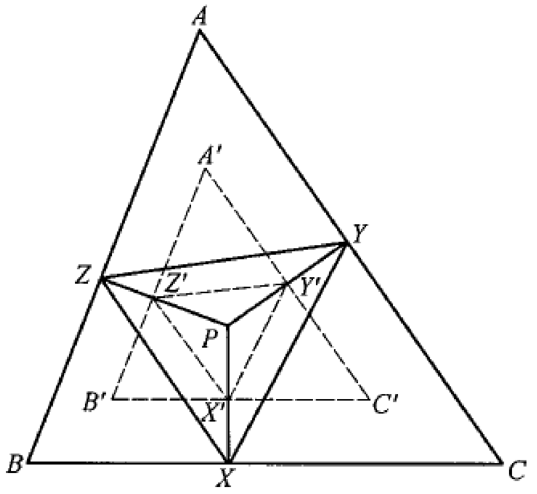


图 26

逆之,设 $\odot XYZ$ 与三圆 $\odot PX$,$\odot PY$,$\odot PZ$ 有一公切圆,则 $\odot X'Y'Z'$ 与三线 $B'C'$,$C'A'$,$A'B'$ 亦有一公切圆,或云 $\odot X'Y'Z'$ 切于 $\triangle A'B'C'$ 一相应之切圆,故 P 为 $\triangle A'B'C'$ 之朋力点((1)),因是,P 乃依次为 $\triangle X'Y'Z'$,$\triangle XYZ$,$\triangle ABC$ 之朋力点矣((4)①,(3),(5)①).

② **定理** 设以三角形之朋力点至三顶点之连线为直径作圆,则此三圆与三角形之外接圆必有一公切圆,其逆亦真.

证明 借用图21,设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,则 P 亦为 $\triangle XYZ$ 之朋力点((5)①),故三圆 $\odot PA$,$\odot PB$,$\odot PC$ 与 $\odot ABC$ 有一公切圆((6)①).

逆之,设三圆 PA,PB,PC 与圆 ABC 有一公切圆,则 P 为 $\triangle XYZ$ 之朋力点

((6)①),故 P 亦为 $\triangle ABC$ 之朋力点((4)①).

(7) **定理**　设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,则以 P 为一焦点且外接于 $\triangle ABC$ 之锥线,其数凡四,此四锥线之另一焦点共四点,此四点中必有一点为 $\triangle ABC$ 之朋力点.

证明　四锥线之外辅圆均与三圆 $\odot PA$,$\odot PB$,$\odot PC$ 相切,或云四外辅圆为三圆 $\odot PA$,$\odot PB$,$\odot PC$ 之公切圆,但共点之三圆最多能有四公切圆(公点除外),故知四外辅圆中,必有一圆与 $\triangle ABC$ 之外接圆相切((6)②),命此圆为 $\odot O$,相应于此圆之锥线之另一焦点为 Q,则三圆 $\odot QA$,$\odot QB$,$\odot QC$ 必同切于 $\odot O$,由是 Q 为 $\triangle ABC$ 之朋力点矣((6)②).

注意　四个点 Q 中,须具何种条件,始能为 $\triangle ABC$ 之朋力点?此与关于 P 之幂根式甚有密切之关系,考 P 与 Q 至三顶点之距离,不外下列四种方式

$$+(\overline{PA}\pm\overline{QA})=+(\overline{PB}\pm\overline{QB})=+(\overline{PC}\pm\overline{QC})$$
$$-(\overline{PA}-\overline{QA})=+(\overline{PB}-\overline{QB})=+(\overline{PC}-\overline{QC})$$
$$+(\overline{PA}-\overline{QA})=-(\overline{PB}-\overline{QB})=+(\overline{PC}-\overline{QC})$$
$$+(\overline{PA}-\overline{QA})=+(\overline{PB}-\overline{QB})=-(\overline{PC}-\overline{QC})$$

此四式依次与关于 P 之四种幂根式相应

$$+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$$
$$-\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$$
$$+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}-\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}+\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$$
$$+\overline{X\alpha}\cdot\overline{YZ}+\overline{Y\beta}\cdot\overline{ZX}-\overline{Z\gamma}\cdot\overline{XY}=0$$

准此即可决定点 Q 之位置.

吾人又须注意者:当 P 为 $\triangle ABC$ 之垂心时,则每种幂根式各分别适合于每一切圆,P 重合于 $\triangle ABC$ 任一之等心时,则四种幂根式均同时成立,所以三角形之四燧心及 16 羽心均为朋力点,职是故也.

附注　命相应于 P 之等心为 I,则适于条件之点 Q,必在 PI 线上(见后 §9(1)),此亦为决定点 Q 位置之一法.

§8　羔　点

(1)① **定理**　设 P,P' 为 $\triangle ABC$ 之等角共轭点,求于 PP' 线上定一点 F,俾 F 之垂趾圆与 P,P' 之垂趾圆 $\odot O$ 相切.

解 如图 27,作 PP' 线对于 $\triangle ABC$ 之垂极圆 k①,设交 $\odot O$ 于 T, T' 两点.

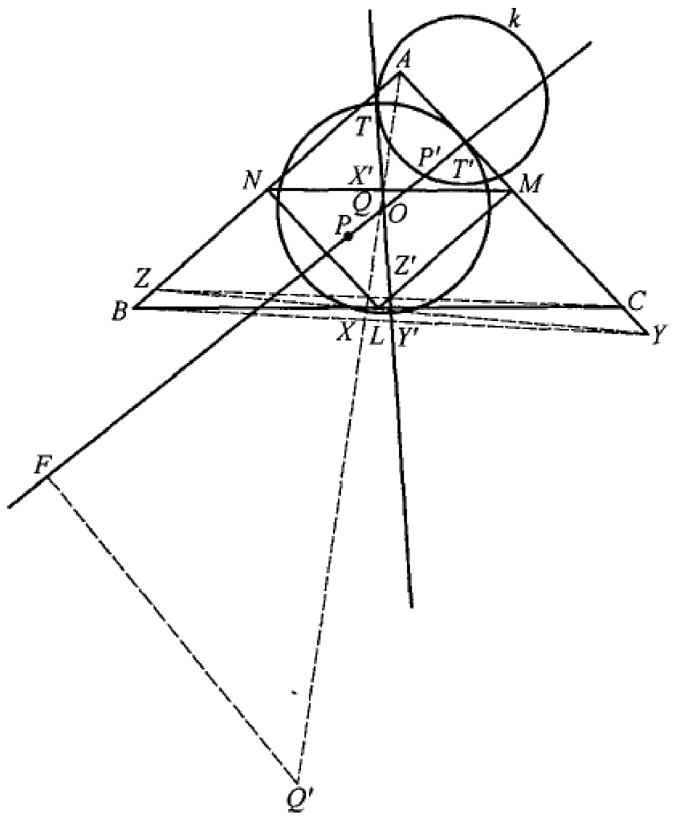


图 27

命 $\triangle ABC$ 三边之中点为 L, M, N,联结 OT 交 $\triangle LMN$ 之三边于 X', Y', Z',再联结 AX', BY', CZ' 交 $\triangle ABC$ 之三边于 X, Y, Z,则此三点共线,或云 OT 为完全四边形 $ABCXYZ$ 之牛顿线(Newton line)②.

斯时,P, P' 必为完全四边形 $ABCXYZ$ 之等角共轭点③.何则?如谓非然,可设在 PP' 线上,有三点 P_1, P'_1, F 乃为完全四边形 $ABCXYZ$ 之等视点④.因此三点之垂趾圆共轴,其圆心轴即为 OT 线⑤,且同直交于 $\odot k$(奉氏定理);而 $\odot O$

① 一直线上之诸点,对于一三角形之垂趾圆,必有一公共之直交圆,此圆即谓之**垂极圆**,是为奉田定理(Fontené's theorem)

② 此为射影几何学上之定理.

③ 此与三角形之等角共轭点有相同之意义,或云:完全四边形之内切锥线之两焦点即为等角共轭点.

④ 完全四边形之内切锥线之焦点,单独称之名为等视点,等视点之轨迹为一三次曲线,称为**等视曲线**,故一直线上最多能有三等视点,此为射影几何学上之定理.

⑤ 此种性质,著者对之曾有详细之论述,但因牵涉过广,只宜以专篇论之,不便载于本文.

又直交圆 k 于点 T，即 OT 为圆 k 之切线，故 P_1, P'_1, F 之垂趾圆均与 $\odot O$ 于点 T 相切——或云：P_1, P'_1, F 之垂趾圆与 P, P' 之垂趾圆 $\odot O$ 组成共轴圆组，但此结论为否定的，盖因一直线上如已取定两点，则最多能再有一点，使此三点之垂趾圆为共轴者①故也. 由是 P_1, P'_1, F 三点中，非有两点与 P, P' 相合不可，兹假定 P_1 与 P，P'_1 与 P' 相合，如是，则 P, P' 乃为完全四边形 $ABCXYZ$ 之等角共轭点矣.

在此场合中，F 之垂趾圆必与 $\odot O$ 相切，故若能作得点 F，则问题即予解决.

作点 F 之方法：设 AX 交 PP' 于 Q，于 AX 上取一点 Q'，俾 (A, X, Q, Q') 为调和列点者，则 Q' 至 PP' 上之垂趾即为所求之点 F②.

同理，联结 OT' 线，则在 PP' 线上又得另一点 F'，亦属所求之点.

讨论　a. 普遍言之，本题一般有两解，唯当圆 k 为虚圆时，则所求点为虚的，斯时谓之无解.

b. 当 PP' 线垂直于 $\triangle ABC$ 之任一边时，则圆 k 为零圆，亦即为 PP' 线至该边之垂趾，此时 F 与 F' 同趋为 PP' 线上之无穷远点.

c. 倘 PP' 线通过 $\triangle ABC$ 之外心，则圆 k 亦为零圆③，于是 T, T' 相合为一点，故仅得一解，斯时，所求点即为 $\triangle ABC$ 之外心，吾人观于 §3(4)① 之定理，即可知之.

d. 设 PP' 为 $\triangle ABC$ 之任一分角线，则除 $\triangle ABC$ 之顶点外，PP' 线上不再有点 F 或 F'.

e. 若 PP' 为 $\triangle ABC$ 任一边之中垂线，则 $\odot O$ 为零圆，亦即为该边之中点（§3(4)① 注意），因之，PP' 线上之任何点均合于所求.

② **定理**　对于一三角形，在两等角共轭点之连线上，通常恒有两点（实点，虚点或重合点），其垂趾圆均与该对等角共轭点之垂趾圆相切.

定义　对于一三角形，在一已知直线上恒有亦仅有一对等角共轭点（实点、虚点或重合点）④，故亦恒有亦仅有一对之点（实点、虚点或重合点）⑤，俾其垂趾圆均与该对等角共轭点之垂趾圆相切者. 如是之两点，特称之为已知直线上之羔点，或称之为三有形之羔点，但凡称羔点，均系指相配成耦之两点者，是

① 此种性质，著者对之曾有详细之论述，但因牵涉过广，只宜以专篇论之，不便载于本文.
② 此作图法之证明，著者亦曾有详细之论述，唯以专篇论之为宜，故从略.
③ 此为奉氏定理之一特例.
④ 已知直线重合于三角形之任一分角线者除外.
⑤ 已知直线重合于三角形任一边之中垂线者除外.

宜注意.

(2)① **问题** 对于 $\triangle ABC$,设 P 为已知直线 p 上之一定点,求于 p 上定一点 F,俾 F 之垂趾圆与 P 之垂趾圆相切.

解 此乃为上款问题之扩张,仿该问题之论证,即可证 p 上通常有四点,其垂趾圆均与 P 之垂趾圆相切,唯此四点之作图,非属于规矩作图之范围耳.

② **定理** 对于一三角形,在过一定点之一直线上,通常有四点,其垂趾圆均与该定点之垂趾圆相切,但其切点仅有二.

(3)① **定理** 设外接于 $\triangle ABC$ 之任一锥线,其焦点为 F, F',在 FF' 线上定一对点 P, P' 俾为等角共轭点,则 F 及 F' 之垂趾圆均与 P, P' 之垂趾圆相切.

证明 如图 28,今假定

$$\overline{FA} \pm \overline{F'A} = \overline{FB} \pm \overline{F'B} = \overline{FC} \pm \overline{F'C} = f$$

而证之,至于其他之例,仅须将此证法略加修改,即可适用,故不再论.

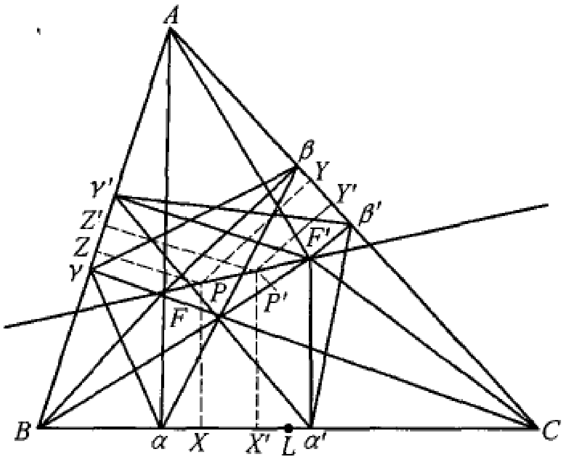


图 28

命 F 及 F' 至 $\triangle ABC$ 三边之垂趾为 α, β, γ 及 α', β', γ',并以 R 表 $\triangle ABC$ 之外半径,a 表 $\overline{BC}$,L 表 BC 之中点,兹先证次式为真

$$+\overline{\alpha\alpha'} \cdot \overline{\beta\gamma} + \overline{\beta\beta'} \cdot \overline{\gamma\alpha} + \overline{\gamma\gamma'} \cdot \overline{\alpha\beta} = 0 \quad ①$$

由 §3(2)① 中定理,有

$$\overline{\alpha L} = -\frac{\overline{FB}^2 - \overline{FC}^2}{2a}, \overline{\alpha' L} = -\frac{\overline{F'B}^2 - \overline{F'C}^2}{2a}$$

前式减后式,得

$$\overline{\alpha L} - \overline{\alpha' L} = -\frac{1}{2a}(\overline{FB}^2 - \overline{FC}^2 - \overline{F'B}^2 + \overline{F'C}^2)$$

化之,为

$$\overline{\alpha\alpha'} = -\frac{1}{2a}[(\overline{FB}^2-\overline{F'B}^2)-(\overline{FC}^2-\overline{F'C}^2)] =$$

$$-\frac{1}{2a}[(\overline{FB}\pm\overline{F'B})(\overline{FB}\mp\overline{F'B})-(\overline{FC}\pm\overline{F'C})(\overline{FC}\mp\overline{F'C})] =$$

$$-\frac{1}{2a}[f(\overline{FB}+\overline{FB}-f)-f(\overline{FC}+\overline{FC}-f)] =$$

$$-\frac{f}{a}(\overline{FB}-\overline{FC})$$

又

$$\overline{\beta\gamma} = \overline{FA}\cdot\sin A = \frac{a}{2R}\cdot\overline{FA}$$

由是

$$\overline{\alpha\alpha'}\cdot\overline{\beta\gamma} = -\frac{f}{2R}\cdot\overline{FA}(\overline{FB}-\overline{FC})$$

同理,得

$$\overline{\beta\beta'}\cdot\overline{\gamma\alpha} = -\frac{f}{2R}\cdot\overline{FB}(\overline{FC}-\overline{FA}),\overline{\gamma\gamma'}\cdot\overline{\alpha\beta} = -\frac{f}{2R}\cdot\overline{FC}(\overline{FA}-\overline{FB})$$

以之代入式①,立知其能成立也.

次命 P 及 P' 至三边之垂趾为 X,Y,Z 及 X',Y',Z',若 F 之垂趾圆与 P,P' 之垂趾圆相切,则有次之关系式(§3(1))

$$\pm\overline{\beta\gamma}\sqrt{\overline{\alpha X}\cdot\overline{\alpha X'}}\pm\overline{\gamma\alpha}\sqrt{\overline{\beta Y}\cdot\overline{\beta Y'}}\pm\overline{\alpha\beta}\sqrt{\overline{\gamma Z}\cdot\overline{\gamma Z'}} = 0 \qquad ②$$

但

$$\frac{\overline{\alpha X}}{\overline{\alpha\alpha'}} = \frac{\overline{\beta Y}}{\overline{\beta\beta'}} = \frac{\overline{\gamma Z}}{\overline{\gamma\gamma'}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{FF'}} = m,\frac{\overline{\alpha X'}}{\overline{\alpha\alpha'}} = \frac{\overline{\beta Y'}}{\overline{\beta\beta'}} = \frac{\overline{\gamma Z'}}{\overline{\gamma\gamma'}} = \frac{\overline{FP'}}{\overline{FF'}} = n$$

因之,式②变为

$$\pm\sqrt{mn}(\overline{\alpha\alpha'}\cdot\overline{\beta\gamma}+\overline{\beta\beta'}\cdot\overline{\gamma\alpha}+\overline{\gamma\gamma'}\cdot\overline{\alpha\beta}) = 0$$

观式①,立知此式为真,故 F 之垂趾圆与 P,P' 之垂趾圆相切亦为真(§3(1)).

同理,亦可证 F' 之垂趾圆与 P,P' 之垂趾圆相切.

注意　设 F 与 F' 相合为一点,则此点即为 $\triangle ABC$ 之外心;斯时,此定理乃变为奉田定理(§3(4)①)矣.

② 因在 FF' 线上所定一对等角共轭点 P,P' 系唯一的,而在 PP' 线上所定一对羔点 F,F' 亦系唯一的,故(3)① 定理之逆,必能成立,此即次之定理:

定理　以三角形任一对羔点为焦点,必有一锥线,俾外接于此三角形者.

注意　a. 垂直于三角形任一边之直线,其上之两羔点重合于无穷远点((1)① 讨论 b),故此时所得之锥线,必成一特殊形状,即该边及过对顶点之平行线是也.

b. 因三角形任一分角线上之等角共轭点非系唯一的,故此定理对于分角线

上之羔点(参阅(1)① 讨论 d),应为特殊情形,此时所得之锥线,其形状变为该角之两夹边.

c.三角形任一边之中垂线上,其羔点为无穷的((1)① 讨论 e),斯时,此定理亦成特殊情形 —— 设将诸羔点适当两两配合之,每一对羔点,即得一锥线,如是共得无穷数之锥线.

(4) 由(3)① 中定理,并应用绵续原则,可衍得次之定理:

定理 设两锥线 S 及 S' 之轴 t 及 t' (无论横轴或纵轴) 相重,且其位置能使无穷个三角形内接于 S 而外切于 S' [①],则 S 在 t 上之两焦点(实或虚) 对于该项三角形之垂趾圆必同切于 S' 之一辅圆,此辅圆之为外辅圆或内辅圆,视乎 t' 为 S' 之横轴或纵轴而定.

§9 朋力共轭点

(1) **问题** 求作三角形之朋力点.

解 在 §8(1)① 问题中,设 P 与 P' 相合为一点,斯时此点即为 $\triangle ABC$ 之等心,而其垂趾圆亦即 $\triangle ABC$ 之切圆,如是,该问题乃变形而为本问题矣;故依该问题之方法,即得本问题之解答,唯吾人须注意者,通过等心之直线,其数无穷,在每线上各可求得一对羔点,均适为所求点,是故本题得有无穷个解.

定义 通过三角形等心之直线,其上之两羔点——亦即两朋力点,特称为朋力共轭点.依据 §8(3)② 定理,知以朋力共轭点为焦点,必有一锥线,俾外接于三角形者,如是之锥线,称为朋力锥线,其辅圆称为朋辅圆,该辅圆取其外辅圆或内辅圆,视乎所依之朋力共轭点为实或虚而定.

(2)① **定理** 三角形之朋辅圆均与外接圆相切.

证明 设 F, F' 为 $\triangle ABC$ 之朋力共轭点,相应于 F, F' 之朋力锥线为 S,在以 F 为一焦点且外接于 $\triangle ABC$ 之四锥线中,必有一为 S,命其余之三为 S_1, S_2, S_3,彼等他一之焦点为 F'_1, F'_2, F'_3.此四锥线之外辅圆中,必有一圆与 $\triangle ABC$ 之外接圆相切(§7(6)②),命此圆为 $\odot O$,则此圆必须为 S 之外辅圆而后可,何则?盖若 $\odot O$ 为 S_1, S_2, S_3 三者中之一之外辅圆,则 F'_1, F'_2, F'_3 三者中必有一为朋力点(§7(6)②),但已知 F' 为朋力点,而依据 §7(7) 中定理知 F'_1, F'_2, F'_3 均非朋力点故也,至是本定理已证明矣.

---

① 设 S 及 S' 之位置能容一个如是之三角形,则即可能容无穷个如是之三角形,此乃为庞斯列定理(Poncelet's theorem).

若 F,F' 为虚点,则可应用绵续原则以推之.

② 通过三角形之等心而垂直于任一边之直线,其上之朋力共轭点,已知重合为该直线上之无穷远点,而其朋力锥线乃为该边及过对顶点之平行线(§8(3)② 注意 a),此时,其朋辅圆显然切于该边及过对顶点之平行线,而圆心乃在该直线上.由是,依据(2)① 中定理即引得次之定理:

定理　设过三角形之任一等心作每边之垂线,而为该边及过对顶点之平行线所限,则以诸所限线份为直径作圆,凡 12 圆,必同切于三角形之外接圆.

③ **定理**　上之 12 所作圆中,以其切于同边之四等圆为一组,凡三组;如是,每组之圆又另有一公切圆,凡三圆,均等于原三角形之外接圆,且同与九点圆相切.

证明　设以每组圆之连心线为轴而反摺之,则组中之圆不变,而外接圆之位置变矣,此变位后之外接圆,即组中四圆之另一公切圆也,因此三圆之心同在九点圆上,故与九点圆相切,甚属显明.

系 1　设过三角形之任一斯俾克圆(Spieker circles)[①]心作每边之垂线,而为该边及他二边中点连线所限,则以诸所限线段为直径作圆,凡 12 圆,必同切于三角形之九点圆.该 12 圆中,以其切于同边之四等圆为一组,凡三组;如是,每组之圆又另有一公切圆,凡三圆,均等于原三角形之九点圆,且同与中点三角形之九点圆相切.

系 2　三角形诸纳格尔点(Nagel points)[②]至诸边上之垂趾,凡 12 点,设以此等点各为心,而以所在边上之高线长度为半径作圆,则如是凡 12 圆,必同切于三角形之外重圆[③].该 12 圆中,以其心在同边上之四等圆为一组,凡三组;如是,每组之圆又另有一公切圆,凡三圆,均等于外重圆,且同与原三角形之外接圆相切.

(3)① **定理**　设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,P 之垂趾三角形为 $\triangle XYZ$,关于 P,命 $\triangle X'Y'Z'$ 为 $\triangle XYZ$ 之反演三角形,则 $\triangle ABC$ 及 $\triangle X'Y'Z'$ 相应于 P 之等心 I 及 I' 必与 P 共线.

证明　如图 29,设 P 之朋力共轭点为 P',则 P' 在 PI 线上,命 PP' 之中点

---

① 三角形三边中点所组成之三角形,称为中点三角形(medial triangle),中点三角形之四切圆,同称为斯氏圆.

② 设连三角形之顶点至对边上切圆之切点凡 12 连线,则除三角形之顶点外,另三三相交于八点;其中四点称为热尔岗点,其余四点称为纳格尔点.

③ 过三角形三顶点各作对边之平行线所组成之三角形,称为外重三角形,外重三角形之外接圆,称为外重圆.

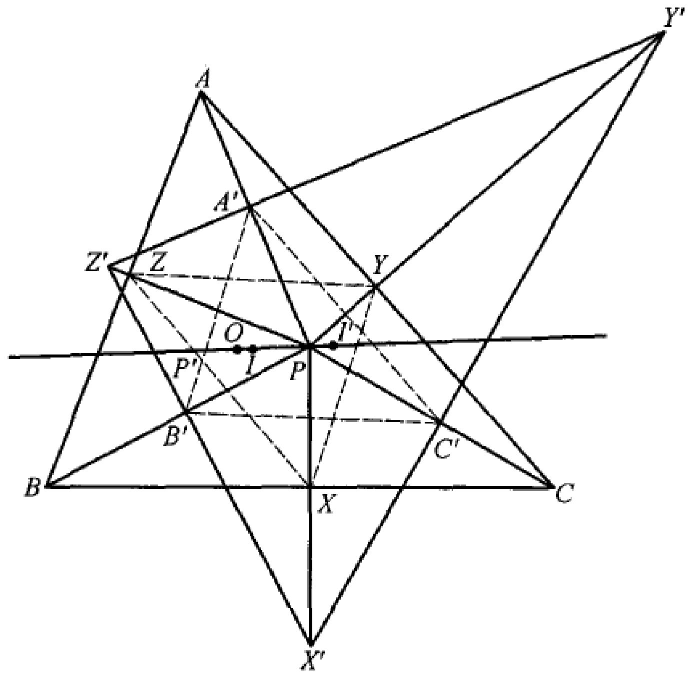


图 29

为 O，相应于 P，P' 之朋辅圆为 $\odot O(r)$，吾人已知此圆与三圆 $\odot PA$，$\odot PB$，$\odot PC$ 及 $\odot ABC$ 相切((2)①).

次设 PA，PB，PC 各交 $\triangle X'Y'Z'$ 之三边于 A'，B'，C'，则因

$$PA \perp Y'Z',\ PB \perp Z'X',\ PC \perp X'Y'$$

故知 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 关于 P 均互为反演点；由是三圆 $\odot PA$，$\odot PB$，$\odot PC$ 及 $\odot ABC$ 及反演为 $\triangle X'Y'Z'$ 之三边及 $\odot A'B'C'$. 因之，$\odot O(r)$ 必反演为 $\triangle X'Y'Z'$ 之切圆 $\odot I'$，此即示 P，O，I' 三点共线，故 P，I，I' 三点共线也.

② 上之定理，又或可以次之方式述之：

定理 设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点，关于 P，命 $\triangle A'B'C'$ 为 $\triangle ABC$ 之反演三角形，$\triangle ABC$ 相应于 P 之等心为 I，及 P 对于 $\triangle A'B'C'$ 之逆垂趾三角形相应于 P 之等心为 I'，则 P，I，I' 三点共线.

(4) **定义** 设过三角形之等心引一动直线，在其上作出两朋力点((1))，当该动直线旋转时，乃系绵续的，故其上之朋力点亦必系绵续的，由是知朋力点之轨迹乃为一绵续曲线，称之曰朋力曲线，因三角形有四等心，故每三角形皆有四朋力曲线.

定理 三角形之四朋力曲线同通过三角形之三顶点及四对等角共轭点——外心与垂心，由顶点所作外接圆三直径之他端与三高线上之无穷远点.

证明 因该四对等角共轭点之垂趾圆，乃为三角形之九点圆及三边，故同

时切于四切圆，是则该四对等角共轭点同时在四朋力曲线之上也明甚.

再以三角形之高线为弦，恒可作圆与任一切圆相切，但该所作圆可谓为三角形顶点之垂趾圆，故三角形之顶点亦为朋力点之一，且皆能相应于任一切圆，由是知三角形之三顶点亦同时在四朋力曲线上.

(5) **定理**　设一完全四边形外切于一圆，则每线节三角形[①]关于该切圆之朋力曲线必同相交于等视曲线上之四点(除切圆之心外)，此四点乃为两对之等角共轭点，其垂趾圆[②]均与该切圆相切，其切点同在牛顿线上.

证明　如图 30，设完全四边形 $ABCA'B'C'$ 外切于 $\odot O$，关于 $\odot O$，命 $\triangle ABC$，$\triangle AB'C'$，$\triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C$ 之朋力曲线为 S_0, S_1, S_2, S_3，又命完全四边形 $ABCA'B'C'$ 之等视曲线为 f，假定 S_0 与 f 相交于一点 P，则 P 之垂趾圆 p 与 $\odot O$ 相切，故 P 亦必同在 S_1, S_2, S_3 之上. 命 P 之等角共轭点为 P'，则 P' 之垂趾圆同为圆 p，于是 P' 同时在 f 及 S_0, S_1, S_2, S_3 之上.

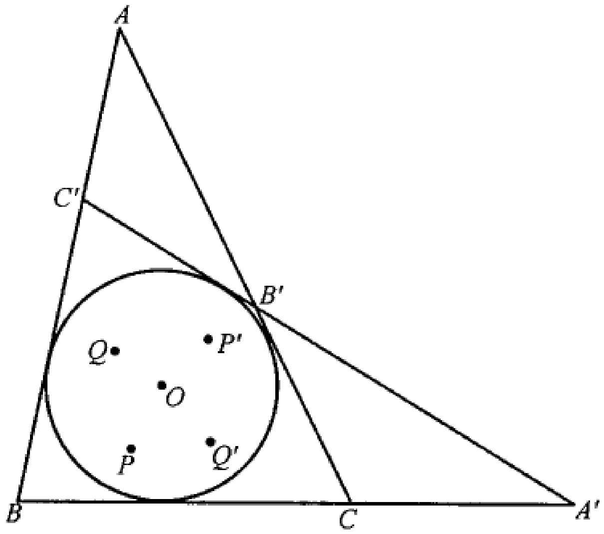


图 30

再假定 S_0 与 f 相交于另一点 Q，命 Q 之等角共轭点为 Q'，则同理知 Q, Q' 之垂趾圆 q 亦与 $\odot O$ 相切，故 Q, Q' 同时在 f 及 S_0, S_1, S_2, S_3 之上.

已知 $\odot O$，圆 p, q 之心同在牛顿线上，由是圆 p, q 与 $\odot O$ 之切点 T_1, T_2 亦必同在牛顿线上.

但 f 与 S_0, S_1, S_2, S_3 除上述之 P, P', Q, Q' 四交点外，是否尚有其他之交

① 完全四边形每三边所成之三角形，称为线节三角形，其数凡四.

② 此与三角形之垂趾圆有相同之意义，即设一点至完全四边形四边上之垂趾共圆，则此圆称为该点之垂趾圆.

点?此实有探索之必要.若其结果为否定的,则本定理即可确立.兹假定 S_0 与 f 又有另一交点 R,命 R 之等角共轭点为 R',则同理亦知 R,R' 之垂趾圆 r 与 $\odot O$ 相切.因圆 r 之心亦在牛顿线上,故圆 r 非切 $\odot O$ 于点 T_1,即切于点 T_2,设 PR 与 $P'R'$,PR' 与 $P'R$(或 QR 与 $Q'R'$,QR' 与 $Q'R$)之交点为 S,S',则此两点必为等角共轭点,命其垂趾圆为 s.如是,三圆 p,r,s(或三圆 q,r,s)共轴,亦即,圆 s 非切 $\odot O$ 于点 T_1,即切于点 T_2;易言之,即为四圆 O,p,r,s 或四圆 O,q,r,s 共轴,然此结论为否定的,故 R,R' 不能存在.①

系　设一完全四边形外切于一圆,则最多能有两垂趾圆与该切圆相切.

§10　有公切圆之四圆

(1) 兹欲进而讨论由朋力点所引出之四圆有一公切圆之特性,并由是衍得若干深饶兴味之特例,唯吾人须具备一应用定理,即著名之凯西定理(Casey's theorem),始克奏功;但又必先论述反演法中之数重要定理,而后凯西定理乃可证明,今一一论述之如次:

定理　设 r 为已知圆之半径,反演中心 O 对于此圆之幂为 $t\neq 0$,则其反演圆之半径 r' 有次之关系

$$r'=\frac{p}{t}\cdot r$$

式中之 p 为反演率.

证明　如图 31,设过 O 之一直线交已知圆于 A,B,命其反演点为 A',B',则此时有

$$p=\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}$$

及

$$t=\overline{OA}\cdot\overline{OB}$$

因 A 与 B' 为两圆之应位点(homologous points),故

$$\frac{r'}{r}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OB'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}=\frac{p}{t}$$

由是

$$r'=\frac{p}{t}\cdot r$$

① 此种性质,著者对之曾有详细之论述,但因牵涉过广,只宜以专篇论文,不便载于本文.

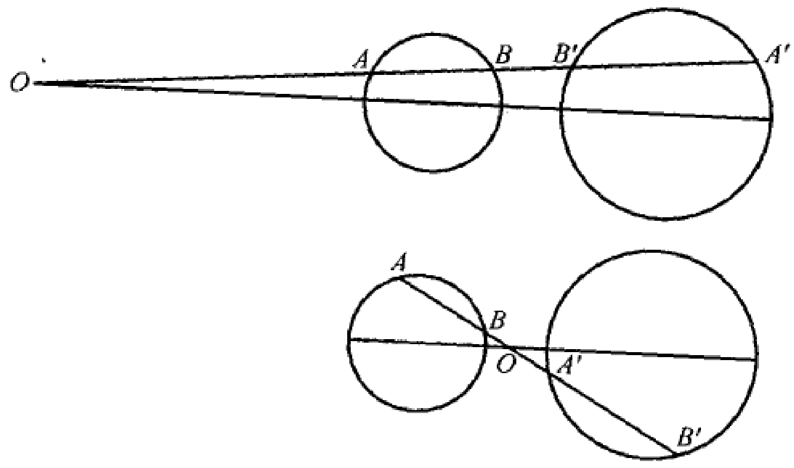


图 31

注意　上之关系式,当 $\frac{p}{t}$ 之值为正,则 O 为两圆之相似外心(external center of similitude),斯时,此两圆互为正位似形,故 r' 与 r 之值同号;当 $\frac{p}{r}$ 之值为负,则 O 为两圆之相似内心(internal center of similitude).斯时,此两圆互为负位似形,故 r' 与 r 之值异号.

(2)① **定理**　设命 $\odot A(a)$ 与 $\odot B(b)$ 之圆心距为 d,则此两圆关于反演基 $\odot O(\sqrt{p})$ 之反演圆 $\odot A'(a')$ 与 $\odot B'(b')$ 之圆心距为

$$d' = p\sqrt{\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{a^2 + b^2 - d^2}{\alpha\beta}}$$

式中之 α,β 为 O 对于 $\odot A(a),\odot B(b)$ 之幂.

证明　如图 32,当未正式证明上述关系式之先,吾人首须考察 $\angle A'OB'$ 与 $\angle AOB$ 为相等抑相辅,由(1)中定理,吾人知

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{a'}{a} = \frac{p}{\alpha}, \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{b'}{b} = \frac{p}{\beta}$$

若 O 同时在 $\odot A(a)$ 及 $\odot B(b)$ 之外或内,则 α 与 β 之值同号;如 O 在一圆之外而在他圆之内,则 α 与 β 之值异号,故当前者之情形时,$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ 与 $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ 之值同号,此时显然有

$$\angle A'OB' = \angle AOB$$

当后者之情形时,$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ 与 $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ 之值异号,此时显然有

$$\angle A'OB' = \pi - \angle AOB$$

由是 $$\cos\angle A'OB' = \pm\cos\angle AOB$$

式中之复号,上者系表前者之情形,下者系表后者之情形.

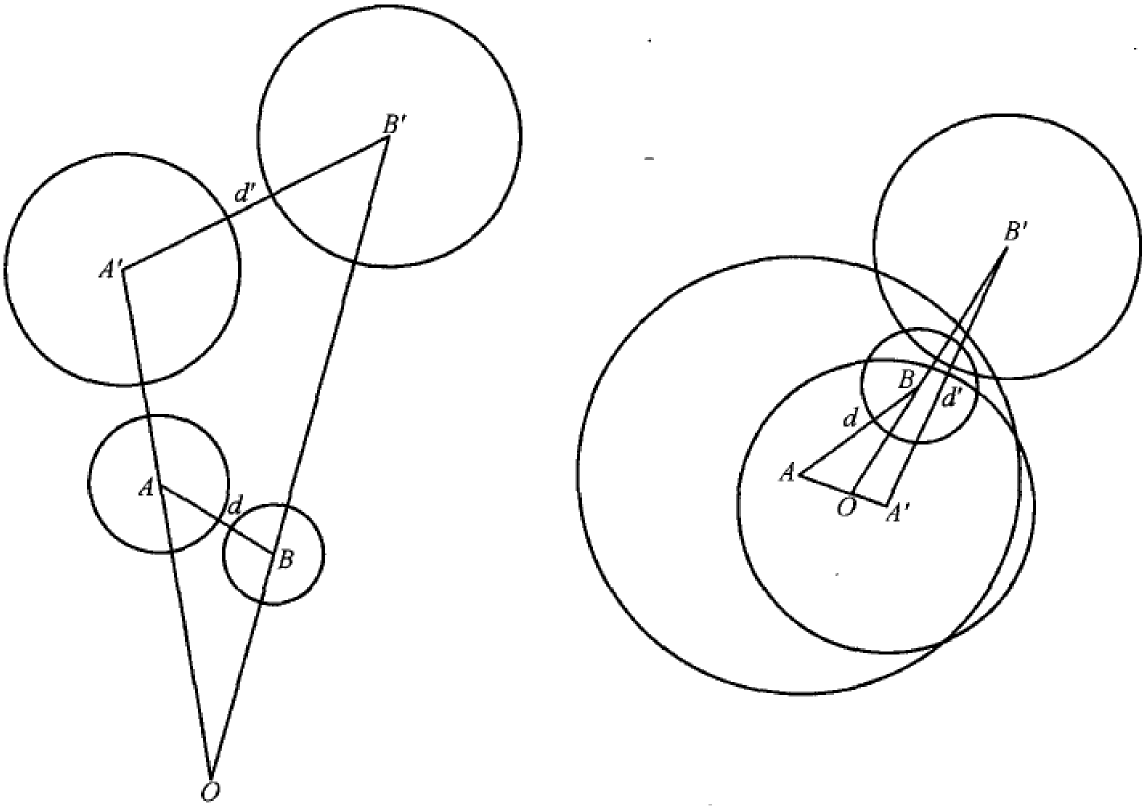


图 32

兹应用余弦定则(law of cosines)[①],可得

$$d'^2 = \overline{OA'^2} + \overline{OB'^2} - 2\,\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\cos\angle A'OB'$$

在此式中,吾人应注意,$\overline{OA'}$ 及$\overline{OB'}$ 之值均须系正值者,然后从适所论之情形. $\overline{OA'}$ 与$\overline{OB'}$ 之值系依 O 之位置而为同号或异号:盖无论在何者之情形下,吾人恒视$\overline{OA}$ 及$\overline{OB}$ 之值为正,由是当 O 之位置属前者之情形时,$\overline{OA'}$ 与$\overline{OB'}$ 之值同号;属后者之情形时,$\overline{OA'}$ 与$\overline{OB'}$ 之值异号,故若采取此观点,则该式实应书如

$$d'^2 = \overline{OA'^2} + \overline{OB'^2} \mp 2\,\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\cos\angle A'OB'$$

化之,为

$$d'^2 = \overline{OA'^2} + \overline{OB'^2} - 2\,\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\cos\angle AOB =$$
$$\overline{OA'^2} + \overline{OB'^2} - 2\,\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\frac{\overline{OA^2}+\overline{OB^2}-d^2}{2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}} =$$

① 此定则在普通之三角学书籍均载有.

$$\overline{OA'^2}+\overline{OB'^2}-\frac{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}(\overline{OA^2}+\overline{OB^2}-d^2)=$$

$$\frac{p^2}{\alpha^2}\cdot\overline{OA^2}+\frac{p^2}{\beta^2}\cdot\overline{OB^2}-\frac{p^2}{\alpha\beta}(\overline{OA^2}+\overline{OB^2}-d^2)=$$

$$p^2\left(\frac{a^2+\alpha}{\alpha^2}+\frac{b^2+\beta}{\beta^2}-\frac{a^2+\alpha+b^2+\beta-d^2}{\alpha\beta}\right)=$$

$$p^2\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{a^2+b^2-d^2}{\alpha\beta}\right)$$

故
$$d'=p\sqrt{\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{a^2+b^2-d^2}{\alpha\beta}}$$

② **定理**　两圆经反演后，其交角仍不变，唯当反演中心在一圆之外而在他圆之内时，则为相辅.

证明　若两圆相交，则直接在图形中，甚易证之；但如两圆不相交，则其交角为虚的，倘不应用绵续原则，此时不能直接由图形以作证. 设吾人用下式以表两圆之交角

$$\varphi=\cos^{-1}\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}$$

式中之 r_1, r_2 为两圆之半径，d 为其圆心距，则就此式以证之，即可兼括两种之情形.

兹仍沿用(2)① 中定理之记号，则由(1) 及(2)① 中定理，可得

$$\frac{a'^2+b'^2-d'^2}{2a'b'}=\frac{\frac{p^2}{\alpha^2}\cdot a^2+\frac{p^2}{\beta^2}\cdot b^2-p^2\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{a^2+b^2-d^2}{\alpha\beta}\right)}{\frac{p^2}{\alpha\beta}\cdot 2ab}=$$

$$\frac{a^2+b^2-d^2}{2ab} \qquad ①$$

但在式①中，吾人尚须注意者：a 与 b 之值恒视为正，而 a' 与 b' 之值则系依 O 之位置而为同号或异号，当 O 同时在 $\odot A(a)$ 及 $\odot B(b)$ 之外或内，则 a' 与 b' 之值同号，今命

$$a'=\pm a_1, b'=\pm b_1$$

a_1, b_1 均表正值，以之代入式 ① 中，得

$$\frac{a_1^2+b_1^2-d'^2}{2a_1b_1}=\frac{a^2+b^2-d^2}{2ab}$$

如 O 在一圆之外而在他圆之内，则 a' 与 b' 之值异号，今命

$$a' = \pm a_1, b' = \mp b_1$$

仍代入式 ① 中,得

$$-\frac{a_1^2 + b_1^2 - d'^2}{2a_1 b_1} = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}$$

然实则吾人对于 $\odot A'(a')$ 与 $\odot B'(b')$ 系以独立之场合观之,恒视 a' 与 b' 之值为正者,故若采取此观点,则式 ① 实应书如

$$\pm \frac{a'^2 + b'^2 - d'^2}{2a'b'} = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}$$

由是

$$\pm \cos \varphi' = \cos \varphi$$

式中之 φ 及 φ' 乃各为 $\odot A(a)$ 与 $\odot B(b)$ 及 $\odot A'(a')$ 与 $\odot B'(b')$ 之交角,当

$$+ \cos \varphi' = \cos \varphi$$

即示在前者之情形时,φ' 与 φ 相等也,而当

$$- \cos \varphi' = \cos \varphi$$

即示在后者之情形时,φ' 与 φ 相补也.

系 两切圆经反演后,仍然相切,且其切向(contact)①不变;唯当反演中心在一圆之外而在他圆之内时,则其切向相异.

(3) **定理** 设两已知圆之半径为 r_1 及 r_2,外公切线为 t,内公切线为 $\bar{t}$,并设此两圆之反演圆之半径为 r'_1 及 r'_2,外公切线为 t',内公切线为 $\bar{t}'$,则当反演中心同在两已知圆之外或内时,恒有

$$\frac{t^2}{r_1 r_2} = \frac{t'^2}{r'_1 r'_2}, \frac{\bar{t}^2}{r_1 r_2} = \frac{\bar{t}'^2}{r'_1 r'_2}$$

唯当反演中心在一圆之外而在他圆之内,此时变为

$$\frac{t^2}{r_1 r_2} = -\frac{\bar{t}'^2}{r'_1 r'_2}, \frac{\bar{t}^2}{r_1 r_2} = -\frac{t'^2}{r'_1 r'_2}$$

倘两圆无公切线,可以下两式代之

$$T^2 = D^2 - (R_1 - R_2)^2, \bar{T}^2 = D^2 - (R_1 + R_2)^2$$

前式乃表外公切线,后式则表内公切线,式中之 R_1, R_2 为两圆之半径,D 为其圆心距.

---

① 两圆相切,可分为外切(externally tangent)及内切(internally tangent),此处之外或内,称之为切向.设一圆与他两圆相切,若皆为外切或内切,则曰该圆与他两圆有同切向(like contact),如一为外切一为内切,则曰异切向(unlike contact).

证明　设命两已知圆之交角为 φ，其两反演圆之交角为 φ'，则由(2)② 中定理，已知有

$$\cos\varphi = \pm\cos\varphi'$$

或

$$\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2} = \pm\frac{r'^2_1 + r'^2_2 - d'^2}{2r'_1 r'_2} \qquad ①$$

以 1 同减式 ① 两端而整理之，则为

$$\frac{d^2 - (r_1 - r_2)^2}{r_1 r_2} = \pm\frac{d'^2 - (r'_1 \mp r'_2)^2}{r'_1 r'_2} \qquad ②$$

此式中之复号，其上者乃表反演中心同在两已知圆之外或内时之关系，其下者则表反演中心在一圆之外而在他圆之内时之关系，由是在前者之情形下，式 ② 乃为

$$\frac{t^2}{r_1 r_2} = \frac{t'^2}{r'_1 r'_2}$$

而在后者之情形下，则为

$$\frac{t^2}{r_1 r_2} = -\frac{\bar{t}'^2}{r'_1 r'_2}$$

次将式 ① 两端同时变号后再同减 1 而整理之，则为

$$\frac{d^2 - (r_1 + r_2)^2}{r_1 r_2} = \pm\frac{d'^2 - (r'_1 \pm r'_2)^2}{r'_1 r'_2} \qquad ③$$

式中复号之关系，仍如前之所述，由是在前者之情形时，式 ③ 乃为

$$\frac{\bar{t}^2}{r_1 r_2} = \frac{\bar{t}'^2}{r'_1 r'_2}$$

而在后者之情形时，则为

$$\frac{\bar{t}^2}{r_1 r_2} = -\frac{t'^2}{r'_1 r'_2}$$

(4) **凯西定理**(Casey's theorem)　四圆 c_1, c_2, c_3, c_4 有一公切圆 k 之充要条件为

$$\pm t_{41}t_{23} \pm t_{42}t_{31} \pm t_{43}t_{12} = 0$$

式中之 t_{41} 乃表 c_4 与 c_1 之公切线，……，但其所表系外公切线抑内切线，则须视乎该两圆与公切圆 k 之切向相同抑相异而定. 此关系式特称之为凯西公式(Casey's formula).

考四圆同切于一公切圆，其切向不外乎下述之三种情况：

① 四圆与公切圆之切向均相同.

② 三圆与公切圆之切向相同,而他一圆之切向与彼等相异.

③ 两圆与公切圆相外切,而他两圆与公切圆相内切.

由是凯西公式中之 t,其所表之公切线,亦不外乎三种情形:

① 均为外公切线.

② 有一附码相同者同为内公切线,每项各占其一,其余则皆为外公切线,每项亦各占其一.

③ 其中一项同为外公切线,他两项皆为内公切线.

至式中之复号,则须视四圆实际之位置如何,始克决定取舍其正号或负号,此于应用上,虽无任何重大障碍,但吾人必须仔细窥察,庶不致误.

证明 如图33,设四圆 c_1,c_2,c_3,c_4 同切于一个圆 k,今以圆 k 上之一点为反演中心而反演之,则圆 k 反演为一直线,而四圆 c_1,c_2,c_3,c_4 反演为同切于此直线之四圆,命其切点为 A_1,A_2,A_3,A_4(图 34). 于是,吾人依据欧拉定理(Euler's theorem)[①],有

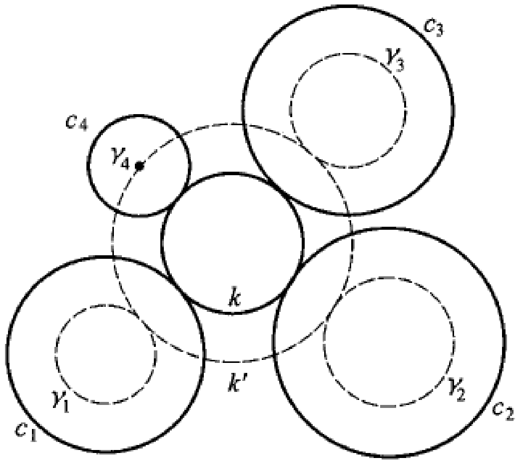


图 33

$$\pm \overline{A_4A_1}\cdot\overline{A_2A_3}\pm\overline{A_4A_2}\cdot\overline{A_3A_1}\pm\overline{A_4A_3}\cdot\overline{A_1A_2}=0$$

式中各项,同时以四反演圆半径 r'_1,r'_2,r'_3,r'_4 之积之方根除之,则为

$$\pm\frac{\overline{A_4A_1}}{\sqrt{r'_4r'_1}}\cdot\frac{\overline{A_2A_3}}{\sqrt{r'_2r'_3}}\pm\frac{\overline{A_4A_2}}{\sqrt{r'_4r'_2}}\cdot\frac{\overline{A_3A_1}}{\sqrt{r'_3r'_1}}\pm\frac{\overline{A_4A_3}}{\sqrt{r'_4r'_3}}\cdot\frac{\overline{A_1A_2}}{\sqrt{r'_1r'_2}}=0$$

当反演时,视诸圆及反演中心之位置如何,可使 $\overline{A_4A_1}$…… 分别为诸反演圆之外

① 此定理在普通之几何学书籍大都载有.

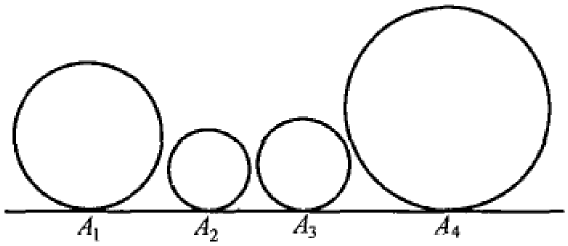


图 34

公切线或内公切线((2)② 系),但依(3) 中定理所示之四关系式,无论在什么情形下,吾人由上式恒得

$$\pm \frac{t_{41}}{\sqrt{r_4r_1}}\cdot\frac{t_{23}}{\sqrt{r_2r_3}}\cdot\pm\frac{t_{42}}{\sqrt{r_4r_2}}\cdot\frac{t_{31}}{\sqrt{r_3r_1}}\cdot\pm\frac{t_{43}}{\sqrt{r_4r_3}}\cdot\frac{t_{12}}{\sqrt{r_1r_2}}=0$$

式中之 r_1,r_2,r_3,r_4 为四圆 c_1,c_2,c_3,c_4 之半径,约去公因式,即得

$$\pm t_{41}\cdot t_{23}\pm t_{42}\cdot t_{31}\pm t_{43}\cdot t_{12}=0$$

逆之,设四圆 c_1,c_2,c_3,c_4 两两之公切线适合于凯西公式,而欲证彼等有一公切圆 k,在未证明之先,吾人首须认识如是之一事实:若两圆相切,则将其半径同时增大或减小,或一增大一减小(视乎两圆相内切或外切而定) 一相同之量,此时所得之两圆,仍属相切;易言之,即设变更一圆之半径,而同时变更他圆之半径至适当之量时,则所得之两圆仍相切.

兹进而证明适所欲证之论断,其步骤如次:先减小四圆中之一圆如 c_4 之半径至零,同时他三圆之半径亦同增大或减小一相同之量,而命此三变易圆为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$,此时代替 c_4 者,乃为一零圆 C_4,亦即 c_4 之心也.如是变易后,上述凯西公式中之六公切线,其长度及方位均不因是而变动,仍是保持其原有之向量,此于初等几何学中,吾人已熟知之矣.

以 C_4 为反演中心,p 为反演率,将三圆 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 反演之,设其反演圆为 $\gamma'_1,\gamma'_2,\gamma'_3$. 今命 R_1,R_2,R_3 为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 之半径,R'_1,R'_2,R'_3 及 T'_{23},T'_{31},T'_{12} 分别为 $\gamma'_1,\gamma'_2,\gamma'_3$ 之半径及两两之公切线(视 c_4 点及 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 三圆之位置如何而定其为外公切线或内公切线),则依(3) 中,定理有

$$t_{23}=\pm T'_{23}\sqrt{\pm\frac{R_2R_3}{R'_1R'_3}},t_{31}=\pm T'_{31}\sqrt{\pm\frac{R_3R_1}{R'_3R'_1}},t_{12}=\pm T'_{12}\sqrt{\pm\frac{R_1R_2}{R'_1R'_2}} \quad ①$$

又 t_{41},t_{42},t_{43} 可以为实值或虚值,故依(1) 中定理有

$$t_{41}=\pm\sqrt{\pm\frac{pR_1}{R'_1}},t_{42}=\pm\sqrt{\pm\frac{pR_2}{R'_2}},t_{43}=\pm\sqrt{\pm\frac{pR_3}{R'_3}} \quad ②$$

由是

$$\left.\begin{aligned} t_{41}t_{23} &= \pm T'_{23}\sqrt{\pm\frac{pR_1R_2R_3}{R'_1R'_2R'_3}} \\ t_{42}t_{31} &= \pm T'_{31}\sqrt{\pm\frac{pR_1R_2R_3}{R'_1R'_2R'_3}} \\ t_{43}t_{12} &= \pm T'_{12}\sqrt{\pm\frac{pR_1R_2R_3}{R'_1R'_2R'_3}} \end{aligned}\right\} \qquad ③$$

至是吾人须注意:一、设 C_4 同时在三圆 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 之外或内,则①之三式根号中之复号应同时取正;而②之三式根号中之复号应同时取正或负.二、设 C_4 在一圆比如 γ_1 之外而在他二圆 γ_2,γ_3 之内,则①之第一式根号中之复号应取正,第二、第三两式根号中之复号应同时取负;而②之第一式根号中之复号应取正或负(视 p 值为正或负而定),第二、第三两式根号中之复号应同时取负或正(视 p 值为正或负而定).三、设 C_4 在一圆比如 γ_1 之内而在他二圆 γ_2,γ_3 之外,则①之第一式根号中之复号应取正,第二第三两式根号中之复号应同时取负;而②之第一式根号中之复号应取负或正(视 p 值为正或负而定),第二、第三两式根号中之复号应同时取正或负(视 p 值为正或负而定).四、其他之情形均与二或三相似,观此,可见③之三式根号中之复号必同时为正或负.因是,以③之三式代入凯西公式中,吾人可得约去其相同之因式,从而得

$$\pm T'_{23} \pm T'_{31} \pm T'_{12} = 0$$

次以 $\gamma'_1,\gamma'_2,\gamma'_3$ 各为大圆(great circle)作成三球,并作一平面 σ 同与此三球相切(使此三球同在 σ 之一侧或分在两侧,须视上式中之 T' 之为外公切线或内公切线而定),设 σ 与三球之切点为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$(图 35),则吾人已知

$$T'_{23} = \overline{\alpha_2\alpha_3},\ T'_{31} = \overline{\alpha_3\alpha_1},\ T'_{12} = \overline{\alpha_1\alpha_2}$$

代入上式,得

$$\pm\overline{\alpha_2\alpha_3} \pm \overline{\alpha_3\alpha_1} \pm \overline{\alpha_1\alpha_2} = 0$$

故由沙勒定理(Chasles' theorem)①,知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为共线点.

再命三圆 $\gamma'_1,\gamma'_2,\gamma'_3$ 之心为 C'_1,C'_2,C'_3,则 $C'_1\alpha_1,C'_2\alpha_2,C'_3\alpha_3$ 均垂直于平面 σ,其垂趾 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 既共线,可知三直线 $C'_1\alpha_1,C'_2\alpha_2,C'_3\alpha_3$ 同在一平面上,易言之,即 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 为平面 $C'_1C'_2C'_3$ 与 σ 之交线,是则直线 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 同切于三圆 $\gamma'_1,\gamma'_2,\gamma'_3$ 也明甚.

① 此定理在普通之几何学书籍大都载有.

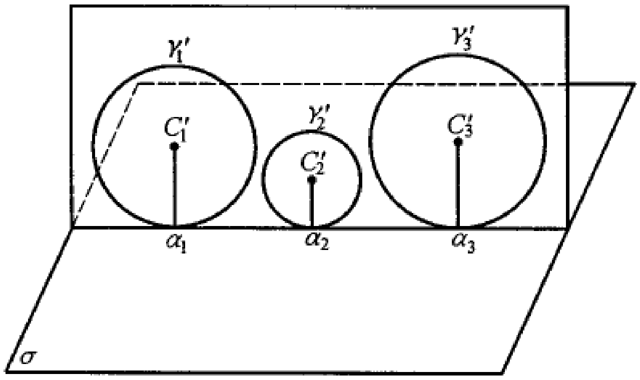


图 35

由是,设将适所云之反演法还原,则可知三圆 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 及零圆 C_4 有一公切圆 k',因之,四圆 c_1,c_2,c_3,c_4 亦必有一公切圆 k 也,至是乃完成其证.

注意　设四圆 c_1,c_2,c_3,c_4 中有三圆为零圆,则此定理即变其形为 §3(1) 之定理;若四圆皆为零圆,则此时之变形定理,即通常被称为托勒密定理(Ptolemy's theorem)者.

(5) **定理**　设一点 P 对于 $\triangle ABC$ 之垂趾三角形为 $\triangle XYZ$,命

$$\overline{YZ}=x,\overline{ZX}=y,\overline{XY}=z$$

及

$$\overline{XB}=x_1,\overline{XC}=x_2$$

$$\overline{YC}=y_1,\overline{YA}=y_2$$

$$\overline{ZA}=z_1,\overline{ZB}=z_2$$

即 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点之充要条件为下列诸式之一:

$$\left.\begin{array}{l}
(\text{I})(y_2+z_1)(-x+y+z)+(z_2+x_1)(+x-y+z)+\\
\qquad(x_2+y_1)(+x+y-z)=0\\
(\text{II})(y_2+z_1)(+x+y+z)+(z_2+x_1)(-x-y+z)+\\
\qquad(x_2+y_1)(-x+y-z)=0\\
(\text{III})(y_2+z_1)(-x-y+z)+(z_2+x_1)(+x+y+z)+\\
\qquad(x_2+y_1)(+x-y-z)=0\\
(\text{IV})(y_2+z_1)(-x+y-z)+(z_2+x_1)(+x-y-z)+\\
\qquad(x_2+y_1)(+x+yz)=0
\end{array}\right\}\quad(\text{甲})$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\text{Ⅰ})(y_2+z_1)(+x+y+z)+(z_2-x_1)(-x-y+z)+\\
&\qquad(x_2-y_1)(+x-y+z)=0\\
&(\text{Ⅱ})(y_2+z_1)(-x+y+z)+(z_2-x_1)(+x-y+z)+\\
&\qquad(x_2-y_1)(-x-y+z)=0\\
&(\text{Ⅲ})(y_2+z_1)(+x-y+z)+(z_2-x_1)(-x+y+z)+\\
&\qquad(x_2-y_1)(+x+y+z)=0\\
&(\text{Ⅳ})(y_2+z_1)(+x+y-z)+(z_2-x_1)(-x-y-z)+\\
&\qquad(x_2-y_1)(+x-y-z)=0
\end{aligned}\right\}\quad(\text{乙})$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\text{Ⅰ})(y_2-z_1)(+x+y-z)+(z_2+x_1)(+x+y+z)+\\
&\qquad(x_2-y_1)(+x-y-z)=0\\
&(\text{Ⅱ})(y_2-z_1)(-x+y-z)+(z_2+x_1)(-x+y+z)+\\
&\qquad(x_2-y_1)(-x-y-z)=0\\
&(\text{Ⅲ})(y_2-z_1)(+x-y-z)+(z_2+x_1)(+x-y+z)+\\
&\qquad(x_2-y_1)(+x+y-z)=0\\
&(\text{Ⅳ})(y_2-z_1)(+x+y+z)+(z_2+x_1)(+x+y-z)+\\
&\qquad(x_2-y_1)(+x-y+z)=0
\end{aligned}\right\}\quad(\text{丙})$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\text{Ⅰ})(y_2-z_1)(-x+y-z)+(z_2-x_1)(-x+y+z)+\\
&\qquad(x_2+y_1)(+x+y+z)=0\\
&(\text{Ⅱ})(y_2-z_1)(+x+y-z)+(z_2-x_1)(+x+y+z)+\\
&\qquad(x_2+y_1)(-x+y+z)=0\\
&(\text{Ⅲ})(y_2-z_1)(-x-y-z)+(z_2-x_1)(-x-y+z)+\\
&\qquad(x_2+y_1)(+x-y+z)=0\\
&(\text{Ⅳ})(y_2-z_1)(-x+y+z)+(z_2-x_1)(-x+y-z)+\\
&\qquad(x_2+y_1)(+x+y-z)=0
\end{aligned}\right\}\quad(\text{丁})$$

(甲)、(乙)、(丙)、(丁)各式,乃依次表示 P 系相应于 $\triangle ABC$ 之内切圆,对 A,对 B,对 C 之旁切圆;至其幂根式之方式之次序,与 §7(3) 中所云之(甲)、(乙)、(丙)、(丁)四种情形同.

证明　如图 36,命 $\triangle ABC$ 之切圆 t 与三边之切点为 α,β,γ,则由 §3(1),§7(1) 知 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点之充要条件为

$$\pm x\cdot\overline{X\alpha}\pm y\cdot\overline{Y\beta}\pm z\cdot\overline{Z\gamma}=0 \qquad ①$$

令
$$\pm x=x',\ \pm y=y',\ \pm z=z'$$

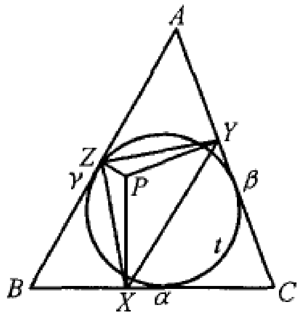


图 36

则式 ① 可书知

$$x' \cdot \overline{X\alpha} + y' \cdot \overline{Y\beta} + z' \cdot \overline{Z\gamma} = 0$$

或

$$x'(x_1 + \overline{B\alpha}) + y'(y_1 + \overline{C\beta}) + z'(z' + \overline{A\gamma}) = 0 \qquad ②$$

假定 t 为 $\triangle ABC$ 之内切圆,并以 a,b,c 表 $\triangle ABC$ 之三边,则式 ② 为

$$x'\left(x_1 + \frac{c+a-b}{2}\right) + y'\left(y_1 + \frac{a+b-c}{2}\right) + z'\left(z_1 + \frac{b+c-a}{2}\right) = 0$$

化之,为

$$x'\left(x_1 + \frac{z_2 - z_1 + x_2 - x_1 - y_2 + y_1}{2}\right) + y'\left(y_1 + \frac{x_2 - x_1 + y_2 - y_1 - z_2 + z_1}{2}\right) +$$

$$z'\left(z_1 + \frac{y_2 - y_1 + z_2 - z_1 - x_2 + x_1}{2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}x'(-\overline{y_2+z_1} + \overline{z_2+x_1} + \overline{x_2+y_1}) + \frac{1}{2}y'(+\overline{y_2+z_1} - \overline{z_2+x_1} + \overline{x_2+y_1}) +$$

$$\frac{1}{2}z'(+\overline{y_2+z_1} + \overline{z_2+x_1} - \overline{x_2+y_1}) = 0$$

约去公因数$\frac{1}{2}$,并整理之,可得

$$(y_2 + z_1)(-x' + y' + z') + (z_2 + x_1)(+x' - y' + z') +$$

$$(x_2 + y_1)(+x' + y' - z') = 0 \qquad ③$$

以

$$\begin{cases} x' = x, y' = y, z' = z \\ x' = -x, y' = y, z' = z \\ x' = x, y' = -y, z' = z \\ x' = x, y' = y, z' = -z \end{cases}$$

诸组之值依次代入式 ③ 中,即得(甲)之各式.

次设 t 为 $\triangle ABC$ 对 A 之旁切圆,则式 ② 为

$$x'\left(x_1+\frac{a+b-c}{2}\right)+y'\left(y_1-\frac{c+a-b}{2}\right)+z'\left(z_1+\frac{a+b+c}{2}\right)=0$$

化之,为

$$x'\left(x_1+\frac{x_2-x_1+y_2-y_1-z_2+z_1}{2}\right)+y'\left(y_1-\frac{z_2-z_1+x_2-x_1-y_2+y_1}{2}\right)+$$

$$z'\left(z_1+\frac{x_2-x_1+y_2-y_1+z_2-z_1}{2}\right)=0$$

$$\frac{1}{2}x'(+\overline{y_2+z_1}-\overline{z_2-x_1}+\overline{x_2-y_1})+\frac{1}{2}y'(+\overline{y_2+z_1}-\overline{z_2-x_1}-\overline{x_2-y_1})+$$

$$\frac{1}{2}z'(+\overline{y_2+z_1}+\overline{z_2-x_1}+\overline{x_2-y_1})=0$$

约去公因数$\frac{1}{2}$,并整理之,可得

$$(y_2+z_1)(+x'+y'+z')+(z_2-x_1)(-x'-y'+z')+$$

$$(x_2-y_1)(+x'-y'+z')=0 \qquad ④$$

如前以 x',y',z' 诸组之值依次代入式 ④ 中,即得(乙) 之各式.

至于(丙) 与(丁) 之各式,可依换式原理由(乙) 之式推得,故不另证.

(6)① **定理**　设 P 为 $\triangle ABC$ 之朋力点,P 之垂趾三角形为 $\triangle A'B'C'$.命 $\triangle A'B'C'$ 相应于 P 之切圆为 u,$\triangle AB'C'$,$\triangle A'BC'$,$\triangle A'B'C$ 各一对相应之切圆为 u_1 与 u'_1,u_2 与 u'_2,u_3 与 u'_3,则四圆 u,u_1,u_2,u_3 及四圆 u,u'_1,u'_2,u'_3 必各有一公切圆 k 及 k'.

诸切圆 u 之位置,与 P 系相应于 $\triangle ABC$ 之何种切圆及其幂根式之方式,具有密切之关系.下述各条,即为决定诸切圆 u 之位置之原则,其次序及 P 之幂根式方式与 §7(3) 中所云之(甲)、(乙)、(丙)、(丁) 四种情形同.

(甲)P 相应于 $\triangle ABC$ 之内切圆,依其幂根式之方式而有四种情形:

(Ⅰ)u 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆;

(Ⅱ)u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆;

(Ⅲ)u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 B' 之旁切圆;

(Ⅳ)u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆.

u_1,u'_1 中,一为 $\triangle AB'C'$ 之内切圆,一为对 A 之旁切圆;

u_2,u'_2 中,一为 $\triangle A'BC'$ 之内切圆,一为对 B 之旁切圆;

u_3,u'_3 中,一为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆,一为对 C 之旁切圆.

(乙)P 相应于 $\triangle ABC$ 对 A 之旁切圆,此时亦有四种情形:

(Ⅰ)u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆;

(Ⅱ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆;

(Ⅲ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆;

(Ⅳ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 B' 之旁切圆.

u_1, u'_1 中,一为 $\triangle AB'C'$ 之内切圆,一为对 A 之旁切圆;

u_2, u'_2 中,一为 $\triangle A'BC'$ 对 C' 之旁切圆,一为对 A' 之旁切圆;

u_3, u'_3 中,一为 $\triangle A'B'C$ 对 A' 之旁切圆,一为对 B' 之旁切圆.

(丙) P 相应于 $\triangle ABC$ 对 B 之旁切圆,此时亦有四种情形:

(Ⅰ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 B' 之旁切圆;

(Ⅱ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆;

(Ⅲ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆;

(Ⅳ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆.

u_1, u'_1 中,一为 $\triangle AB'C'$ 对 B' 之旁切圆,一为对 C' 之旁切圆;

u_2, u'_2 中,一为 $\triangle A'BC'$ 之内切圆,一为对 B 之旁切圆;

u_3, u'_3 中,一为 $\triangle A'B'C$ 对 A' 之旁切圆,一为对 B' 之旁切圆.

(丁) P 相应于 $\triangle ABC$ 对 C 之旁切圆,此时亦有四种情形:

(Ⅰ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 C' 之旁切圆;

(Ⅱ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 B' 之旁切圆;

(Ⅲ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 对 A' 之旁切圆;

(Ⅳ) u 为 $\triangle A'B'C'$ 之内切圆.

u_1, u'_1 中,一为 $\triangle AB'C'$ 对 B' 之旁切圆,一为对 C' 之旁切圆;

u_2, u'_2 中,一为 $\triangle A'BC'$ 对 C' 之旁切圆,一为对 A' 之旁切圆;

u_3, u'_3 中,一为 $\triangle A'B'C$ 之内切圆,一为对 C 之旁切圆.

上述各条,诸圆 $u_1, u'_1, u_2, u'_2, u_3, u'_3$ 之位置,系依次适用于

$$\angle B'AC' = \angle BAC, \angle C'BA' = \angle CBA, \angle A'CB' = \angle ACB$$

者倘

$$\angle B'AC' = \pi - \angle BAC, \angle C'BA' = \pi - \angle CBA, \angle A'CB' = \pi - \angle ACB$$

则所取诸圆 $u_1, u'_1, u_2, u'_2, u_3, u'_3$ 之位置,应依次与上述者相反(如在前者中,取 u_1, u'_1 一为 $\triangle AB'C'$ 之内切圆.一为对 A 之旁切圆;则在后者中,应取一为对 B' 之旁切圆,一为对 C' 之旁切圆……).更具体言之,设 P 相应于 $\triangle ABC$ 之等心为 I,则诸圆 $u_1, u'_1, u_2, u'_2, u_3, u'_3$ 之位置,系取其圆心依次各在 IA, IB, IC 之上者. 至四圆 u, u_1, u_2, u_3(或 u, u'_1, u'_2, u'_3) 之选定,以能使其两两附于 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 边上之公切线适合于凯西公式,三种情形之一为原则. 如

是,设已知一朋力点 P 系相应于何种切圆及其幂根式之方式,则吾人即不难决定四圆 u,u_1,u_2,u_3(或 u,u'_1,u'_2,u'_3)之位置矣.

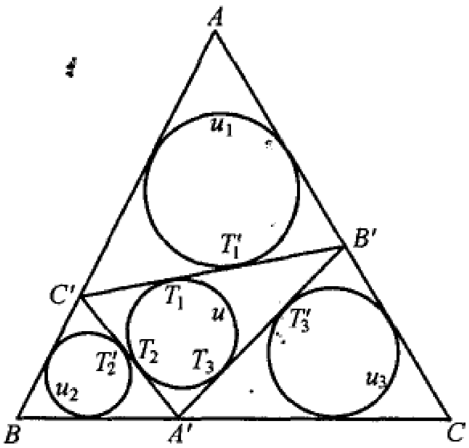


图 37

证明 (甲)(Ⅰ)假定 $\triangle A'B'C'$ 在 $\triangle ABC$ 中之位置如图 37 所示,此时选定 u_1,u_2,u_3 各为 $\triangle AB'C',\triangle A'BC',\triangle A'B'C$ 之内切圆,则四圆 u,u_1,u_2,u_3 两两附于 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 边上之公切线适能合于凯西公式三种情形之一($\triangle A'B'C'$ 在 $\triangle ABC$ 中之其他位置,不另论述,以下亦同.),设圆 u 切 $\triangle A'B'C'$ 三边于 T_1,T_2,T_3,圆 u_1 切 $B'C'$ 于 T'_1,圆 u_2 切 $C'A'$ 于 T'_2,圆 u_3 切 $A'B'$ 于 T'_3,命

$$\overline{T'_1B'}=l,\overline{T'_1C'}=l',\overline{T'_2C'}=m,$$
$$\overline{T'_2A'}=m',\overline{T'_3A'}=n,\overline{T'_3B'}=n'$$

如是,则见 u 与 u_1,u_2,u_3 之公切线顺次为

$$t_1=\overline{T_1T'_1}=\frac{1}{2}[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(\overline{T'_1B'}+\overline{T'_1C'})]=\frac{1}{2}[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(l+l')]$$

$$t_2=\overline{T_2T'_2}=\frac{1}{2}[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(\overline{T'_2C'}+\overline{T'_2A'})]=\frac{1}{2}[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(m+m')]$$

$$t_3=\overline{T_3T'_3}=\frac{1}{2}[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(\overline{T'_3A'}+\overline{T'_3B'})]=\frac{1}{2}[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')]$$

又 u_1,u_2,u_3 两两之公切线为

$$t'_1=\overline{T'_2A'}-\overline{T'_3A'}=m'-n$$
$$t'_2=\overline{T'_3B'}-\overline{T'_1B'}=n'-l$$
$$t'_3=\overline{T'_1C'}-\overline{T'_2C'}=l'-m$$

今乃欲证次式成立

$$+t_1t'_1+t_2t'_2+t_3t'_3=0$$

或

$$[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(l+l')](m'-n)+[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(m+m')](n'-l)+[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')](l'-m)=0 \quad ①$$

命 $a'=\overline{B'C'}, b'=\overline{C'A'}, c'=\overline{A'B'}, s'=\frac{1}{2}(a'+b'+c')$,则

$$\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'}=-(S'-b')+(S'-c')=b'-c'=(m'-m)-(n'-n)=(m'+n)-(m+n')$$

$$\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'}=-(S'-c')+(S'-a')=c'-a'=(n'-n)-(l'-l)=(n'+l)-(n+l')$$

$$\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'}=-(S'-a')+(S'-b')=a'-b'=(l'-l)-(m'-m)=(l'+m)-(l+m')$$

以之代入式①中,并整理之,可得

$$(l'^2-l^2)+(m'^2-m^2)+(n'^2-n^2)+2(mn-m'n')+2(nl-n'l')+2(lm-l'm')=0 \quad ②$$

命 $\overline{A'B}=a_1, \overline{A'C}=a_2, \overline{B'C}=b_1, \overline{B'A}=b_2, \overline{C'A}=c_1, \overline{C'B}=c_2$,则

$$l=-\frac{1}{2}(\overline{B'C'}+\overline{B'A}-\overline{AC'})=-\frac{1}{2}(a'+b_2+c_1)$$

$$l'=\frac{1}{2}(\overline{B'C'}+\overline{AC'}-\overline{B'A})=\frac{1}{2}(a'-b_2-c_1)$$

$$m=-\frac{1}{2}(\overline{C'A'}+\overline{C'B}-\overline{BA'})=-\frac{1}{2}(b'+c_2+a_1)$$

$$m'=\frac{1}{2}(\overline{C'A'}+\overline{BA'}-\overline{C'B})=\frac{1}{2}(b'-c_2-a_1)$$

$$n=-\frac{1}{2}(\overline{A'B'}+\overline{A'C}-\overline{CB'})=-\frac{1}{2}(c'+a_2+b_1)$$

$$n'=\frac{1}{2}(\overline{A'B'}+\overline{CB'}-\overline{A'C})=\frac{1}{2}(c'-a_2-b_1)$$

由是

$$l'^2-l^2=-a'(b_2+c_1), 2(mn-m'n')=b'(a_2+b_1)+c'(c_2+a_1)$$

$$m'^2-m^2=-b'(c_2+a_1), 2(nl-n'l')=c'(b_2+c_1)+a'(a_2+b_1)$$

$$n'^2-n^2=-c'(a_2+b_1), 2(lm-l'm')=a'(c_2+a_1)+b'(b_2+c_1)$$

以之代入式②中,并整理之,即得

$$(b_2+c_1)(-a'+b'+c')+(c_2+a_1)(+a'-b'+c')+(a_2+b_1)(+a'+b'-c')=0 \quad ③$$

式③与(5)之(甲)式(Ⅰ)一致,故为真,于是式①成立,因知四圆 u,u_1,u_2,u_3 有一公切圆 k((4)).

次,设易三圆 u_1,u_2,u_3 为 u'_1,u'_2,u'_3,则 l,m,n 及 l',m',n' 显然为 $-l',-m',-n'$ 及 $-l,-m,-n$ 所替代,但此时式②仍能成立,故知四圆 u,u'_1,u'_2,u'_3 亦有一公切圆 k'.

(Ⅱ)兹选定 u_1 为 $\triangle AB'C'$ 对 A 之旁切圆,u_2,u_3 各为 $\triangle A'BC'$,$\triangle A'B'C$ 之内切圆,其他之记号一如前之所定,如图 38 所示,从图得

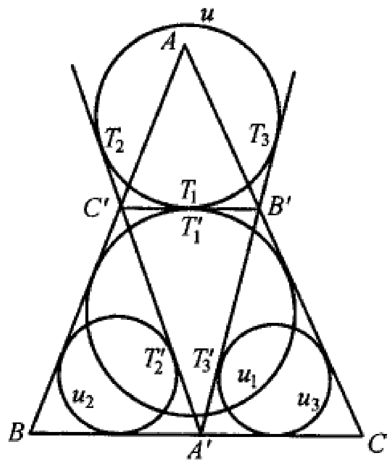


图 38

$$t_1=\frac{1}{2}[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(l+l')]$$

$$t_2=\frac{1}{2}[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(m+m')]$$

$$t_3=\frac{1}{2}[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')]$$

及
$$t'_1=m'-n,t'_2=n'+l,t'_3=-l'-m$$

今乃欲证次式成立

$$-t_1t'_1+t_2t'_2+t_3t'_3=0$$

或
$$-[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(l+l')](m'-n)+[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(m+m')](n'+l)-[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')](l'+m)=0 \quad ④$$

因

$$\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'}=-(s'-c')+(s'-b')=c'-b'=(n'-n)-(m'-m)=-(m'+n)+(m+n')$$

$$\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'}=(s'-b')+s'=c'+a'=(n'-n)+(l'-l)=(n'-l)-(n-l')$$

$$\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'}=-s'-(s'-c')=-a'-b'=-(l'-l)-(m'-m)=-(l'-m)+(l-m')$$

代入(4)式中,并整理之,可得

$$(l'^2-l^2)+(m'^2-m^2)+(n'^2-n^2)+2(mn-m'n')+2(n'l'-nl)+2(l'm'-lm)=0 \quad ⑤$$

但
$$l=-\frac{1}{2}(\overline{B'C'}+\overline{AC'}-\overline{B'A})=-\frac{1}{2}(a'-b_2-c_1)$$
$$l'=\frac{1}{2}(\overline{B'C'}+\overline{B'A}-\overline{AC'})=\frac{1}{2}(a'+b_2+c_1)$$
$$m=-\frac{1}{2}(b'+c_2+a_1),m'=\frac{1}{2}(b'-c_2-a_1)$$
$$n=-\frac{1}{2}(c'+a_2+b_1),n'=\frac{1}{2}(c'-a_2-b_1)$$
由是
$$l'^2-l^2=a'(b_2+c_1),2(mn-m'n')=b'(a_2+b_1)+c'(c_2+a_1)$$
$$m'^2-m^2=-b'(c_2+a_1),2(n'l'-nl)=c'(b_2+c_1)-a'(a_2+b_1)$$
$$n'^2-n^2=-c'(a_2+b_1),2(l'm'-lm)=-a'(c_2+a_1)+b'(b_2+c_1)$$
以之代入式⑤中,并整理之,即得
$$(b_2+c_1)(+a'+b'+c')+(c_2+a_1)(-a'-b'+c')+$$
$$(a_2+b_1)(-a'+b'-c')=0 \qquad ⑥$$
式⑥与(5)之(甲)式(Ⅱ)一致,故为真,于是式④成立,因知四圆 u,u_1,u_2,u_3 有一公切圆 $k((4))$.

次,设易三圆 u_1,u_2,u_3 为 u'_1,u'_2,u'_3,则 l,m,n 及 l',m',n' 显然为 $-l'$, $-m'$, $-n'$ 及 $-l$, $-m$, $-n$ 所替代,但此时式⑤仍能成立,故知四圆 u,u'_1, u'_2,u'_3 亦有一公切圆 k'.

(Ⅲ)及(Ⅳ)之证法,均与(Ⅱ)类似,应用换式原理即可推知.

(乙)(Ⅰ)兹选定 u_1 为 $\triangle AB'C'$ 之内切圆,u_2 为 $\triangle A'BC'$ 对 A' 之旁切圆,u_3 为 $\triangle A'B'C$ 对 A' 之旁切圆,如图39所示,从图得
$$t_1=\frac{1}{2}[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(l+l')]$$
$$t_2=\frac{1}{2}[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(m+m')]$$
$$t_3=\frac{1}{2}[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')]$$
及
$$t'_1=m'-n,t'_2=-n'-l,t'_3=l'+m$$
今乃欲证次式成立
$$+t_1t'_1+t_2t'_2+t_3t'_3=0$$
或
$$[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(l+l')](m'-n)-[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-$$
$$(m+m')](n'+l)+[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')](l'+m)=0 \qquad ⑦$$

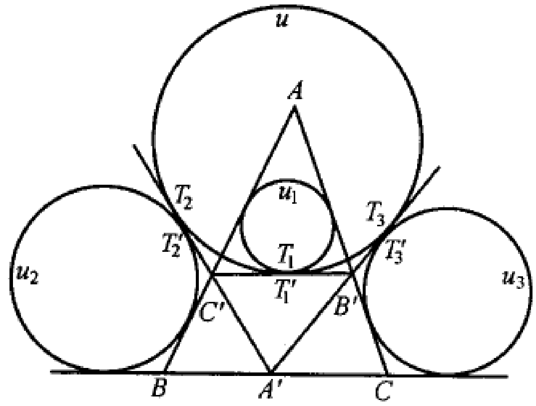


图 39

因
$$\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'}=-(m'+n)+(m+n')$$
$$\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'}=(n'-l)-(n-l)$$
$$\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'}=-(l'-m)+(l-m)$$
代入式 ⑦ 中,并整理之,可得
$$(l^2-l'^2)+(m^2-m'^2)+(n^2-n'^2)+2(m'n'-mn)+2(nl-n'l')+2(lm-l'm')=0 \quad ⑧$$
但
$$l=-\frac{1}{2}(a'+b_2+c_1),l'=\frac{1}{2}(a'-b_2-c_1)$$
$$m=\frac{1}{2}(\overline{C'B}+\overline{BA'}-\overline{C'A})=\frac{1}{2}(-b'+c_2-a_1)$$
$$m'=\frac{1}{2}(\overline{C'A'}+\overline{C'B}+\overline{BA})=\frac{1}{2}(b'+c_2-a_1)$$
$$n=-\frac{1}{2}(\overline{A'B'}+\overline{A'C}+\overline{CB'})=-\frac{1}{2}(c'+a_2-b_1)$$
$$n'=-\frac{1}{2}(\overline{A'C}+\overline{CB'}-\overline{A'B'})=-\frac{1}{2}(-c'+a_2-b_1)$$
由是
$$l^2-l'^2=a(b_2+c_1),2(m'n'-mn)=-b'(a_2-b_1)+c'(c_2-a_1)$$
$$m^2-m'^2=-b'(c_2-a_1),2(nl-n'l')=c'(b_2+c_1)+a'(a_2-b_1)$$
$$n^2-n'^2=c'(a_2-b_1),2(lm-l'm')=-a'(c_2-a_1)+b'(b_2+c_1)$$
以之代入式 ⑧ 中,并整理之,即得
$$(b_2+c_1)(+a'+b'+c')+(c_2-a_1)(-a'-b'+c')+(a_2-b_1)(+a'-b'+c')=0 \quad ⑨$$
式 ⑨ 与(5)之(乙)式(Ⅰ)一致,故为真,于是式 ⑦ 成立,因知四圆 u,u_1,u_2,u_3

有一公切圆 $k((4))$.

次,设易三圆 u_1,u_2,u_3 为 u'_1,u'_2,u'_3,则 l,m,n 及 l',m',n' 显然为 $-l'$, $-m'$, $-n'$ 及 $-l$, $-m$, $-n$ 所替代,但此时式 ⑧ 仍能成立,故知四圆 u,u'_1, u'_2,u'_3 亦有一公切圆 k'.

(Ⅱ)兹选定 u_1 为 $\triangle AB'C'$ 对 A 之旁切圆,u_1 为 $\triangle A'BC'$ 对 A' 之旁切圆,u_3 为 $\triangle A'B'C$ 对 A' 之旁切圆,如图 40 所示,从图得

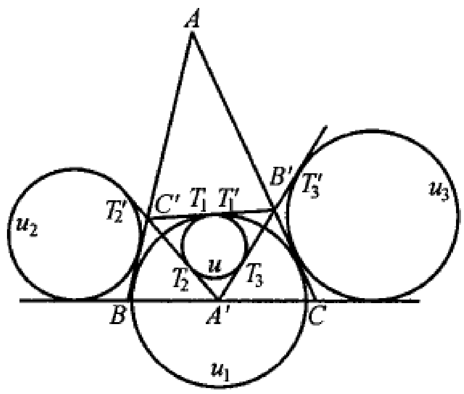


图 40

$$t_1=\frac{1}{2}[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(l+l')],$$

$$t_2=\frac{1}{2}[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(m+m')],$$

$$t_3=\frac{1}{2}[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')]$$

及
$$t'_1=m'-n$$
$$t'_2=-n'+l$$
$$t'_3=-l'+m$$

今乃欲证次式成立

$$-t_1t'_1+t_2t'_2+t_3t'_3=0$$

或
$$-[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C})-(l+l')](m'-n)-[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(m+m')](n'-l)-[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')](l'-m)=0 \qquad ⑩$$

因
$$\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'}=(m'+n)-(m+n'),$$
$$\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'}=(n'+l)-(n+l'),$$
$$\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'}=(l'+m)-(l+m')$$

代入式 ⑩ 中,并整理之,可得

$$(l^2-l'^2)+(m^2-m'^2)+(n^2+n'^2)+2(m'n'-mn)+2(n'l'-nl)+2(l'm'-lm)=0 \qquad ⑪$$

但

$$l=-\frac{1}{2}(a'-b_2-c_1),l'=\frac{1}{2}(a'+b_2+c_1)$$

$$m=\frac{1}{2}(-b'+c_2-a_1),m'=\frac{1}{2}(b'+c_2-a_1)$$

$$n=-\frac{1}{2}(c'+a_2-b_1),n'=-\frac{1}{2}(-c'+a_2-b_1)$$

由是

$$l^2 - l'^2 = -a'(b_2 + c_1), 2(m'n' - mn) = -b'(a_2 - b_1) + c'(c_2 - a_1)$$

$$m^2 - m'^2 = -b'(c_2 - a_1), 2(n'l' - nl) = c'(b_2 + c_1) - a'(a_2 - b_1)$$

$$n^2 - n'^2 = c'(a_2 - b_1), 2(l'm' - lm) = a'(c_2 - a_1) + b'(b_2 + c_1)$$

以之代入式 ⑪ 中,并整理之,即得

$$(b_2 + c_1)(-a' + b' + c') + (c_2 - a_1)(+a' - b' + c') + (a_2 - b_1)(-a' - b' + c') = 0 \quad ⑫$$

式 ⑫ 与(5)之(乙)式(Ⅱ)一致,故为真,于是式 ⑩ 成立,因知四圆 u, u_1, u_2, u_3 有一公切圆 k((4)).

次,设易三圆 u_1, u_2, u_3 为 u'_1, u'_2, u'_3,则 l, m, n 及 l', m', n' 显然为 $-l'$, $-m'$, $-n'$ 及 $-l$, $-m$, $-n$ 所替代,但此时式 ⑪ 仍能成立,故知四圆 u, u'_1, u'_2, u'_3 亦有一公切圆 k'.

(Ⅲ)兹选定 u_1 为 $\triangle AB'C'$ 之内切圆,u_2 为 $\triangle A'BC'$ 对 C' 之旁切圆,u_3 为 $\triangle A'B'C$ 对 A' 之旁切圆,如图 41 所示,从图得

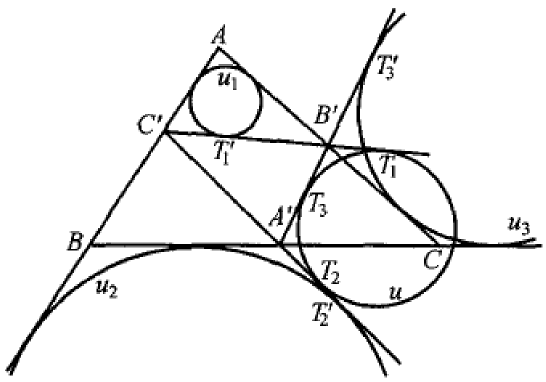


图 41

$$t_1 = \frac{1}{2}[(\overline{T_1B'} + \overline{T_1C'}) - (l + l')]$$

$$t_2 = \frac{1}{2}[(\overline{T_2C'} + \overline{T_2A'}) - (m + m')]$$

$$t_3 = \frac{1}{2}[(\overline{T_3A'} + \overline{T_3B'}) - (n + n')]$$

及 $$t'_1 = -m' - n, t'_2 = -n' - l, t'_3 = l' - m$$

今乃欲证次式成立

$$+ t_1t'_1 - t_2t'_2 + t_3t'_3 = 0$$

或 $$-[(\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'})-(l+l')](m'+n)+[(\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'})-(m+m')](n'+l)+[(\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'})-(n+n')](l'-m)=0 \quad ⑬$$

因 $$\overline{T_1B'}+\overline{T_1C'}=(s'-a')+s'=b'+c'=(m'-m)+(n'-n)=(m'-n)-(m-n')$$

$$\overline{T_2C'}+\overline{T_2A'}=-s'-(s'-b')=-c'-a'=-(n'-n')-(l'-l)=-(n'-l)+(n-l')$$

$$\overline{T_3A'}+\overline{T_3B'}=-(s'-b')+(s'-a')=b'-a'=(m'-m)-(l'-l)=-(l'+m)+(l+m')$$

代入式⑬中,并整理之,可得

$$(l^2-l'^2)+(m^2+m'^2)+(n^2-n'^2)+2(mn-m'n')+2(nl-n'l')+2(l'm'-lm)=0 \quad ⑭$$

但 $$l=-\frac{1}{2}(a'+b_2+c_1),l'=\frac{1}{2}(a'-b_2-c_1)$$

$$m=-\frac{1}{2}(\overline{C'A'}+\overline{C'B}+\overline{BA'})=-\frac{1}{2}(b'+c_2-a_1)$$

$$m'=-\frac{1}{2}(\overline{C'B'}+\overline{BA'}-\overline{C'A'})=-\frac{1}{2}(-b'+c_2-a_1)$$

$$n=-\frac{1}{2}(c'+a_2-b_1),n'=-\frac{1}{2}(-c'+a_2-b_1)$$

由是

$$l^2-l'^2=a'(b_2+c_1),2(mn-m'n')=b'(a_2-b_1)+c'(c_2-a_1)$$

$$m^2-m'^2=b'(c_2-a_1),2(nl-n'l')=c'(b_2+c_1)+a'(a_2-b_1)$$

$$n^2-n'^2=c'(a_2-b_1),2(l'm'-lm)=-a'(c_2-a_1)-b'(b_2+c_1)$$

以之代入式⑭中,并整理之,即得

$$(b_2+c_1)(+a'-b'+c')+(c_2-a_1)(-a'+b'+c')+(a_2-b_1)(+a'+b'+c')=0 \quad ⑮$$

式⑮与式(5)之(乙)式(Ⅲ)一致,故为真,于是式⑬成立,因知四圆 u,u_1,u_2,u_3 有一公切圆 $k((4))$.

次,设易三圆 u_1,u_2,u_3 为 u'_1,u'_2,u'_3,则 l,m,n 及 l',m',n' 显然为 $-l',-m',-n'$ 及 $-l,-m,-n$ 所替代,但此时式⑭仍能成立,故知四圆 u,u'_1,u'_2,u'_3 亦有一公切圆 k'.

(Ⅳ)之证法,与(Ⅲ)类似,不再论证.

至于(丙)及(丁)两种情形,均可由(乙)类推,故不另证.

② 在上定理之每种证明中，吾人若假定次式成立

$$\pm t_1t'_1 \pm t_2t'_2 \pm t_3t'_3 = 0$$

则见最后所推得之式，皆一一与(5)之诸式相一致；由是可知上定理之逆必然为真，故得次之定理：

定理 命 P 对于 $\triangle ABC$ 之垂趾三角形为 $\triangle A'B'C'$. 设在 $\triangle A'B'C'$, $\triangle AB'C'$, $\triangle A'BC'$, $\triangle A'B'C$ 中，各有一切圆 u, u_1, u_2, u_3，而此四圆有一公切圆 k 者，则 P 必为 $\triangle ABC$ 之朋力点.

(7) 在(6)①中定理之图中，设 P 重合于 $\triangle ABC$ 之垂心 H，则此时吾人易知 $\triangle AB'C'$, $\triangle A'BC'$, $\triangle A'B'C$ 均反向相似于 $\triangle ABC$ 而为同向相似形(directly similar figures)，及 H 为 $\triangle A'B'C'$ 之等心. 因 H 之垂趾圆(即九点圆)同时切于四切圆(§3(3))，故 H 必能同时具备四种朋力点之条件；直言之：一、$\triangle ABC$ 为锐角三角形者，则 H 同时适于(甲)(Ⅰ)，(乙)(Ⅱ)，(丙)(Ⅲ)，(丁)(Ⅳ)四种情形；二、$\angle A$ 为钝角者，则 H 同时适于(甲)(Ⅱ)，(乙)(Ⅰ)，(丙)(Ⅳ)，(丁)(Ⅲ)四种情形；三、$\angle B$ 为钝角者，则 H 同时适于(甲)(Ⅲ)，(乙)(Ⅳ)，(丙)(Ⅰ)，

(丁)(Ⅱ)四种情形；四、$\angle C$ 为钝角者，则 H 同时适于(甲)(Ⅳ)，(乙)(Ⅲ)，(丙)(Ⅱ)，(丁)(Ⅰ)四种情形. 倘集纳各种情形而比较之，并注意 H 之垂趾三角形之位置，则无论 $\triangle ABC$ 为锐角三角形或钝角三角形，恒能适合于次之定理：

定理 设 H 为 $\triangle ABC$ 之垂心，$\triangle A'B'C'$ 为垂三角形[①]，此时 $\triangle AB'C'$, $\triangle A'BC'$, $\triangle A'B'C$ 为同向相似形. 在此三相似之三角形中：一、各取一相当之切圆为一组，凡四组；二、各取 $\triangle AB'C'$, $\triangle A'BC'$, $\triangle A'B'C$ 对 A, B, C 之旁切圆为一组；三、取 $\triangle AB'C'$ 之内切圆，各取 $\triangle A'BC'$, $\triangle A'B'C$ 对 C', B' 之旁切圆为一组；四、取 $\triangle A'BC'$ 之内切圆，各取 $\triangle A'B'C$, $\triangle AB'C'$，对 A', C' 之旁切圆为一组；五、取 $\triangle A'B'C$ 之内切圆，各取 $\triangle AB'C'$, $\triangle A'BC'$ 对 B', A' 之旁切圆为一组，则以上之八组圆，每组之三圆与 $\triangle A'B'C'$ 之切圆 $\odot H$ 必各有一公切圆.

(8) **定理** 设 I 为 $\triangle ABC$ 之等心，在 IA, IB, IC 上各取一点 A', B', C'，令 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 为位似形；以 A', B', C' 为心各作圆俾分别切于 $\triangle ABC$ 之每两边，命此三圆各与 IA, IB, IC 之交点为 P, Q, R，过此三点各作该三圆之切线(图42)交 $\triangle ABC$ 各边于 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$；联结 $B'B_1$ 与 $C'C_2$, $C'C_1$ 与 $A'A_2$, $A'A_1$ 与 $B'B_2$ 交于 I_1, I_2, I_3，则以此三点为心而各切于 BC, CA, AB 之三圆

① 三角形垂心之垂趾三角形，特称为垂三角形.

$\odot I_1(r_1)$，$\odot I_2(r_2)$，$\odot I_3(r_3)$，与 $\triangle ABC$ 之切 $\odot I(r)$ 必有一公切圆 k，当 $\triangle A'B'C'$ 移动时，圆 k 与 $\odot I(r)$ 之切点恒为定点.

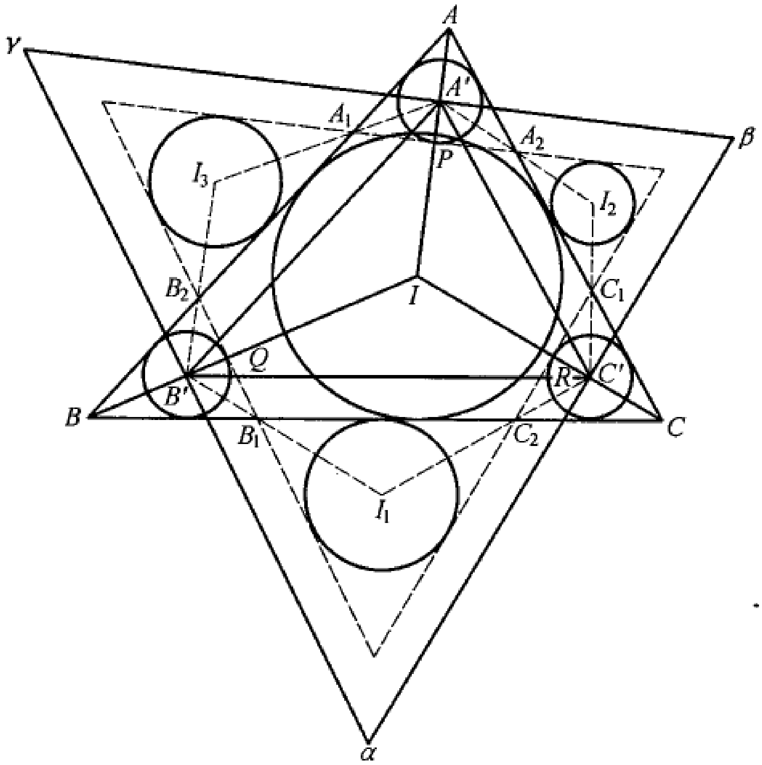


图 42

证明　设过 A'，B'，C' 各作 IA，IB，IC 之垂线而组成 $\triangle\alpha\beta\gamma$，因 I 为 $\triangle A'B'C'$ 之等心，故 I 必为 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之垂心，此时，I_1，I_2，I_3 显然各为 $\triangle\alpha B'C'$，$\triangle\beta C'A'$，$\triangle\gamma A'B'$ 之等心，且其在 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 中之位置，适合于(7) 定理中所云八种情形之一，故 $\triangle A'B'C'$，$\triangle\alpha B'C'$，$\triangle\beta C'A'$，$\triangle\gamma A'B'$ 之切 $\odot I(r')$，$\odot I_1(r'_1)$，$\odot I_2(r'_2)$，$\odot I_3(r'_3)$ 有一公切圆 k'.

次因三圆 $\odot A'$，$\odot B'$，$\odot C'$ 之半径相等，命其值为 p，则见

$$r = r' \pm p, r_1 = r'_1 \pm p, r_2 = r'_2 \pm p, r_3 = r'_3 \pm p$$

故知四圆 $\odot I(r)$，$\odot I_1(r_1)$，$\odot I_2(r_2)$，$\odot I_3(r_3)$ 亦有一公切圆 k.

命圆 k 与 $\odot I(r)$ 之切点为 T，圆 k' 与 $\odot I(r')$ 之切点为 T'，因圆 k 与圆 k' 同心，故 ITT' 必为直线，当 $\triangle A'B'C'$ 移动时，T' 之轨迹为过 I 之一定直线，而 $\odot I(r)$ 为定圆，可知 T 必为定点.

注意　三圆 $\odot A'$，$\odot B'$，$\odot C'$ 与 IA，IB，IC 各有两交点，各取一点则共有八种之组合，每种组合可得一如上之定理，其情形适与(7) 定理中所云之八种

情形相吻合.

(9)① 在(6)① 中定理之图中,设 P 重合于 $\triangle ABC$ 之外心 O,则此时 A',B',C' 乃为 $\triangle ABC$ 三边之中点,且 $\triangle AC'B'$,$\triangle C'BA'$,$\triangle B'A'C$,$\triangle A'B'C'$ 均为全等形(congruent figures).因 O 之垂趾圆(即九点圆)同时切于四切圆(§3(3)),故 O 必能同时具备四种朋力点之条件;直言之,即 O 同时适于(甲)(Ⅰ),(乙)(Ⅰ),(丙)(Ⅰ),(丁)(Ⅰ)四种情形,由是吾人推得次之定理:

定理 设以三角形三边中点两两联结之,如是将三角形划分为四全等三角形;在此四三角形中,各取一相当之切圆为一组,凡四组,则每组之四圆各有一公切圆,此四公切圆且切中点三角形之九点圆于费氏切点.

证明 此定理之前半部,可由(6)① 中定理推得已如上所述,故今仅证其后半部于次:

如图 43,命 $\triangle AC'B'$,$\triangle C'BA'$,$\triangle B'A'C$,$\triangle A'B'C$ 各一相当等心为 P,Q,R,S,则 AP,BQ,CR 同交于一点 I,此点 I 亦即 $\triangle ABC$ 之一等心而与 $\triangle A'B'C'$ 之 S 相当者,此时 P,Q,R 显然各为 IA,IB,IC 之中点,故知 $\triangle PQR$ 与 $\triangle A'B'C'$ 为对称位似形[①].作 $\triangle PQR$ 之外重 $\triangle P'Q'R'$,则由对称之关系,易知 $P'A'$,$Q'B'$,$R'C'$ 同交于点 S.

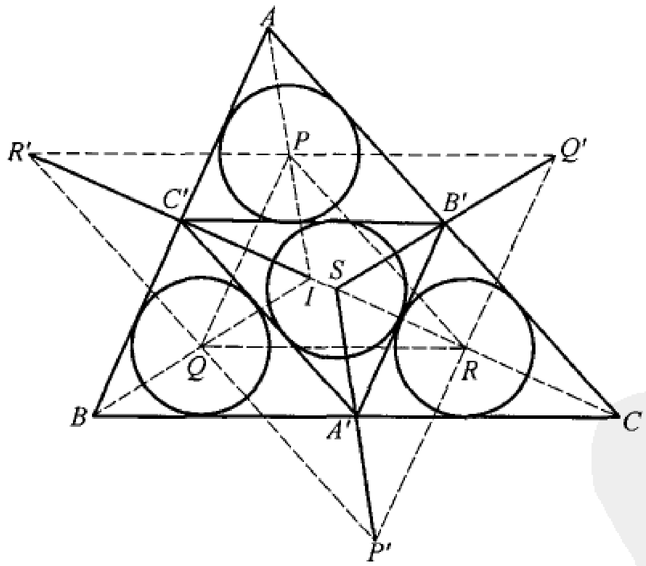


图 43

观察四切圆 $\odot P(r)$,$\odot Q(r)$,$\odot R(r)$,$\odot S(r)$ 两两之公切线,知其公切圆 k 与前三者有同切向,而与后者之切向适相异;亦即:圆 k 同与三圆 $\odot P(r)$,

① 位似形之位似比(ratio of similitude)等于 -1 者,特称为对称位似形.

$\odot Q(r)$，$\odot R(r)$ 外切或内切，而与 $\odot S(r)$ 内切或外切，故若将前三者之半径减小至零，而后者之半径增大 1 倍，此时变为三零圆 P,Q,R 及 $\odot S(2r)$，则此四圆仍有一公切圆 k'，亦即 $\odot PQR$（即圆 k）与 $\odot S(2r)$ 相切．但圆 k' 及 $\odot S(2r)$ 乃为 $\triangle P'Q'R'$ 之九点圆及切圆．故其切点 F' 即为 $\triangle P'Q'R'$ 之费氏切点．观此，圆 k 与 $\odot S(r)$ 之切点 F 乃系 $\triangle A'B'C'$ 之费氏切点甚明，是即圆 k 切 $\triangle A'B'C'$ 之九点圆于费氏切点也．

② **定理**　设以三角形之等心为相似中心，将外接圆伸缩至半径缩小一半，而将相应之斯俾克圆之半径就原位置增大 1 倍，则如是之两变易圆必互相切．

此定理实为上定理证明中之副产物．

(10)① 吾人由(9)① 中定理之启示，可得其扩张之定理如次：

定理　设 G 为 $\triangle ABC$ 之重心(centroid)，于 GA,GB,GC 上各取一点 A'，B'，C'，俾 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 为位似形，命其非相当边(图 44)交于 A_1,A_2,B_1，B_2,C_1,C_2 等六点，在 $\triangle AA_1A_2$，$\triangle B_2BB_1$，$\triangle C_1C_2C$，$\triangle A'B'C'$ 中，各取一相当之切圆为一组，凡四组，则每组之四圆各有一公切圆，此四公切圆且切 $\triangle A'B'C'$ 之九点圆于费氏切点．

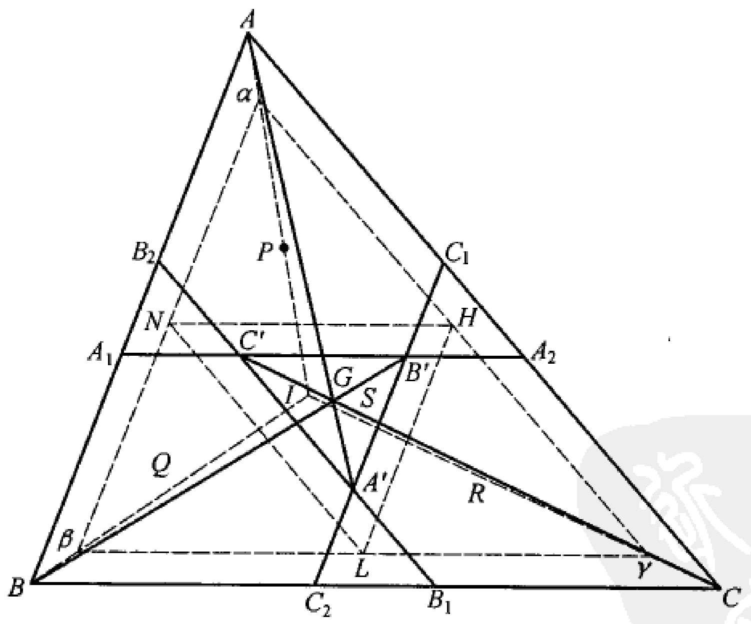


图 44

证明　因 G 为 $\triangle ABC$ 之重心，故易知 BC 与 B_1C_2，CA 与 C_1A_2，AB 与 A_1B_2 各共一中点，于是有

$$\overline{BB_1}=\overline{C_2C},\overline{CC_1}=\overline{A_2A},\overline{AA_1}=\overline{B_2B}$$

由是 $\triangle AA_1A_2$,$\triangle B_2BB_1$,$\triangle C_1C_2C$ 两两为平移位似形①. 取彼等各一相当等心 $\odot P$,$\odot Q$,$\odot R$, 则其切圆 $\odot P$,$\odot Q$,$\odot R$ 之半径相等, 命其值为 r, 兹取 $\triangle A'B'C'$ 之相当等心 S, 命其切圆 $\odot S$ 之半径为 r', 而欲证四圆 $\odot P(r)$, $\odot Q(r)$,$\odot R(r)$,$\odot S(r')$ 有一公切圆 k.

今 $B'C'$ 与 A_1A_2,$C'A'$ 与 B_1B_2,$A'B'$ 与 C_1C_2 显然各共一中点,故有

$$\overline{A_2B'}=\overline{C'A_1},\overline{B_2C'}=\overline{A'B_1},\overline{C_2A'}=\overline{B'C_1}$$

由是 $\triangle A'B_1C_2$,$\triangle C_1A_2B'$,$\triangle B_2C'A$ 两两为平移位似形,取彼等各一相当等心 L,M,N,俾相当于 S 之在 $\triangle A'B'C'$ 者,则其切圆 $\odot L$,$\odot M$,$\odot N$ 之半径相等,命其值为 u.

由平移之关系,知 $\triangle LMN$ 与 $\triangle ABC$ 为位似形,再作 $\triangle LMN$ 之外重三角形 $\alpha\beta\gamma$,则从 $\beta\gamma$ 与 BC,……,MN 与 $B'C'$……,等同有等距 u 之性质,可知 P,Q,R, S 亦各为 $\triangle\alpha NM$,$\triangle N\beta L$,$\triangle ML\gamma$,$\triangle LMN$ 之相当等心,而其切圆 $\odot P$,$\odot Q$, $\odot R$,$\odot S$ 之半径相等,命其值为 v,如是乃有

$$r=v\pm u,r'=v\mp u$$

510 已知四圆 $\odot P(v)$,$\odot Q(v)$,$\odot R(v)$,$\odot S(v)$ 有一公切圆 k'((9)①),故四圆 $\odot P(v\pm u)$,$\odot Q(v\pm u)$,$\odot R(v\pm u)$,$\odot S(v\mp u)$, 即四圆 $\odot P(r)$, $\odot Q(r)$,$\odot R(r)$,$\odot S(r)$ 亦有一公切圆 k 也. 因圆 k' 与 $\odot S(v)$ 之切点为 $\triangle LMN$ 之费氏切点((9)①) 是则圆 k 与 $\odot S(r')$ 之切点亦为 $\triangle A'B'C'$ 之费氏切点甚明,易言之,即圆 k 切 $\triangle A'B'C'$ 之九点圆于费氏切点.

② 在图 44 中,设以 $\triangle A'B'C'$ 为基准而观察之,则就原图形,由 ① 可衍得:

定理 设在 $\triangle A'C_2B_1$,$\triangle C_1B'A_2$,$\triangle B_2AC'$,$\triangle ABC$,各取一相当之切圆为一组,凡四组,则每组之四圆各有一公切圆,此四公切圆且切 $\triangle ABC$ 之九点圆于费氏切点.

注意 设 A',B',C' 各密合于 $\triangle ABC$ 三边之中点,则此时即变为费氏定理(§3(3)),故此定理可谓为费氏定理之扩张.

③ 在图 44 中,吾人显见 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 与 $\triangle ABC$ 之相似中心 I 乃为 $\triangle ABC$ 之等心,由是又衍得:

定理 设 I 为 $\triangle ABC$ 之等心,在 IA,IB,IC 上各取一点 α,β,γ,俾 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 与 $\triangle ABC$ 为位似形者;则以 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 三边之中点各为心而依次各切于 $\triangle ABC$ 三边之三圆,与 $\triangle ABC$ 之切圆 $\odot I$ 必有一公切圆 k,且圆 k 与 $\odot I$ 之切点乃为 $\triangle ABC$ 之

① 位似形之位似比等于 +1 者,特称为平移位似形.

费氏切点.

(11) **定理**　设作三等圆每圆之切线,俾各平行于他二圆之连心线者,如是每圆得二切线,各取一线以组成三角形,凡得八三角形;则每三角形之九点圆,凡八圆,各四圆同有一公切圆,其切点乃为各该三角形之费氏切点,而该两公切圆系同心者,一与三等圆均相外切,一均相内切.

证明　如图 45,命三圆 $\odot L,\odot M,\odot N$ 为题设之三等圆,$\triangle ABC$ 为该八三角形之一,兹作 $\triangle LMN$ 之外重 $\triangle\alpha\beta\gamma$,则 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 与 $\triangle ABC$ 为位似形,其相似中心 I 显为 $\triangle ABC$ 之等心,如是依据(10)③ 中定理即可知矣.

(12)① **定理**　设 I 为 $\triangle ABC$ 之一等心,在 IA,IB,IC 上各取一点 A',B',C',俾 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 为位似形,命其非相当边(图 46) 交于 B_1,C_2,C_1,A_2,A_1,B_2,则 $\triangle AB_1C_2$ 与 $\triangle A'B_2C'_1$,$\triangle BC_1A_2$ 与 $\triangle B'C_2A_1$,$\triangle CA_1B_2$ 与 $\triangle C'A_2B_1$ 各为位似形,其相似中心 I_1,I_2,I_3 各为彼等之一等心.

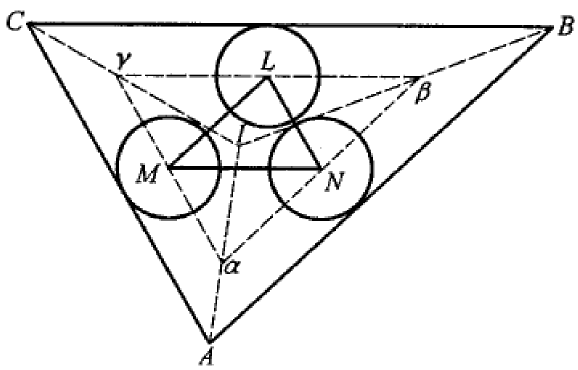


图 45

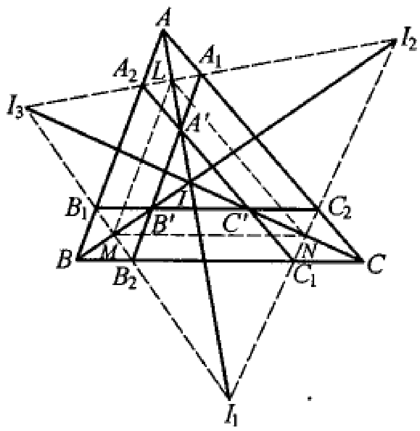


图 46

证明　由每对三角形之边彼此平行,及 $A_1A_2\perp IA,B_1B_2\perp IB,C_1C_2\perp IC$ 甚易证之.

② **定理**　上述之四对三角形,其每对前者之切圆 $\odot I(r'),\odot I_1(r'_1),\odot I_2(r'_2),\odot I_3(r'_3)$ 及后者之切圆 $\odot I(r),\odot I_1(r_1),\odot I_2(r_2),\odot I_3(r_3)$ 各有一公切圆 k' 及 k,此两圆 k',k 为同心者,且其切点分别为诸三角形之一费氏切点.

证明　命 AA' 与 A_1A_2,BB' 与 B_1B_2,CC' 与 C_1C_2 之交点为 L,M,N,则此三点乃为 AA',BB',CC' 之中点,故 $\triangle LMN$ 与 $\triangle ABC$ 为位似形,由是并知 I,I_1,I_2,I_3 为 $\triangle LMN$ 之四等心,命 $\triangle LMN$ 四切圆之半径为 $\rho,\rho_1,\rho_2,\rho_3$,又 $\triangle A'B'C'$

与 $\triangle ABC$ 之相当边有等距，命其值为 $2d$，则见

$$r' = \rho \mp d, r'_1 = \rho_1 \pm d, r'_2 = \rho_2 \mp d, r'_3 = \rho_3 \pm d,$$

及
$$r = \rho \pm d, r_1 = \rho_1 \mp d, r_2 = \rho_2 \mp d, r_3 = \rho_3 \mp d$$

已知四圆 $\odot I(\rho)$，$\odot I_1(\rho_1)$，$\odot I_2(\rho_2)$，$\odot I_3(\rho_3)$ 有一公切圆（§3(3)），故四圆 $\odot I(r')$，$\odot I_1(r'_1)$，$\odot I_2(r'_2)$，$\odot I_3(r'_3)$ 及四圆 $\odot I(r)$，$\odot I_1(r_1)$，$\odot I_2(r_2)$，$\odot I_3(r_3)$ 亦必各有一公切圆 k' 及 k，此两圆 k'，k 之心即同为 $\triangle LMN$ 之九点圆心也，由是并知其切点分别为诸三角形之一费氏切点焉.

注意　设 A'，B'，C' 各密合于 $\triangle ABC$ 之三顶点，则此时即变为费氏定理（§3(3)），故此定理可谓为费氏定理之又一种扩张.

③ 上之定理，又可以次之方式述之：

定理　上述之四对三角形，其每对前者及后者之九点圆各有一公切圆 k' 及 k，此两圆 k'，k 为同心者，且其切点分别为诸三角形之一费氏切点.

(13) 次之两定理与(12)② 中定理实为同物，仅各所取之观点有异耳.

① **定理**　设 I_0，I_1，I_2，I_3 为 $\triangle ABC$ 之内心，对 A，对 B，对 C 之旁心，则：一、依同比值分 $\overline{I_0I_1}$，$\overline{I_0I_2}$，$\overline{I_0I_3}$ 于 J_1，J_2，J_3，以此三点为心而各切于 BC，CA，AB 之三圆，与切圆 $\odot I_0$ 有一公切圆；二、依同比值分 $\overline{I_1I_0}$，$\overline{I_1I_2}$，$\overline{I_1I_3}$ 于 J_0，J_2，J_3，以此三点为心而各切于 BC，AB，CA 之三圆，与切圆 $\odot I_1$ 有一公切圆；三、依同比值分 $\overline{I_2I_0}$，$\overline{I_2I_3}$，$\overline{I_2I_1}$ 于 J_0，J_3，J_1 以此三点为心而各切于 CA，BC，AB 之三圆，与切圆 $\odot I_2$ 有一公切圆；四、依同比值分 $\overline{I_3I_0}$，$\overline{I_3I_1}$，$\overline{I_3I_2}$ 于 J_0，J_1，J_2，以此三点为心而各切于 AB，CA，BC 之三圆，与切圆 $\odot I_3$ 有一公切圆，此等公切圆与各该切圆之切点，恒为 $\triangle ABC$ 之费氏切点；又彼等与各该点 J 所成三角形之垂三角形之九点圆同心.

注意　当该比值趋于无穷大时，则诸点 J 即分别与诸点 I 相密合，此时乃成为费氏定理（§3(3)）矣.

② **定理**　设 H 为 $\triangle ABC$ 之垂心，在 HA，HB，HC 上各取一点 A'，B'，C'，俾 $\triangle A'B'C'$ 三边各为 $\triangle ABC$ 三边之逆平行线，则以 A，P，C 为心而各切于 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$ 之三圆，与 $\triangle A'B'C'$ 之切圆 $\odot H$ 有一公切圆 k，与圆 k 恒与 $\triangle ABC$ 之垂三角形之九点圆同心，且与 $\odot H$ 之切点乃为 $\triangle A'B'C'$ 之一费氏切点.

(14)① **定理**　设 $\triangle A'B'C'$ 为 $\triangle ABC$ 之垂三角形，命 $\triangle AB'C'$，$\triangle A'BC'$，$\triangle A'B'C$ 之垂心为 P，Q，R，则四圆 $\odot A(AP)$，$\odot B(BQ)$，$\odot C(CR)$，$\odot PQR$ 有一公切圆 k，此圆 k 与 $\triangle A'B'C'$ 之九点圆同心.

证明　如图 47，命 $\triangle ABC$ 之垂心为 H，AH，BH，CH 再交外接圆于 X，Y，Z，

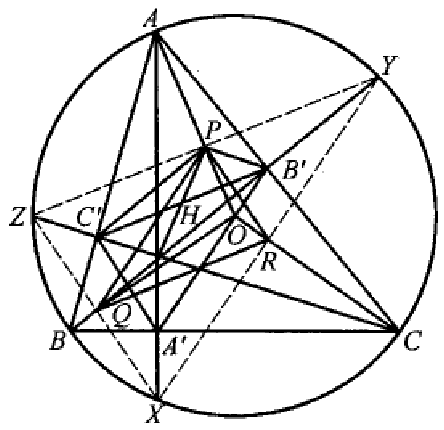


图 47

则吾人甚易证知 A'，B'，C' 各为 HX，HY，HZ 之中点，因 $HB'PC'$ 为一平行四边形，故 HP 与 $B'C'$ 彼此相平分由是可知 P 即为 YZ 之中点，同理，亦知 Q，R 各为 ZX，XY 之中点，今因

$$AP \perp YZ, BQ \perp ZX, CR \perp XY$$

故三圆 $\odot A(AP)$，$\odot B(BQ)$，$\odot C(CR)$ 与 $\triangle XYZ$ 之切圆 $\odot H(r)$ 有一公切圆 k，此圆 k 与 $\triangle A'B'C'$ 之九点圆同心，且与 $\odot H(r)$ 之切点乃为 $\triangle XYZ$ 之一费氏切点 F((13)②)；但 $\odot PQR$ 为 $\triangle XYZ$ 之九点圆，与 $\odot H(r)$ 相切于点 F(§3(3))，是则圆 k 亦与 $\odot PQR$ 相切于点 F 也.

② **定理**　$\triangle PQR$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有一共同之斯俾克圆.

证明　命 $\triangle ABC$ 之泰勒圆心(the center of Taylor circle)①为 T，外心为 O，$\triangle A'B'C'$ 之垂心为 H'，则吾人已知 T 为 OH' 之中点②.今 O 为 $\triangle PQR$ 之垂心，而 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PQR$ 显为对称位似形，故知 T 即为彼等之相似中心.但 T 为 $\triangle A'B'C'$ 之一斯俾克圆心，由是亦为 $\triangle PQR$ 之一斯俾克圆心于是 $\triangle PQR$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有一共同之斯俾克圆 $\odot T$ 明矣.

系　三角形任一等心至三顶点距离之中点所成三角形，与原三角形之中点三角形，有一共同之斯俾克圆.

③ **定理**　过 P，Q，R 各作 $\triangle ABC$ 三边之平行线所成 $\triangle \alpha\beta\gamma$，与 $\triangle ABC$ 有同一泰勒圆.

证明　因 $\triangle \alpha\beta\gamma$ 与 $\triangle ABC$ 为对称位似形，而 T 乃为其相似中心故也.

(15) 在(6)① 定理之图中，设 P 重合于 $\triangle ABC$ 之等心 I，则此时 I 之垂趾圆即为 $\triangle ABC$ 之切圆.故 I 必能同时具备四种朋力点之条件.直言之：一、设 I 为 $\triangle ABC$ 之内心，则 I 同时适于(甲)之四种情形；二、设 I 为对 A 之旁心，则 I 同时适于(乙)之四种情形；三、设 I 为对 B 之旁心则 I 同时适于(丙)之四种情形；四、设 I 为对 C 之旁心，则 I 同时适于(丁)之四种情形.倘集纳各种情形而比较之，并注意 I 之垂趾三角形之位置，则吾人知诸圆 u_1，u_2，u_3 及 u'_1，u'_2，u'_3 之心皆

① 三角形之每高线趾至他二边之垂趾，如是凡六点共圆，其心乃为垂三角形之一斯俾克圆心，如是之圆称为泰勒圆，此系属于布罗卡尔图象者.

② 此性质亦系属于布罗卡尔图象者.

在 I 之垂趾圆 $\odot A'B'C'$ 上，且为诸弧之中点，如是，无论 I 为 $\triangle ABC$ 之何种等心，恒能推得次之二定理，但此二定理系以 I 之垂趾三角形为基准而言者.

① **定理** 在 $\triangle ABC$ 外接圆之三弧 $\overparen{BC}$, $\overparen{CA}$, $\overparen{AB}$（劣弧或优弧）上各取其中点 L,M,N，且设 AL,BM,CN 同交于等心 I，则以 L,M,N 为心而各切于 BC,CA,AB 之三圆，与切 $\odot I$ 必有一公切圆 k，此圆 k 与 $\odot I$ 之切点，乃为 $\triangle ABC$ 之费氏切点，又圆 k 与 $\triangle LMN$ 之垂三角形之九点圆同心.

注意 此定理实为(13)① 中定理之一特例，又与(14)① 定理为同物仅各所依持之基准有异耳.

系 1 设 $\triangle ABC$ 之垂心为 H，则四圆 $\odot A(2R\cos^2 A)$，$\odot B(2R\cos^2 B)$，$\odot C(2R\cos^2 C)$，$\odot H(4R\cos A\cos B\cos C)$ 有一公切圆 k，此圆 k 与 $\triangle ABC$ 之垂三角形之九点圆同心，但 R 乃为 $\triangle ABC$ 之外半径.

证明 如图48，设 AH,BH,CH 再交外接圆于 A',B',C'，则易知 H 为 $\triangle A'B'C'$ 之等心，而 A,B,C 各为 $\overparen{B'C'}$，$\overparen{C'A'}$，$\overparen{A'B'}$ 之中点，命 A,B,C 各至 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$ 之垂趾为 L,M,N，H 至 $C'A'$ 之垂趾为 K，则题设之四圆实即为四圆 $\odot A(AL)$，$\odot B(BM)$，$\odot C(CN)$，$\odot H(HK)$，至是已化为(15)① 定理矣，今之要务，只需证明次之诸式成立可也

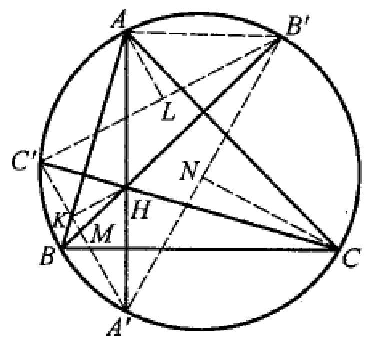


图 48

$$\overline{AL}=\pm 2R\cos^2 A,\ \overline{BM}=\pm 2R\cos^2 B,$$
$$\overline{CN}=\pm 2R\cos^2 C,\ \overline{HK}=\pm 4R\cos A\cos B\cos C$$

由 $$\angle AB'H=\angle AB'B=\angle ACB=\angle BHA=\angle B'HA$$

知 $$\overline{AB'}=\overline{HA}$$

因 $$\angle LAB'=\mathrm{Rt}\angle+\angle C'B'A=\mathrm{Rt}\angle+\angle C'CA=\angle BAC$$

故 $$\overline{AL}=\pm\overline{AB'}\cdot\cos A=\pm\overline{HA}\cdot\cos A=\pm 2R\cos^2 A$$

同理，得 $$\overline{BM}=\pm 2R\cos^2 B,\ \overline{CN}=\pm 2R\cos^2 C$$

次因 $$\angle KHA'=\mathrm{Rt}\angle+\angle CA'A=\mathrm{Rt}\angle+\angle C'CA=\angle BAC$$

故 $$\overline{HK}=\pm\overline{HA'}\cdot\cos A=\pm 2\,\overline{HC}\cos A\cos B=\pm 4R\cos A\cos B\cos C$$

系 2 设 $\triangle ABC$ 三边之中点为 L,M,N，外心为 O，则四圆 $\odot L(R\cos^2 A)$，$\odot M(R\cos^2 B)$，$\odot N(R\cos^2 C)$，$\odot O(2R\cos A\cos B\cos C)$ 有一公切圆 k，此圆 k 与 $\triangle LMN$ 之垂三角形之九点圆同心，R 乃为 $\triangle ABC$ 之外切圆半径.

② **定理**　在$\triangle ABC$外接圆之三弧$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$，$\overset{\frown}{AB}$（劣弧或优弧）上各取其中点L,M,N，且设AL,BM,CN两两之交点为三等心I_1,I_2,I_3，命第四等心为I，则以L,M,N为心而各切于BC,CA,AB之三圆，与切圆$\odot I$必有一公切圆k.

系1　设$\triangle ABC$三边之中点为L,M,N，垂心为H，则四圆$\odot L(R\sin^2 A)$，$\odot M(R\sin^2 B)$，$\odot N(R\sin^2 C)$，$\odot H(2R\cos A\cos B\cos C)$有一公切圆$k$，$R$乃为$\triangle ABC$之外切圆半径.

证明　如图49，设AH,BH,CH各交对边于A',B',C'，则A',B',C'及L,M,N同在九点圆上（§2(3)），此时A,B,C,H均为$\triangle ABC$之等心，而L,M,N各为$\overset{\frown}{B'C'}$，$\overset{\frown}{C'A'}$，$\overset{\frown}{A'B'}$之中点，命L,M,N各至$B'C',C'A',A'B'$之垂趾为L',M',N'，H至$C'A'$之垂趾为K，则题设之四圆实即为四圆$\odot L(LL')$，$\odot M(MM')$，$\odot N(NN')$，$\odot H(HK)$，至是已化为(15)②定理矣，今之要务，仅在证明次之诸式成立

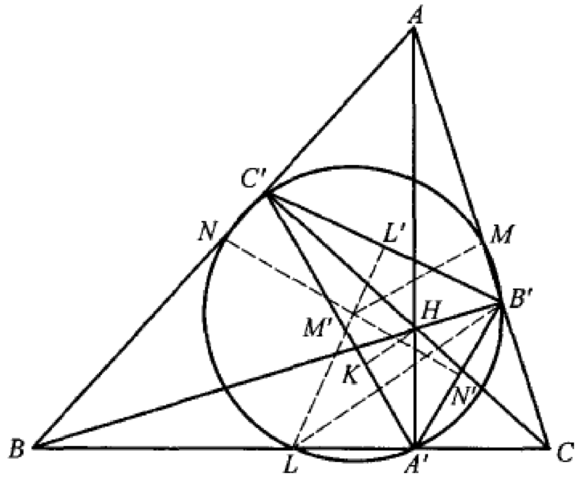


图49

$$\overline{LL'}=\pm R\sin^2 A$$
$$\overline{MM'}=\pm R\sin^2 B$$
$$\overline{NN'}=\pm R\sin^2 C$$
$$\overline{HK}=\pm 2R\cos A\cos B\cos C$$

由　$\angle BB'C=\mathrm{Rt}\angle$

知　$\overline{LB'}=\overline{BL}$

因　$\measuredangle L'B'L=\mathrm{Rt}\measuredangle+\measuredangle L'LB'=\mathrm{Rt}\measuredangle+\measuredangle C'CB'=\measuredangle BAC$

故　$\overline{LL'}=\pm\overline{LB'}\cdot\sin A=\pm\overline{BL}\cdot\sin A=\pm R\sin^2 A$

同理，得　$\overline{MM'}=\pm R\sin^2 B,\ \overline{NN'}=\pm R\sin^2 C$

次因　$\measuredangle KHA'=\mathrm{Rt}\measuredangle+\measuredangle C'A'A=\mathrm{Rt}\measuredangle+\measuredangle C'CA=\measuredangle BAC$

故　$\overline{HK}=\pm\overline{HA'}\cdot\cos A=\pm\overline{HC}\cdot\cos A\cos B=\pm 2R\cos A\cos B\cos C$

系2　设$\triangle ABC$之对垂心①为H'，则四圆$\odot A(2R\sin^2 A)$，$\odot B(2R\sin^2 B)$，$\odot C(2R\sin^2 C)$，$\odot H'(4R\cos A\cos B\cos C)$有一公切圆$k$，$R$乃为$\triangle ABC$之外切

① 三角形之垂心关于外心之对称点，特称为对垂心.

圆半径.

系 3 设 $\triangle XYZ$ 为 $\triangle ABC$ 之切三角形,命以 $\triangle XYZ$ 三边之中点为心而各切于 $\triangle ABC$ 每两边之三圆为 l,m,n,又命 $\triangle XYZ$ 之垂心为 H,垂三角形为 $\triangle PQR$,$\triangle PQR$ 之切圆 $\odot H$ 为 h,则四圆 h,l,m,n 有一公切圆 k.

证明 如图 50,作 $ZZ' \perp CA$,Z' 为垂趾,则见

$$\angle YZZ' = \angle ZYA + \mathrm{Rt}\angle = \angle ZXY + \mathrm{Rt}\angle = \angle QYX = \angle QYR$$

$\odot YZ'$,$\odot QR$ 同为 $\odot YZ$ 内之弦,故

$$\overline{YZ'} = \overline{QR}$$

由是已知圆 l 必切于 QR,同理,亦知圆 m 及圆 n 各切于 RP 及 PQ.至是,显然已与系 1,相类似.

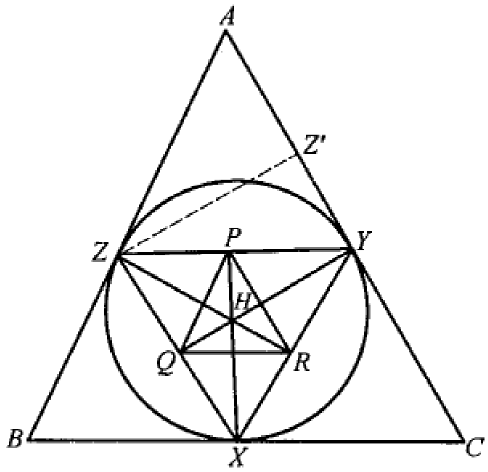


图 50

(16)① 吾人由(10)③及(15)②定理之启示,可推演得其普遍之定理如次:

定理 设 I 为 $\triangle ABC$ 之一等心,在 IA,IB,IC 上各任取一点 X,Y,Z,命 YZ,ZX,XY 之中点为 L,M,N;则以 L,M,N 为心而各切于 BC,CA,AB 之三圆,与 $\triangle ABC$ 之切圆 $\odot I$ 恒有一公切圆 k.

证明 如图 51,兹以 X,Y,Z 为心各作圆,俾分别切于 $\triangle ABC$ 之每两边,命其切点为 X_2 与 X_3,Y_3 与 Y_1,Z_1 与 Z_2.次命 $\odot I$ 与 $\triangle ABC$ 三边之切点为 α,β,γ,三圆 L,M,N 各与 BC,CA,AB 之切点为 P,Q,R;而命 $\odot I$ 与 $\odot L,\odot M,\odot N$ 之公切线(附于 $\triangle ABC$ 之边上者)为 t_1,t_2,t_3,则因 P,Q,R 各为 Y_1Z_1,Z_2X_2,X_3Y_3 之中点,故有

$$t_1 = \overline{\alpha P} = \frac{1}{2}(\overline{\alpha Y_1} + \overline{\alpha Z_1})$$

$$t_2 = \overline{\beta Q} = \frac{1}{2}(\overline{\beta Z_2} + \overline{\beta X_2})$$

$$t_3 = \overline{\gamma R} = \frac{1}{2}(\overline{\gamma X_3} + \overline{\gamma Y_3})$$

再在 $\odot X$ 上取一点 X_1,俾 $\triangle XX_3X_1$ 与 $\triangle YY_3Y_1$ 为位似形者,则见

$$\angle X_2XX_1 = \angle X_2XX_1 + \angle X_3XX_1 = \angle X_2XX_3 + \angle Y_3YY_1 =$$
$$\angle X_2X_1, YY_1 = \angle Z_2ZZ_1$$

及 $\quad 2\angle XX_1X_2 = 2(\angle XX_1X_3 + \angle X_3X_1X_2) = 2\angle YY_1Y_3 + \angle X_3XX_2 =$

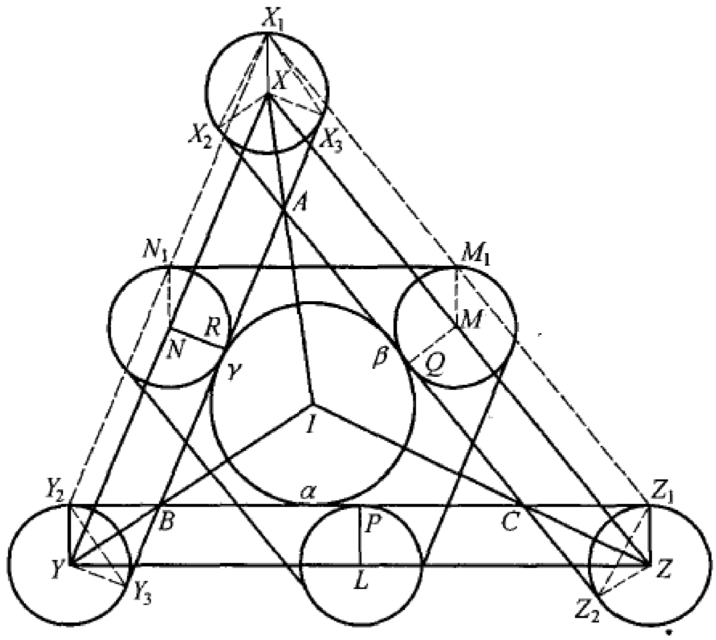


图 51

$$2\measuredangle YBY_3+\measuredangle X_3AX==\measuredangle CBA+\measuredangle BAC=\measuredangle BCA=$$
$$\measuredangle Z_1CZ_2=2\measuredangle ZCZ_2=2\measuredangle ZZ_1Z_2$$

或 $\measuredangle XX_1X_2=\measuredangle ZZ_1Z_2$

故 $\triangle XX_1X_2$ 与 $\triangle ZZ_1Z_2$ 亦为位似形，命 X_1Z_1，X_1Y_1 之中点为 M_1，N_1，乃有

$$\overline{MM_1}=\frac{1}{2}(\overline{XX_1}+\overline{ZZ_1})=\frac{1}{2}(\overline{XX_2}+\overline{ZZ_2})=\overline{MQ}$$

$$\overline{NN_1}=\frac{1}{2}(\overline{XX_1}+\overline{YY_1})=\frac{1}{2}(\overline{XX_3}+\overline{YY_3})=\overline{NR}$$

故 M_1，N_1 各在 $\odot M$，$\odot N$ 之上，又

$$M_1N_1\ /\!/\ Z_1Y_1,MM_1\ /\!/\ ZZ_1,NN_1\ /\!/\ YY_1$$

故 $\measuredangle MM_1N_1=\measuredangle ZZ_1Y_1=\text{Rt}\measuredangle,\measuredangle NN_1M_1=\measuredangle YY_1Z_1=\text{Rt}\measuredangle$

可知 M_1N_1 即为 $\odot M$ 与 $\odot N$ 之公切线，今命三圆 $\odot L$，$\odot M$，$\odot N$ 两两之公切线如 $\overline{M_1N_1}$ 者为 t'_1，t'_2，t'_3，则有

$$t'_1=\frac{1}{2}\overline{Z_1Y_1}=\frac{1}{2}(\overline{\alpha Y_1}-\overline{\alpha Z_1})$$

$$t'_2=\frac{1}{2}\overline{X_2Z_2}=\frac{1}{2}(\overline{\beta Z_2}-\overline{\beta X_2})$$

$$t'_3=\frac{1}{2}\overline{Y_3X_3}=\frac{1}{2}(\overline{\gamma X_3}-\overline{\gamma Y_3})$$

由是

$$t_1t'_1+t_2t'_2+t_3t'_3=\frac{1}{4}(\overline{\alpha Y_1}^2-\overline{\alpha Z_1}^2+\overline{\beta Z_2}^2-\overline{\beta X_2}^2+\overline{\gamma X_3}^2-\overline{\gamma Y_3}^2)=0$$

但吾人观察无论 X,Y,Z 之位置如何,诸公切线 t 恒能适合于开式公式三种情形之一,是则四圆 $\odot I,\odot L,\odot M,\odot N$ 恒有一公切圆 k 也((2)).

注意 a.当 X 与 A,Y 与 B,Z 与 C 各相密合时,则三圆 $\odot L,\odot M,\odot N$ 均趋为零圆而为 $\triangle ABC$ 三边之中点,此时乃变为费氏定理(§3(3))矣,故此定理实为费氏定理之扩张.

b.设 X,Y,Z 趋为 $\triangle ABC$ 之他三等心,则此时即成为(15)② 定理.

定理 设 $\overline{IX},\overline{IY},\overline{IZ}$ 有一定之连比,则圆 k 与 $\odot I$ 之切点为一定.

证明 如图 52,兹在 IA,IB,IC 上各另取一点 X',Y',Z',俾

$$\overline{IX'}:\overline{IY'}:\overline{IZ'}=\overline{IX}:\overline{IY}:\overline{IZ}$$

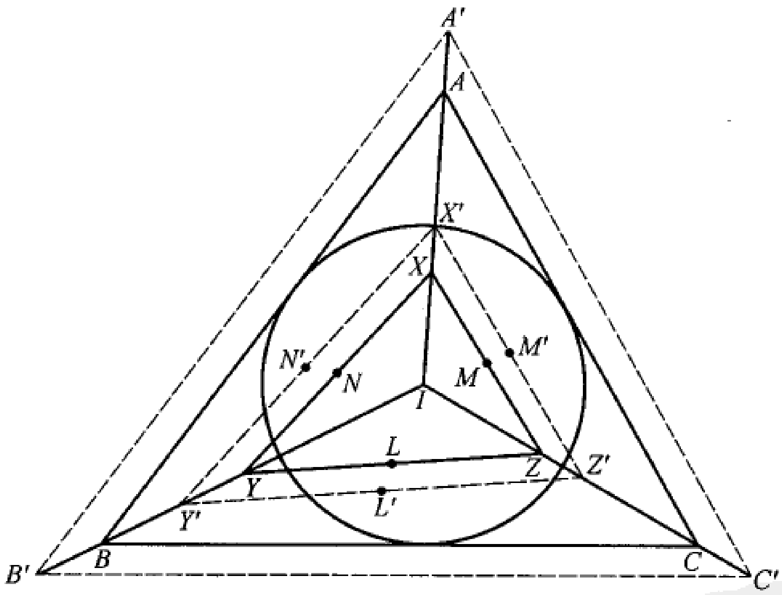


图 52

再于 IA,IB,IC 上各取一点 A',B',C',俾图形 $A'B'C'X'Y'Z'$ 与图形 $ABCXYZ$ 为位似形,命 $Y'Z',Z'X',X'Y'$ 之中点为 L',M',N',此三点各至 BC,CA,AB 及 $B'C',C'A',A'B'$ 之垂距为 l_1,m_1,n_1 及 l',m',n',I 至 BC 及 $B'C'$ 之垂距为 r 及 r';则依(16)① 定理,知四圆 $\odot I(r),\odot L'(l_1),\odot M'(m_1),\odot N'(n_1)$ 及四圆 $\odot I(r'),\odot L'(l'),\odot M'(m'),\odot N'(n')$ 各有一公切圆 k_1 及 k'.设命圆 k 与 $\odot I(r)$,圆 k' 与 $\odot I(r')$ 之切点为 T,T',则由位似之关系,可知 ITT' 为直线.

$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 之相当边显然有等距,命其值为 d,则见

$$r = r' \pm d, l_1 = l' \pm d, m_1 = m' \pm d, n_1 = n' \pm d$$

由是即知圆 k_1 与圆 k' 为同心,故圆 k_1 必通过 T,是则 T 为一定点也明甚.

(17)① **定理**　三角形之四切圆,设取其每三圆两两之第四公切线①以组成三角形,凡四形,则原三角形之四等心三角形②之外心,必分别为该所成四三角形之一等心,而以此等点为圆心之各该三角形之切圆,其半径为

$$\begin{cases} \rho = 2R + r = \frac{1}{2} \mid r + r_1 + r_2 + r_3 \mid \\ \rho_1 = \mid 2R - r_1 \mid = \frac{1}{2} \mid -r - r_1 + r_2 + r_3 \mid \\ \rho_2 = \mid 2R - r_2 \mid = \frac{1}{2} \mid -r + r_1 - r_2 + r_3 \mid \\ \rho_3 = \mid 2R - r_3 \mid = \frac{1}{2} \mid -r + r_1 + r_2 - r_3 \mid \end{cases}$$

式中之 R 及 r, r_1, r_2, r_3 依次为原三角形之外半径及四切圆之半径.

证明　如图53,设 I, I_1, I_2, I_3 依次为 $\triangle ABC$ 之内心及三旁心,兹以三旁切圆论之,命其两两之第四公切线组成 $\triangle XYZ$,则 XI_1, YI_2, ZI_3,显然同交于一点 P,此点亦即 $\triangle XYZ$ 之一等心.此时有

$$2 \measuredangle PI_1I_2 = 2 \measuredangle I_1X, XY + 2 \measuredangle Y_1I_1I_2 = \measuredangle ZX, XY + \measuredangle XY, AB = \measuredangle ZX, AB$$

$$2 \measuredangle II_1I_3 = 2 \measuredangle IA, CA + 2 \measuredangle CA, I_1I_3 = \measuredangle AB, CA + \measuredangle CA, ZX = \measuredangle AB, ZX$$

故

$$\measuredangle PI_1I_2 = - \measuredangle II_1I_3$$

同理,得

$$\measuredangle PI_2I_3 = - \measuredangle II_2I_1, \measuredangle PI_3I_1 = - \measuredangle II_3I_2$$

因之,P 与 I 为 $\triangle I_1I_2I_3$ 之等角共轭点 §2(1),但 I 为 $\triangle I_1I_2I_3$ 之垂心,由是知 P 为 $\triangle I_1I_2I_3$ 之外心,其余可同样证之.

命 P 至 YZ 之垂趾为 P',I_2 至 PP' 之垂趾为 Q,又命 $\triangle ABC$ 之外心为 O,CA 之中点为 M,则见

$$\measuredangle PI_2Q = \measuredangle PI_2I_3 + \measuredangle I_3I_2Q = \measuredangle I_1I_2I + \measuredangle I_2I_3, YZ =$$
$$\measuredangle I_1I_2B + \measuredangle BC, I_2I_3 = \measuredangle I_1AB + \measuredangle CBA + \measuredangle BAI_3 =$$
$$\measuredangle I_1AI_3 + \measuredangle MOA = \text{Rt} \measuredangle + \measuredangle MOA =$$

① 此乃指除三角形三边外之公切线.

② 三角形之四等心,每三点所成之三角形,称为等心三角形,其数凡四.

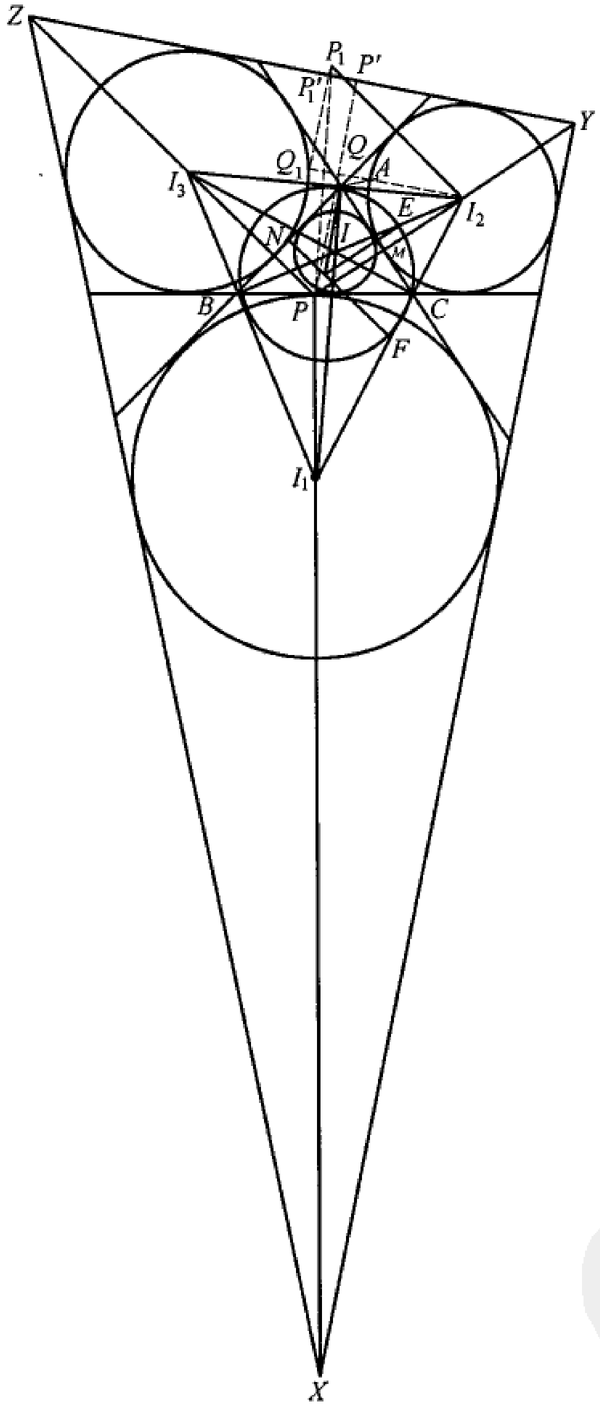


图 53

$$\measuredangle MAO = -\measuredangle OAM$$

由是 $\triangle PI_2Q \backsim \triangle OAM$

故得（§2(3) 系）

PDG

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{OM}}=\frac{\overline{PI_2}}{\overline{OA}}=2$$

或
$$\rho-r_2=2\,\overline{OM}$$

设 E 为 II_2 之中点，则亦必为 $\widehat{CA}$ 之中点，如是乃有

$$\overline{OM}=\overline{OE}-\overline{ME}=R-\frac{1}{2}(r_2-r)$$

由是
$$\rho-r_2=2R-(r_2-r)$$

故
$$\rho=2R+r=\frac{1}{2}(r+r_1+r_2+r_3)$$[①]

次，命 $\triangle II_2I_3$ 之外心为 P_1，P_1 至 YZ 之垂趾为 P'_1，I_2 至 $P_1P'_1$ 之垂趾为 Q_1；又命 AB 之中点为 N，则见

$$\measuredangle P_1I_2Q=\measuredangle P_1I_2I_3+\measuredangle I_3I_2Q_1=\measuredangle II_2I_1+\measuredangle I_2I_3,YZ=$$
$$\measuredangle II_2C+\measuredangle BC,I_2I_3=\measuredangle IAC+\measuredangle BCA+\measuredangle CAI_2=$$
$$\measuredangle IAI_2+\measuredangle NOA=\text{Rt}\measuredangle+\measuredangle NOA=\measuredangle NAO=-\measuredangle OAN$$

由是
$$\triangle P_1I_2Q_1\backsim\triangle OAN$$

故得（§2(3) 系）

$$\frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{ON}}=\frac{\overline{P_1I_2}}{\overline{OA}}=-2$$[②]

或
$$\rho_1-r_2=-2\,\overline{ON}$$[③]

设 F 为 I_1I_2 之中点，则亦必为 $\widehat{ACB}$ 之中点，如是乃有

$$\overline{ON}=\overline{FN}-\overline{FO}=\frac{1}{2}(r_1+r_2)-R$$

由是
$$\rho_1-r_2=2R-(r_1+r_2)$$

故
$$\rho_1=2R-r_1=\frac{1}{2}(-r-r_1+r_2+r_3)$$[④]

仿此，或应用换式原理，即可推证其余之二式.

---

① 此系应用次之公式：$4R+r=r_1+r_2+r_3$，此公式在普通之几何学书籍大都载有.

② 视 $\overline{ON}$ 之值为正或负，则 $\overline{P_1Q_1}$ 之值为负或正，故此式末端为负值，余类此.

③ P,P_1 在 YZ 之同侧，定 P_1 之值为正，否则为负，余类此.

④ 此系应用次之公式：$4R+r=r_1+r_2+r_3$，此公式在普通之几何学书籍大都载有.

系 $$\begin{cases}\rho+\rho_1+\rho_2+\rho_3=4R\\ \rho-(\rho_1+\rho_2+\rho_3)=2r\\ \rho_1-(\rho+\rho_2+\rho_3)=-2r_1\\ \rho_2-(\rho+\rho_3+\rho_1)=-2r_2\\ \rho_3-(\rho+\rho_1+\rho_2)=-2r_3\end{cases}$$

② **定理** 上述之四圆 $\odot P(\rho),\odot P_1(\rho_1),\odot P_2(\rho_2),\odot P_3(\rho_3)$ 有一公切圆 k,此圆 k 之半径为$\frac{5}{2}R$.

证明 因 P_1,P_2,P_3 为 P 对于 $\triangle I_1I_2I_3$ 三边之反映点,故过 P_1,P_2,P_3 各作 $\triangle I_1I_2I_3$ 三边之平行线,必两两相交于 PX,PY,PZ 上之点 J_1,J_2,J_3,且 P_1,P_2,P_3 各为 J_2J_3,J_3J_1,J_1J_2 之中点.如是,应用(16)① 定理于 $\triangle XYZ$,即知四圆 $\odot P(\rho),\odot P_1(\rho_1),\odot P_2(\rho_2),\odot P_3(\rho_3)$ 有一公切圆 k 矣,至圆 k 之半径为$\frac{5}{2}R$,观次之定理即明.

③ **定理** 四圆 $\odot I(\rho),\odot I_1(\rho_1),\odot I_2(\rho_2),\odot I_3(\rho_3)$ 亦有一公切圆 k',此圆 k' 与 $\triangle ABC$ 之九点圆同心,其半径为$\frac{5}{2}R$.

证明 上定理之四圆与本定理之四圆,显然关于点 O 为对称,已知前者有一公切圆 k,故后者亦有一公切圆 k',此圆 k' 与圆 k 关于点 O 系成对称者.

又四圆 $\odot I(r),\odot I_1(r_1),\odot I_2(r_2),\odot I_3(r_3)$ 与 $\triangle ABC$ 之九点圆 $\odot K(\frac{1}{2}R)$ 相切(§3(3)),于是四圆 $\odot I(r+2R),\odot I_1(r_1-2R),\odot I_2(r_2-2R),\odot I_3(r_3-2R)$ 必与 $\odot K(\frac{5}{2}R)$ 相切;但四圆 $\odot I(r+2R),\odot I_1(r_1-2R),\odot I_2(r_2-2R),\odot I_3(r_3-2R)$ 与四圆 $\odot I(\rho),\odot I_1(\rho_1),\odot I_2(\rho_2),\odot I_3(\rho_3)$ 实为同物,故圆 k' 之心为 K,半径为$\frac{5}{2}R$.

(18) **问题** 求作三圆,俾依次各切于一已知三角形之每两边,并同为一未知三角形之三切圆.

解 如图 54,设 $\triangle ABC$ 为已知三角形,$\triangle A'B'C'$ 为未知三角形,三圆 $\odot X$,$\odot Y$,$\odot Z$ 为所求圆,则 $\triangle A'B'C'$ 即为 $\triangle XYZ$ 之垂三角形.命 I 为 $\triangle XYZ$ 之外心,则 I 为 $\triangle ABC$ 之一等心((17)①);记 $\triangle ABC$ 之切圆 $\odot I$ 之半径为ρ,$\triangle XYZ$ 之外半径为 r,$\triangle A'B'C'$ 之第四切圆之半径为 w,则由(17)① 中定理有

$$\rho=r\pm w$$

兹以 I 为圆心，一与值 r' 为半径作圆，截 IA,IB,IC 于 X',Y',Z'，俾 $\triangle X'Y'Z'$ 与 $\triangle XYZ$ 为位似形者，命 $\triangle X'Y'Z'$ 之垂三角形之一切圆（系以 $\triangle X'Y'Z'$ 之垂心为圆心者）之半径为 w'，则此时有

$$\frac{r'}{r}=\frac{w'}{w}=\frac{r'\pm w'}{r\pm w}=\frac{r'\pm w'}{\rho}$$

故
$$r=\frac{r'\rho}{r'\pm w'}$$

在此式中，$\rho,r',r'\pm w'$ 均为已知值，故 r 值可以求得，于是问题解决矣.

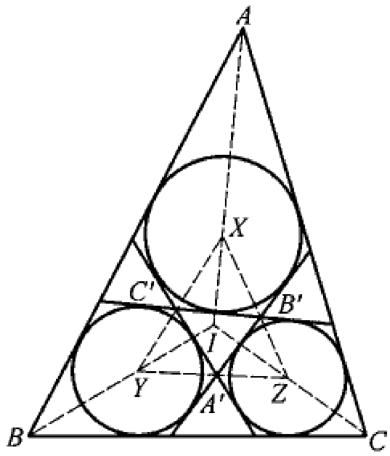


图 54

讨论　吾人观(17)① 中定理共有四式，故 $r'\pm w'$ 可有四值，如是当 I 为 $\triangle ABC$ 之每一等心时，各可得四种之 r 值，因知本题一般共有 16 解，更具体言之，设 $\odot I(r')$ 交 IA,IB,IC 于 X'_1 与 X'_2，Y'_1 与 Y'_2，Z'_1 与 Z'_2，令 $\overline{IX'_1},\overline{IY'_1},\overline{IZ'_1}$ 各与 $\overline{IA},\overline{IB},\overline{IC}$ 同向，$\overline{IX'_2},\overline{IY'_2},\overline{IZ'_2}$ 各与 $\overline{IA},\overline{IB},\overline{IC}$ 反向，则有如下几种情形.

（甲）如 I 为 $\triangle ABC$ 之内心，可取 $\triangle X'_1Y'_1Z'_1$，$\triangle X'_1Y'_2Z'_2$，$\triangle X'_2Y'_1Z'_2$，$\triangle X'_2Y'_2Z'_1$ 以定四种 r 值，此时 r 值为：

（Ⅰ）$$\frac{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)}};$$

（Ⅱ）$$\frac{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)}};$$

（Ⅲ）$$\frac{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1+\sin\gamma)}};$$

（Ⅳ）$$\frac{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1-\sin\gamma)}}.$$

（乙）如 I 为 $\triangle ABC$ 对 A 之旁心，可取 $\triangle X'_1Y'_1Z'_1$，$\triangle X'_1Y'_1Z'_2$，$\triangle X'_1Y'_2Z'_1$，$\triangle X'_2Y'_1Z'_1$ 以定四种 r 值，此时 r 值为：

（Ⅰ）$$\frac{4R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sin\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅱ})\ \frac{4R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)(1-\cos\beta)(1+\cos\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅲ})\ \frac{4R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)(1+\cos\beta)(1-\cos\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅳ})\ \frac{4R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sin\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}}.$$

(丙) 如 I 为 $\triangle ABC$ 对 B 之旁心，可取 $\triangle X'_1Y'_1Z'_1$，$\triangle X'_2Y'_1Z'_1$，$\triangle X'_1Y'_1Z'_2$，$\triangle X'_1Y'_2Z'_1$ 以定四种 r 值，此时 r 值为：

$$(\text{Ⅰ})\ \frac{4R\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)(1+\sin\beta)(1+\cos\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅱ})\ \frac{4R\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)(1-\sin\beta)(1-\cos\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅲ})\ \frac{4R\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)(1-\sin\beta)(1+\cos\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅳ})\ \frac{4R\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma}{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)(1+\sin\beta)(1-\cos\gamma)}}.$$

(丁) 如 I 为 $\triangle ABC$ 对 C 之旁心，可取 $\triangle X'_1Y'_1Z'_1$，$\triangle X'_1Y'_2Z'_1$，$\triangle X'_2Y'_1Z'_1$，$\triangle X'_1Y'_1Z'_2$ 以定四种 r 值，此时 r 值为：

$$(\text{Ⅰ})\ \frac{4R\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\sin\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅱ})\ \frac{4R\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1-\sin\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅲ})\ \frac{4R\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\sin\gamma)}};$$

$$(\text{Ⅳ})\ \frac{4R\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1+\sin\gamma)}}.$$

以上诸式中之 R 为 $\triangle ABC$ 之外半径，α,β,γ 为三半内角.

今假定如(甲)(Ⅰ)之情形时,作 $\triangle ABC$ 之三外分角线组成 $\triangle A_1B_1C_1$,则参照(15)② 系 1 之证,可得

$$\rho = 4R\cos A_1\cos B_1\cos C_1 = -4R\cos\angle BIC\cos\angle CIA\cos\angle AIB =$$
$$-4R\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\beta)\cos(\frac{\pi}{2}+\gamma) =$$
$$4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

及
$$w = 2r\cos\angle YXZ\cos\angle ZYX\cos\angle XZY =$$
$$2r\cos\frac{1}{2}\angle BIC\cos\frac{1}{2}\angle CIA\cos\frac{1}{2}\angle AIB =$$
$$2r\sqrt{\frac{(1+\cos\angle BIC)(1+\cos\angle CIA)(1+\cos\angle AIB)}{8}} =$$
$$r\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right]\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\right]} =$$
$$r\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)}$$

但
$$\rho = r + w$$

故
$$r = \frac{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)}}$$

此即上述之甲式(Ⅰ)也,其余诸式均可仿此推证,不再赘述.

系　$\triangle A'B'C'$ 之边被 $\triangle ABC$ 之非相应边截取等长之线段,其长度等于 $\triangle A'B'C'$ 之全周或两边和与第三边之差.

附录二　三角形内容极大正方形问题[①]

近有读者向本通报提出如下的一个问题要求解答:

“在已知三角形之内,求作一个极大的正方形.”

承编者转询,笔者觉得此题尚属有趣,提供大家参考,也颇有意味,所以不揣谫陋,草了此文.首先,此题中的所求正方形,显然必须允许它的顶点一部或全部在已知三角形的周界上,否则将无极大的可言.这是可以想见的.其次,我们看一看,一个正方形在已知三角形之内,当

(1) 它只有一顶点在已知三角形的周界上,及

(2) 它有两顶点在已知三角形的周界上

时,它能否为极大.(1) 很简单,只需用那顶点做相似中心,总可以把正方形放

① 原载于《数学通报》(1954 年 11 月).

大使它至少再有另一顶点在已知三角形的周界上.(2) 可能有三种情况:正方形的相邻两顶点同在已知三角形的一边上(也许前者有一顶点与这边的一端点重合),或分在已知三角形的两边上,更或正方形有一双对顶点分在已知三角形的两边上(也许前者有一顶点与这两边的非公共端点之一重合).此时我们必能选择一适当点(正方形的那两顶点之一或已知三角形的一适当顶点)来做相似中心把正方形放大(必要时可先经过旋转再行放大),使它至少再有另一顶点在已知三角形的周界上.这样,便说明了(1) 和(2) 两种情形的正方形不能为极大.以上的考察,都是比较简单但是琐碎的工作,为省篇幅,详细的叙述只好留给读者自己去推敲了,到这里,继续着我们就要问:

(3) 一个正方形在已知三角形之内,如果前者有三个顶点在后者的周界上,那么这个正方形能否为极大?

这个问题的答案为:在非钝角的三角形中是否定的,而在钝角三角形中却有可能.现在,我们就从这两方面来探讨:

① 假定 $\triangle ABC$ 为锐角或直角三角形,正方形 $PQRS$ 在它的里面,且有三顶点在它的周界上.这样又分两种情况:

a. $PQRS$ 有一边落在 $\triangle ABC$ 的一边上,另一顶点落在另一边上,例如,P 在 AB 上,QR 在 BC 上(图 1).延长 BS 交 AC 于 S',自 S' 引 CB 的平行线交 AB 于 P_1,再引 P_1Q_1 和 $S'R_1$ 垂直于 BC 并相交于 Q_1 和 R_1,则所得正方形 $P_1Q_1R_1S'$ 显然在 $\triangle ABC$ 之内而且比 $PQRS$ 为大.

b. $PQRS$ 有三顶点分别落在 $\triangle ABC$ 的三边上,例如,Q 在 AB 上,R 在 BC 上,S 在 CA 上(图 2).我们作 ASQ,BQR,CRS 三个圆周,根据密克定理,这三个圆周是同交于一点 O 的.现在我们来考察这点 O 的特性.我们首先见到

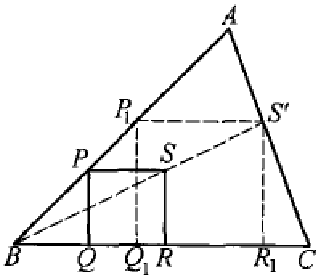


图 1

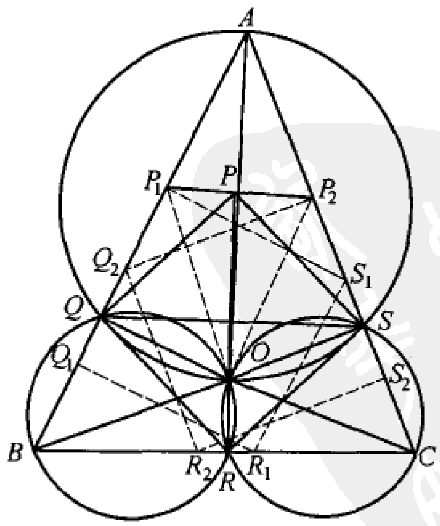


图 2

$$\measuredangle BOC = \measuredangle OBQ + \measuredangle BAC + \measuredangle SCO =$$
$$\measuredangle ORQ + \measuredangle BAC + \measuredangle SRO = \measuredangle BAC + \measuredangle SRQ$$
$$\measuredangle COA = \measuredangle OCR + \measuredangle CBA + \measuredangle QAO =$$
$$\measuredangle OSR + \measuredangle CBA + \measuredangle QSO = \measuredangle CBA + \measuredangle QSR$$
$$\measuredangle AOB = \measuredangle OAS + \measuredangle ACB + \measuredangle RBO =$$
$$\measuredangle OQS + \measuredangle ACB + \measuredangle RQO = \measuredangle ACB + \measuredangle RQS$$

因为这些角均为定角，所以对于 $\triangle ABC$ 来说，O 是一个定点. 这告诉我们一件事：当我们把 $PQRS$ 看做一个动的正方形——它的顶点 Q,R,S 各在 AB,BC,CA 上移动——时，所得的点 O 永远不变其位置. 其次我们又见到

$$\measuredangle QOS = \measuredangle BAC, \measuredangle ROQ = \measuredangle CBA, \measuredangle SOR = \measuredangle ACB$$

也均为定角，所以对于 $\triangle RSQ$ 因而亦即对于正方形 $PQRS$ 来说，点 O 在其中的相对位置也是不变的，如此的点叫做动正方形 $PQRS$ 的枢心. 于是我们可以这样说：正方形 $PQRS$ 绕枢心 O 而运动. 因为 Q,R,S 三点都作直线连动，那么由已知的轨迹定理，我们知道点 P 也作直线运动，也就是点 P 的轨迹应为一直线. 设想点 P 运动至 AB 和 AC 上的 P_1 和 P_2 的位置，于是 $PQRS$ 便达到 $P_1Q_1R_1S_1$ 和 $P_2Q_2R_2S_2$ 的位置，这是两个都内接于 $\triangle ABC$ 的正方形. 由于

$$\text{图形 } OPQRS \backsim \text{图形 } OP_1Q_1R_1S_1 \backsim \text{图形 } OP_2Q_2R_2S_2$$

故

$$PQ : P_1Q_1 : P_2Q_2 = OP : OP_1 : OP_2$$

但 OP 至少小于 OP_1 与 OP_2 二者之一，故知 $PQRS$ 亦必至少小于 $P_1Q_1R_1S_1$ 与 $P_2Q_2R_2S_2$ 二者之一. 由此便证明了 $PQRS$ 在 $\triangle ABC$ 之内还是可以变大的.

② 假定 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，正方形 $PQRS$ 在它的里面，且有三顶点在它的周界上，这也分两种情况：

a. $PQRS$ 有一边落在 $\triangle ABC$ 的一边上，另一顶点落在另一边上，例如，P 在 AB 上，QR 在 BC 上. 这当中，也许 R 和 C 重合(图 3)，如此的 $PQRS$，特称它为偏接正方形，它与我们的论题极有关系，待后当有讨论. 今假定 R 不和 C 重合，延长 BS 交 AC 于 S'，则在 $\frac{BS'}{BS}$ 和 $\frac{BC}{BR}$ 二比值中，必有一较小. 如 $\frac{BS'}{BS}$ 较小(图 4)，可自 S' 引 CB 的平行线交 AB 于 P_1，再引 P_1Q_1 和 $S'R_1$ 垂直于 BC 交相交于 Q_1 和 R_1，

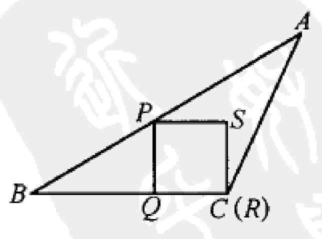


图 3

则正方形 $P_1Q_1R_1S'$ 大于$PQRS$且在$\triangle ABC$之内;如$\frac{BC}{BR}$较小(图5),可自 C 引 BC 的垂线交SS'于S_1,再自 S_1 引 CB 的平行线,与 AB 交于P_1,然后再引 P_1Q_1 垂直 BC 并相交于Q_1,那么所得到的正方形 $P_1Q_1CS_1$ 也大于 $PQRS$ 且在$\triangle ABC$ 之内,这和图 3 的情形相类似.

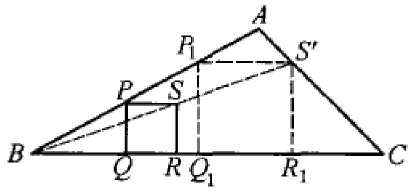


图 4

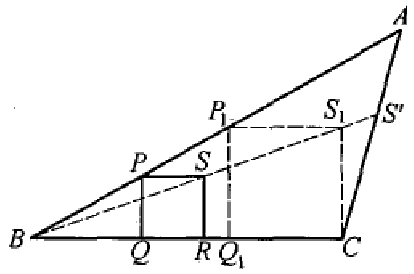


图 5

b. $PQRS$ 有三顶点分别落在$\triangle ABC$的三边上,例如,Q在AB上,R在BC上,S 在 CA 上(图 6).这时 $\angle A$ 一定为锐角(因为它必须小于 $\angle QPS$),故可假定

$\angle C$ 为钝角.我们作正方形 $P_1Q_1R_1S_1$,令 P_1Q_1 在 AB 上,R_1 在 BC 上,S_1 在 CA 上;又作正方形 $P_2Q_2R_2S_2$,令 Q_2 在 AB 上,R_2 在 BC 上,S_2 与 C 重合;这样的两个正方形一定都在$\triangle ABC$之内.可按①的b中的方法,我们可以求得一个枢心 O,使 $PQRS$ 绕之而运动;而 $P_1Q_1R_1S_1$ 和 $P_2Q_2R_2S_2$ 显为 $PQRS$ 运动过程中的两个位置,故 P,P_1,P_2 三点是共线的.当 P 在线段 P_1P_2 上运动时,正方形 $PQRS$ 显然恒在$\triangle ABC$之内,若 P 越出线段 P_1P_2 之外时,则 $PQRS$ 便逸出$\triangle ABC$的范围之外了.因为 OP 至少须小于OP_1与 OP_2二者之一,所以 $PQRS$ 亦至少须小于 $P_1Q_1R_1S_1$ 与 $P_2Q_2R_2S_2$ 二者之一,这说明了 $PQRS$ 可以继续变大,但至少不能超出 $P_1Q_1R_1S_1$ 与 $P_2Q_2R_2S_2$ 二者之一.

从以上的探讨,使我们知道,想要在已知三角形内求一极大的正方形,当已知三角形为锐角或直角三角形的时候,只需在它的内接正方形中去寻觅,而当已知三角形为钝角三角形的时候,只需在它的内接正方形和偏接正方形中去物色便得.众所周知,内接正方形在锐角三角形中共有三个,直角三角形中则有两个,钝角三角形中只有一个,但后者另有两个偏接正方形;这样,在有限个事物当中要求一极大者,问题便简单得多,我们实行拿来比较比较就行了.现在,我们便着手来做这件工作.为欲简洁地达到我们的目的,有两个要用及的定理须先证明.

第一,三角形中,大边与其上的高线之和,必大于小边与其上的高线之和.

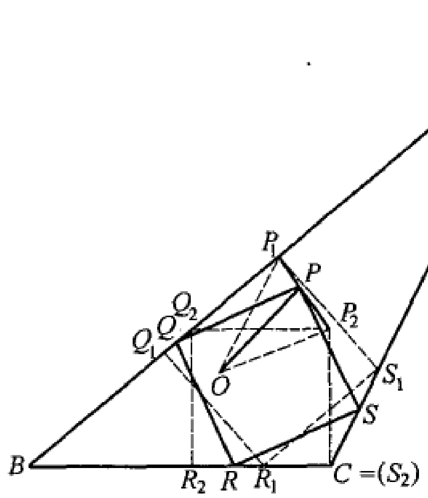


图 6

证明 在 $\triangle ABC$ 中,设 $AB > AC$, BE 和 CF 均为高线(图 7). 于 AB 上,截 $AC' = AC$,引 $C'F' \perp AC$, $C'D \perp BE$,并分别交于 F' 和 D,则我们很易知道 $C'F' = CF$,而因

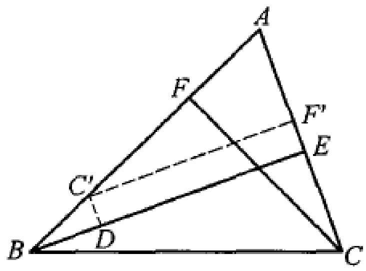


图 7

$$AB - AC = AB - AC' = BC' > BD = BE - DE = BE - C'F' = BE - CF$$

故

$$AB + CF > AC + BE$$

但在这个证明中,我们不要忘了一件事实:当 $\angle A = \frac{\pi}{2}$ 时 E 和 F 便都与 A 重合,这时上述的不等式应变为等式.

第二,一正方形有一边落在三角形的底边(或延长线)上,而另两顶点分别落在两腰之内.设这正方形的边长为 l,三角形的底边为 a,高为 h,则有

$$l = \frac{ah}{a+h}$$

证明 设这个图形如图 8 所示,因为 $\triangle APS$ 和 $\triangle ABC$ 相似,所以

$$\frac{PS}{BC} = \frac{AE}{AD}$$

即

$$\frac{l}{a} = \frac{h-l}{h}$$

由此 $\frac{l}{a}=\frac{h}{a+h}$

故 $l=\frac{ah}{a+h}$

这个证明对于什么形式的三角形都是适合的.

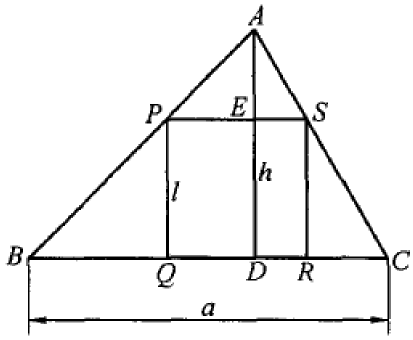


图 8

有了上述的两个预备定理,我们便可回到本题的讨论了,今分三方面论述如下.

(1) 先讨论锐角三角形.设以 a,b,c 顺次代表 $\triangle ABC$ 的三边,h_1,h_2,h_3 顺次代表 $\triangle ABC$ 的三高线,l,m,n 顺次代表立在 BC,CA,AB 上的内接正方形的边长,那么根据上面的第二预备定理,应有

$$l=\frac{ah_1}{a+h_1},m=\frac{bh_2}{b+h_2},n=\frac{ch_3}{c+h_3}$$

今我们假定 $a<b<c$,则由第一预备定理,知

$$a+h_1<b+h_2<c+h_3$$

而我们又已熟知 $ah_1=bh_2=ch_3$,故由此便得到

$$l>m>n$$

这就是昭示我们:在锐角三角形之内所有的正方形,以立于最小边上的内接正方形为极大.

但附带声明:当锐角三角形有两边相等且小于第三边时,则立于这两边上的内接正方形同时为极大;如三边均相等,则三个内接正方形都为极大.

(2) 其次讨论直角三角形.这方面的情形和锐角三角形相类似,所以我们的结论为:在直角三角形之内所有的正方形,以立于腰上的内接正方形为极大.

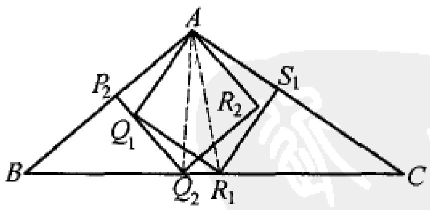


图 9

(3) 最后讨论钝角三角形.设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 为钝角,我们如图9作出两个偏接正方形 $AQ_1R_1S_1$ 和 $AP_2Q_2R_2$,而先来考查它们孰大孰小.假定 $AC\geqslant AB$,则 $\angle B\geqslant\angle C$,于是

$$\angle AQ_2R_1=\angle B+\frac{\pi}{4}\geqslant\angle C+\frac{\pi}{4}=\angle AR_1Q_2$$

则 $AR_1\geqslant AQ_2$

故 $$\text{正方形 } AQ_1R_1S_1 \geqslant \text{正方形 } AP_2Q_2R_2$$
这就是说:在等腰的钝角三角形中,两个偏接正方形是一般大小;如两腰不等,则立于长腰上者为较大.因此,我们要寻觅极大的正方形,只需在这个较大的偏接正方形和那仅有的内接正方形二者之中选择其一就可以了.但这两个正方形,究竟孰大孰小,那倒没有一定,还须要看$\triangle ABC$的形状如何才可决断.现在我们令 $BC = a$ 及 $CA = b$,并如图 10 作内接正方形 $PQRS$ 及立于AC上的偏接正方形 $AQ_1R_1S_1$,则我们有如下的准则:

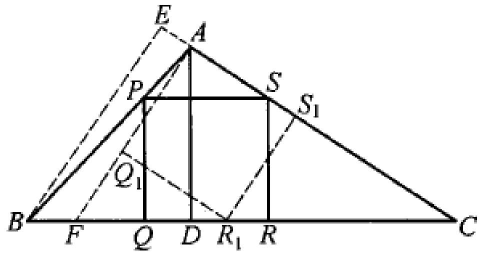


图 10

"设$\frac{a-b}{a} \lesseqgtr \tan\frac{1}{2}\angle C$,那么正方形 $PQRS \lesseqgtr$ 正方形 $AQ_1R_1S_1$."要证明这个准则,可作 $AD \perp BC$,$BE \perp CA$ 并分别相交于D和E,且令 $AD = h$,则由于

$$\frac{a-b}{a} \lesseqgtr \tan\frac{1}{2}\angle C = \sqrt{\frac{1-\cos\angle C}{1+\cos\angle C}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\angle C)^2}{1-\cos^2\angle C}} = \frac{1-\cos\angle C}{\sin\angle C}$$

得 $$a\sin\angle C - b\sin\angle C \lesseqgtr a - a\cos\angle C$$

即 $$BE - h \lesseqgtr a - CE$$

故 $$BE + CE \lesseqgtr a + h$$

延长 AQ_1 交 BC 于 F,令 $AF = f$,于是有

$$\frac{ah}{bf} = \frac{ah}{h \cdot FC} = \frac{a}{FC} = \frac{CE}{b} = \frac{BE}{f} = \frac{BE+CE}{b+f} \lesseqgtr \frac{a+h}{b+f}$$

或

$$\frac{ah}{a+h} \lesseqgtr \frac{bf}{b+f}$$

但由前述的第二预备定理,知

$$PQ = \frac{ah}{a+h},\quad AQ_1 = \frac{bf}{b+f}$$

故

$$\text{正方形 } PQRS \lesseqgtr \text{正方形 } AQ_1R_1S_1$$

由此我们得到如下的结论.

① 设 $AC > AB$,则在$\triangle ABC$之内所有的正方形:

a. 当$\frac{a-b}{a} < \tan\frac{C}{2}$时,以立于 AC 上的偏接正方形为极大;

b. 当$\frac{a-b}{a} = \tan\frac{C}{2}$时,内接正方形和立于 AC 上的偏接正方形二者同时

为极大；

c. 当$\frac{a-b}{a}>\tan\frac{C}{2}$时，以内接正方形为极大.

这里有一个图(图 11)，它恰表明上面准则的三种情形的存在(当 $AC>AB$ 时)——$\triangle A_1BC$，$\triangle A_2BC$，$\triangle A_3BC$ 依次各适合于上述结论 ① 的 a,b,c 三种情形，至于此图的作法，看图自明，不必赘述.

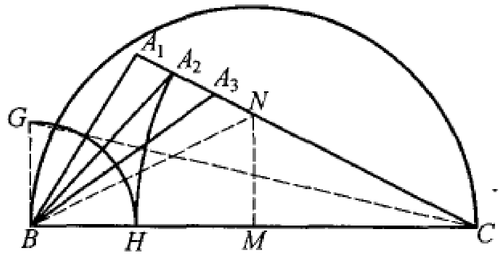


图 11

② 设 $AC=AB$，则在 $\triangle ABC$ 之内所有的正方形.

a. 当$\frac{a-b}{a}<\tan\frac{C}{2}$时，两个偏接正方形都为极大；

b. 当$\frac{a-b}{a}=\tan\frac{C}{2}$时，内接正方形和两个偏接正方形三者同时为极大；

c. 当$\frac{a-b}{a}>\tan\frac{C}{2}$时，以内接正方形为极大.

这里也有一个图(图 12)，其中的 $\triangle ABC$ 适合于上述结论 ② 的 a 和 b 虽存在，但可惜非尺规所能作图. 至于 c，在图 11 中的 $\triangle NBC$ 便合.

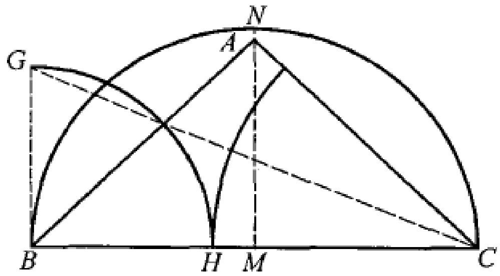


图 12

附言　本文对于三角形内容极大正方形的证明，并没有利用"有极大正方形存在"的假定.

附录三　三角形等心的宝藏[①]

1 谁都知道，三角形有一个内心和三个旁心，这是就它们的位置不同而分别是定名的. 但是，它们除位置有所不同外，在某种观点上来看，它们所具的几何特性，可说是完全一致的，也可说是相匹的；因此，我们实在应以同等的地位来看待它们. 现在为统一起见，也为方便起见，我们把它们统称为等心，这是取它们各至三角形的三边都有等距离的意思. 以后我们凡说等心，概系泛指的，

① 原载于《数学通报》(1955 年 1 月).

认为它是内心或任何一个旁心都可以;倘若只是单指那一个,我们一定特别声明它是内心或者哪一个旁心.

关于等心的性质,在三角形中是特别显著的,并且也占着相当重要的地位.它和外心、垂心、重心一样,自古就为人们所注意,所以希腊时代的几何学家们,对于它的知识就已经发现得很多.这里所谓等心的知识,当然也包括分别以它们为心、而和三角形三边相切的圆,就是内切圆和三个旁切圆 —— 以后我们将统称它们为切圆,因为等心和切圆,乃是血肉相连彼此相牵的密切.因此,凡说到等心的性质,就不得不涉及切圆,这是很自然的.刚才说过,古人对于等心的性质,是知道得很多的,直到现在,这方面的知识,可说已是十分丰富了,但它仍不失为一个宝藏,将会供给人们发掘不尽的.本文对于过去已有的丰富的材料,除用及的以外,都不再去叙述,只向着这个宝藏中的"相切圆"一方面来发掘.当然,所发掘出来的只是其中一小部分,而且有些别成一个系统,以另篇叙述较妥,故这些又得除外.总之,在这篇小小的文章里,只作为笔者的个人读书心得,来和大家谈论谈论,倘若因此提起大家的兴趣,因而高兴地向着这方面甚至其他方面的宝藏去发掘,使我们的知识更加丰富起来,那就是笔者最感荣幸的了.

2 下面是三个很著名的定理,我们以后是要用到它们的,所以先把它们列举出来.

a.察柏尔(Chapple)定理　三角形的外接圆半径 R 及切圆半径 r,和这两圆的圆心距 d,有下面的关系

$$d^2 = R^2 \mp 2Rr$$

或

$$\frac{1}{d-R} - \frac{1}{d+R} = \mp\frac{1}{r}$$

式中的复号,要看切圆之为内切圆或旁切圆而取负号或正号.

逆之,设两圆的半径及圆心距适合上式的关系,则可有无穷数的三角形,既内接于其中的一圆,且外切(或旁切)于其他的一圆.

b.费尔巴哈(Feuerbach)定理　三角形的四个切圆都和九点圆相切;而内切圆系内切,三个旁切圆都系外切.

四个切圆和九点圆的切点,我们特别叫它们做三角形的费氏切点.

c.凯西(Casey)定理　四圆 c_1, c_2, c_3, c_4 有一公切圆 k 的充要条件为

$$\pm t_{41}t_{23} \pm t_{42}t_{31} \pm t_{43}t_{12} = 0$$

式中的 t_{41} 乃系代表 c_4 和 c_1 的公切线(公切线分的长度),……,但所表系外公

切线抑内公切线,则要看该两圆和公切圆 k 的切向(外切或内切)相同抑相异而定.

考四圆同切于一公切圆,它们的切向不外乎下述的三种情况:

(1) 四圆与公切圆的切向都相同;

(2) 三圆与公切圆的切向相同,只余一圆的切向和它们相异;

(3) 两圆与公切圆相外切,而他两圆与公切圆相内切.

因此上式中的 t,它所表的公切线,亦不外乎三种情形:

(1) 都是外公切线;

(2) 有一附码相同的三个是内公切线,其余三个是外公切线;

(3) 其中一项的两个同是外公切线,另两项的四个都是内公切线.

倘若两圆无公切线,可以下面的等式来代替

$$\bar{t}_{ij}^2 = d_{ij}^2 - (r_i - r_j)^2, \bar{t}_{ij}^2 = d_{ij}^2 - (r_i + r_j)^2, (i, j = 1,2,3,4)$$

前式系表外公切线,后式则表内公切线,式中的 r 为圆的半径,d 为圆心距.

至于上面的条件式中的复号,需要看四圆实际的位置如何,然后可以决定取舍它的正号或负号.这在应用上,虽然没有什么重大障碍,但我们仍须仔细去辨别,那才不致发生错误.

上面所举第一个定理,是一个很重要的定理;第二个定理非常优美,早已嚣著于世,因此它的证法很多;第三个定理是经过发现者的惨淡经营而得的,用处很广,但它的完善的证明(各书上所载大都不很完善)却相当长.这里没有把它们的证法一一写出来,希望读者在下列各书中随自己选择去参阅一下:

(1) 商务印书馆,邱丕荣译,近世几何学,§172 ~ §176,§295 ~ §297,§320 ~ §324.

(2) 商务印书馆,方俊译,近世几何学,§266.

(3) 商务印书馆,李俨编译,近世几何学初编,第 92,111,150 ~ 153 页.

(4) 算学业刊社,刘亦珩编,初等近世几何学,第 116 ~ 118,182 ~ 187,200 ~ 202 页.

(5) 商务印书馆,王邦珍编,近代几何学,第 32,107 页.

(6) 商务印书馆,陆钦轼译,高级几何学,§424.

又本文应用反演法(Inversion)的地方很多,请读者酌量参考下列各书:

(1) 商务印书馆,邱丕荣译,近世几何学,§63 ~ §82.

(2) 商务印书馆,方俊译,近世几何学,第十九章.

(3) 商务印书馆,李俨编译,近世几何学初编,第五编第四章.

(4) 算学业刊社,刘亦珩编,初等近世几何学,第七章.

(5) 商务印书馆，王邦珍编，近代几何学，第八编.

(6) 商务印书馆，陆钦轼译，高级几何学，第七章.

(7) 商务印书馆，严济慈编，几何证题法，第十章.

(8) 中华书局，余介石译，几何作图题解法及其原理，第 44 ~ 47 页.

(9) 商务印书馆，黄新铎译，射影纯正几何学，第十六章.

(10) 中华书局，余介石译，近代数学概观第二册，第一编第二部第四章、第六章.

至于向量(线分的正负)和向角的概念，本文也有用及，请读者参考：

(1) 商务印书馆，郭坚白译，近世几何学练习，向量，二直线之角.

(2) 商务印书馆，邱丕荣译，近世几何学，§2 ~ §7，§16 ~ §19.

3 现在我们首先叙述三角形中的一些特别点和它与等心相关联的性质.也许大家早已知道这样的一个事实.设连三角形的顶点到对边上切圆的切点，凡得 12 连线，则除三角形的顶点外，另三三相交于八点.其中的交点系由同一切圆的切点与对顶点的连线所得的，称为热尔岗点(Gergonne points)，共有四点；其余四点则称为纳格尔点(Nagel points)(参阅商务印书馆，邱丕荣译，近世几何学，§291).前者我们暂时不去说它，而后者却有一个显著的性质，正是我们所要应用的(参阅前书 §361)：

a.**定理**　三角形的等心是中点三角形[1]的纳格尔点；或者，三角形的纳格尔点是外重三角形[2]的等心.因之，三角形的等心、重心、纳格尔点(对应的)三者共线，而等心与纳格尔点的连线被重心分割于三分之一的地方.

由这个定理，再应用费氏定理，我们马上推得：

b.**定理**　设以三角形的各纳格尔点为心，对应切圆的直径长为半径作圆，则这样的四个圆必同与外接圆相切.

4 我们有了上面的准备，便可以论述下面的定理：

定理　J 为 $\triangle ABC$ 的纳格尔点，它与三顶点的连线各交对边于 X,Y,Z；命对应的切圆 $\odot I$ 与三边的切点为 α,β,γ，此三点依次各至 AJ,BJ,CJ 上的垂趾为 α',β',γ'.设在 AJ,BJ,CJ 上各取一点 A',B',C'，使

$$\overline{AA'}=\overline{\alpha'X},\overline{BB'}=\overline{\beta'Y},\overline{CC'}=\overline{\gamma'Z}$$

则 $\odot A'B'C'$ 与 $\odot ABC$ 相切，且 J 为它们的相似中心之一(图 1).

---

① 三角形三边中点所组成的三角形，称为中点三角形.

② 过三角形三顶点各作对边的平行线，所组成的三角形，称为外重三角形.

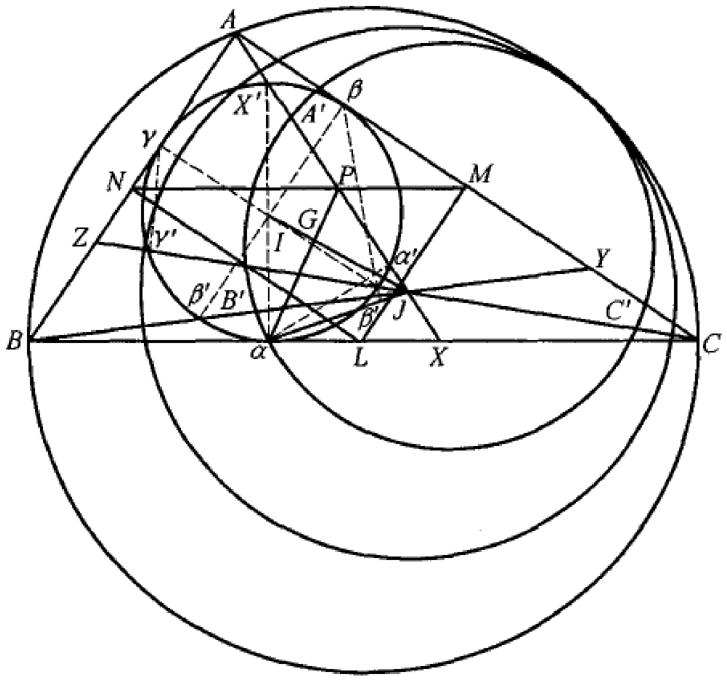


图 1

证明　命在 AI 线上的另一等心为 I'，则切圆 $\odot I'$ 必切 BC 于 X，因为 J 是对应于 I 的纳格尔点的缘故．作切圆 $\odot I$ 的直径 $\alpha X'$，$\beta Y'$，$\gamma Z'$．那么 X' 和 X 即为切圆 $\odot I$ 和切圆 $\odot I'$ 的应位点，故知 X' 在 AX 线上；同理，Y'，Z' 亦各在 BY，CZ 线上．

设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，则由 3a 定理知 JGI 为直线，且有

$$\frac{\overline{GJ}}{\overline{GI}}=-2$$

因此 G 显然亦为 $\triangle J\alpha X'$ 的重心．命 $\triangle LMN$ 为中点三角形，AJ 交 MN 于 P，则见

$$\frac{\overline{B\alpha}}{\overline{MP}}=-\frac{\overline{CX}}{\overline{MP}}=-2$$

于是 α 与 P 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle LMN$ 的位似点，故 αGP 为一直线，从这里我们便知 P 为 JX' 的中点．但 P 显然又为 AX 及 $A'\alpha'$ 的中点，因得

$$\overline{JA}=-\overline{X'X},\overline{JA'}=-\overline{X'\alpha'}$$

同理

$$\overline{JB}=-\overline{Y'Y},\overline{JB'}=-\overline{Y'\beta'}$$

及

$$\overline{JC}=-\overline{Z'Z},\overline{JC'}=-\overline{Z'\gamma'}$$

以 d 表切圆 $\odot I$ 的直径，则有

$$d^2 = \overline{X'\alpha^2} = \overline{X'X} \cdot \overline{X'\alpha'} = \overline{JA} \cdot \overline{JA'},$$
$$d^2 = \overline{Y'\beta^2} = \overline{Y'Y} \cdot \overline{Y'\beta'} = \overline{JB} \cdot \overline{JB'},$$
$$d^2 = \overline{Z'\gamma^2} = \overline{Z'Z} \cdot \overline{Z'\gamma'} = \overline{JC} \cdot \overline{JC'}$$

这三式显然表示 $\odot ABC$ 与 $\odot A'B'C'$ 对于 $\odot J(d)$ 实互为反演圆．由 3b 定理我们已知 $\odot J(d)$ 与 $\odot ABC$ 相切，再根据反演的原理即知 $\odot A'B'C'$ 一定和它们相切于同点，而且 J 为 $\odot ABC$ 与 $\odot A'B'C'$ 的相似中心之一，也成为必然的结果．到此便证明我们的定理了．

注意　中点三角形的切圆，我们特别称它们为原三角形的斯俾克圆(Spieker circles)，因为斯氏关于它们的研究曾有特别的贡献的缘故．上面的定理，倘我们另从这样的观点来着眼：就是把 LI，MI，NI 三连线以同样的方式施之于 $\triangle LMN$ 及斯氏圆，那么我们就可得到切九点圆于费氏切点的圆，这对于费氏定理实增色不少．

5 因为相切两圆的圆心距一定等于它们的半径和或差，所以我们若从这方面去深思一下，然后联合应用察氏和费氏的定理，那么就可得到：

定理　以三角形的等心为心作圆，设它在每边上的截弦等于该等心与外心距离的 2 倍，则所作圆必与九点圆相内切．

证明　如图 2，设 $\triangle ABC$ 的切圆 $\odot I(r)$ 与 BC 边的切点为 α，所作圆截 BC 的一点为 X，则 αX 依假设当等于 I 与外心的距离．命 R 为 $\triangle ABC$ 的外半径，依 2a 定理，则所作圆的半径 ρ 便有如下的关系

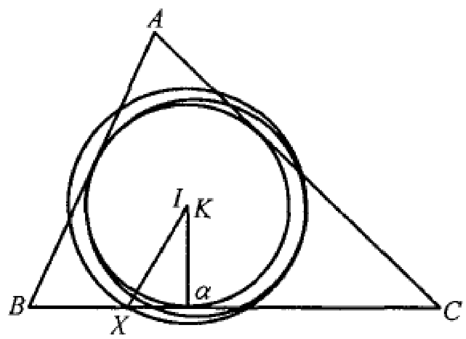


图 2

$$\rho^2 = \overline{IX^2} = \overline{\alpha X^2} = \overline{I\alpha^2} = R^2 \mp 2Rr + r^2 = (R \mp r)^2$$

故　$$\rho = R \mp r$$

或　$$r = \mp(\rho - R)$$

其次，因切圆 $\odot I(r)$ 与九点圆 $\odot K(\frac{1}{2}R)$ 相切(2b)，于是

$$\overline{IK} = r \mp \frac{1}{2}R = \mp(\rho - R) \mp \frac{1}{2}R = \mp\rho \mp \frac{1}{2}R$$

这式就是表示 $\odot I(\rho)$ 与 $\odot K(\frac{1}{2}R)$ 相切，并且显然是内切的．

系　这样所作的四圆，它们的半径和等于外半径的 8 倍．

证明　由上证，可知所作四圆的半径和为

$$\sum \rho = 4R - r + r_1 + r_2 + r_3$$

其中 r 表内切圆的半径，r_1, r_2, r_3 表三个旁切圆的半径. 但我们早已熟知下面的公式

$$4R + r = r_1 + r_2 + r_3$$

所以代入上式便得

$$\sum \rho = 8R$$

6 在这节我们将研究由通过各等心的12线段而产生的12个圆，它们除有一共同的公切圆外，另有三个这样的圆：各和其中的四圆相切，并且这三个圆又同切于九点圆. 这是一个多么有趣的图象呀！现在，我们先证明一个预备定理，以便应用：

定义 联结三角形的顶点到对边上任何点的线段，称为顶边线段.

预备定理 通过三角形外心的三顶边线段，以它们为直径各作圆，必与九点圆相切，切点乃为三高线的垂趾.

证明 如图3，命 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，D, E, F 为三高线的垂趾，L, P 各为 BC, AH 的中点，则 D, E, F, L, P 都为九点圆 $\odot K$ 上的点，而且 LP 为它的直径. 设 AX 为过外心 O 的顶边线段，则因 $AO \parallel LK$，可知 DK 必定通过 AX 的中点 T. 这样一来，$\odot AX$ 既通过点 D，于是切九点圆 $\odot K$ 于 D 也就显而易见了. 其余的证明仿此.

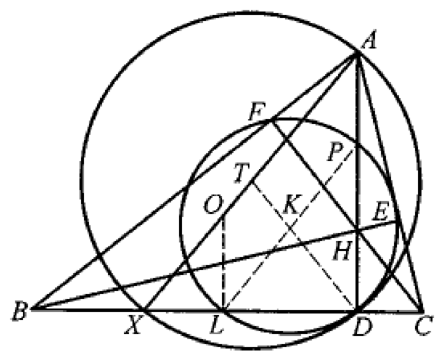


图 3

这里有一个系，以后用得着，所以顺便提出：

系 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，AX 为过外心的顶边线分，则 $\odot X(XA)$ 与 $\odot HBC$ 相切，切点乃为 A 对于 BC 的反映点，余类推.

证明 在上的定理中，设以 A 为位似心，将 $\odot AX$ 与九点圆 K 的半径放大至一倍的位置，那就变成本系了.

7 预备定理既已证明，我们便开始来研究我们所期待的有趣东西：

a. 定理 设过三角形的任一等心作每边的垂线，而为该边及过对顶点的平行线所限，则以各所限线段为直径作圆，凡12圆，必同切于三角形的外接圆.

证明 如图4，命 I 为 $\triangle ABC$ 的等心之一，过 I 作 BC 的垂线而为 BC 及直

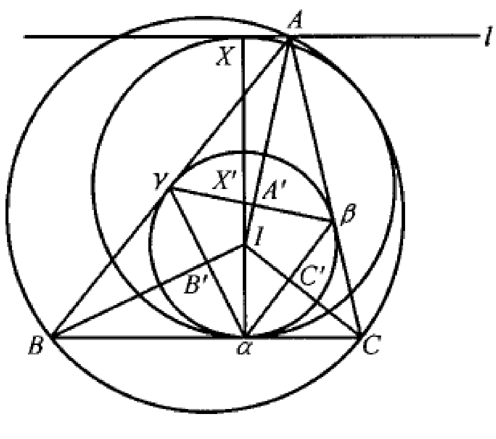


图 4

线 l 限于 α 及 X，l 系过 A 且平行于 BC 者；于是我们所要证明的，乃系 $\odot \alpha X$ 与 $\odot ABC$ 相切.其余的情形，都可仿此.

设切圆 $\odot I$ 切三边于 α,β,γ，令 IX，IA 交 $\beta\gamma$ 于 X'，A'，IB，IC 各交 $\gamma\alpha$，$\alpha\beta$ 于 B'，C'，则易知有

$$\overline{IX}\cdot\overline{IX'}=\overline{IA}\cdot\overline{IA'}=\overline{IB}\cdot\overline{IB'}=\overline{IC}\cdot\overline{IC'}=\overline{I\alpha}^2$$

若以切圆 $\odot I$ 为反演基圆而施行反演法，那么 X 与 X'，A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 都互为反演点，而 $\odot \alpha X$ 与 $\odot \alpha X'$ 互为反演圆.但 I 为 $\triangle \alpha\beta\gamma$ 的外心，$\odot A'B'C'$ 为 $\triangle \alpha\beta\gamma$ 的九点圆，故 $\odot \alpha X'$ 与 $\odot A'B'C'$ 相切(6).将反演法还原，于是便知 $\odot \alpha X$ 与 $\odot ABC$ 也是相切的.

b.**定理**　上述的 12 圆中，以切于同边的四等圆为一组，凡三组；这样，每组的圆又另有一公切圆，凡三圆，都等于原三角形的外接圆，且同与九点圆相切.

证明　设以每组圆的连心线为轴翻折它们，则组中的圆不变，但原三角形的外接圆必变动它的位置，这个变位后的外接圆，显然就是组中四圆的另一公切圆；这三个公切圆的圆心，其实乃系外心对于中点三角形三边的反映点，所以必同在九点圆上，因之它们同与九点圆相切，到此已是十分明白的了.

8 把上面的定理中的等心变换为斯氏圆心，那它就成为下面的形式：

定理　设过三角形的任一斯氏圆心作每边的垂线，而为该边及另二边中点的连线所限，则以各所限线段为直径作圆.凡 12 圆，必同切于三角形的九点圆.该 12 圆中，以切于同边的四等圆为一组，凡三组；这样，每组的圆又另有一公切圆，凡三圆，都等于原三角形的九点圆，且同与中点三角形的九点圆相切.

9 我们若再应用 3a 定理，则 7 的定理又变形为：

定理　三角形各纳格尔点至三边上的垂趾，凡 12 点；设以此等点各为心，而以所在边上的高线长度为半径作圆，则这样的 12 圆，必同切于三角形的外重圆[①].该 12 圆中，以其心在同边上的四等圆为一组，凡三组；这样，每组的圆又另有一公切圆，凡三圆，都等于外重圆，且同与原三角形的外接圆相切.

① 三角形的外重三角形的外接圆，称为外重圆.

10 [①]三角形中有所谓类似中线，这是我们所熟知的．类似中线被三角形的外接圆所截的部分，我们特别称它为类似弦．设作 $\triangle ABC$ 的类似弦 AD，则 $ABDC$ 称为调和四边形，因为用外接圆上任一点为反演中心而施行反演法，可以把这四边形的顶点反演为调和点列的缘故．这些知识，下面将要用及，希望读者在前面所举的书籍中参考一下．

定理　I,I_1,I_2,I_3 为 $\triangle ABC$ 的四等心，设将 $\overline{IA},\overline{IB},\overline{IC}$ 倍增为 $\overline{IA'},\overline{IB'},\overline{IC'}$，又各作 $\triangle IBC,\triangle ICA,\triangle IAB$ 的一类似弦 IK_1,IK_2,IK_3，则 $A',B',C',I_1,I_2,I_3,K_1,K_2,K_3$ 九点共圆．余类推．

证明　如图5，因为 I 是 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心，所以

$$\overline{IA}\cdot\overline{II_1}=\overline{IB}\cdot\overline{II_2}=\overline{IC}\cdot\overline{II_3}=p$$

于是以 I 为反演中心，p 为反演率而施行反演法，则 I_1,I_2,I_3 将反演为 A,B,C．命 II_1,II_2,II_3 的中点为 α,β,γ，那么有

$$\overline{IA'}\cdot\overline{I\alpha}=2\overline{IA}\cdot\frac{1}{2}\overline{II_1}=p$$

$$\overline{IB'}\cdot\overline{I\beta}=2\overline{IB}\cdot\frac{1}{2}\overline{II_2}=p$$

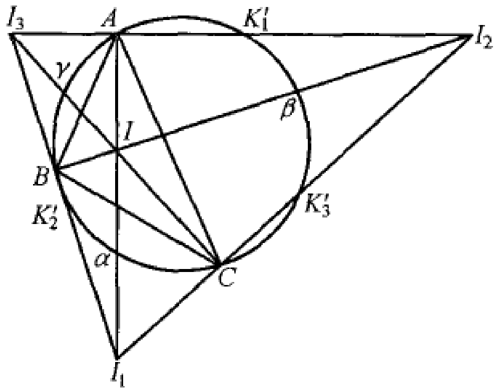


图 5

$$\overline{IC'}\cdot\overline{I\gamma}=2\overline{IC}\cdot\frac{1}{2}\overline{II_3}=p$$

可知 A',B',C' 反演为 α,β,γ．设 K_1,K_2,K_3 的反演点为 K'_1,K'_2,K'_3，则因 IBK_1C,ICK_2A,IAK_3B 都是调和四边形，故 K'_1,K'_2,K'_3 一定各为 I_2I_3,I_3I_1,I_1I_2 的中点．到此，我们利用九点圆，便可得到所要的证明了．

系　由三角形的每一等心，作它对于各边的视三角形[②]的类似弦，这些类似弦的中点，凡 12 点，必同在原三角形的外接圆上．

证明　分别以各等心为位似心，将上定理所得的圆缩小半径至一半的位置，这样就得很明白．

11 由上面的定理，因而引出：

定理　在 $\triangle ABC$ 中，设将 $\overline{AB},\overline{AC}$ 倍增为 $\overline{AB'},\overline{AC'}$，自 C,B 各作 AC,AB 的垂线令各交 AB,AC 于 E,F；命 A 对于 EF 的反映点为 A'；作外接圆的直径 AH，

---

① 以下部分原载于《数学通报》(1955 年 2 月)．

② 设 P 为线段 AB 外的一点，则称 $\triangle PAB$ 为 P 对于 AB 的视三角形．

类似弦 AK；则 A',B',C',E,F,H,K 七点共圆，余类推.

证明　如图 6，H 显然为 CE,BF 的交点，因知 H 为 $\triangle AEF$ 的垂心，故 A' 在 AH 上. 命 AH 交 EF 于 α，则 A,E,F,H 即为 $\triangle \alpha BC$ 的四等心；由此就 $\triangle \alpha BC$ 来观察，然后依据 10 中定理，便马上知道本定理可以成立.

定义　这样所得到的圆，称为 $\triangle ABC$ 的七点圆. 三角形的七点圆共有三个，个个对应于三角形的每一顶点.

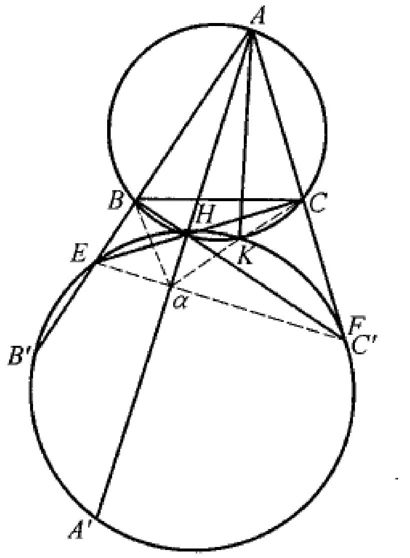


图 6

12　七点圆具有颇饶趣味的性质，不久我们就将讨论它. 现在先叙述一种由它所引出的圆：

定义　设以三角形的顶点为位似心，将对应的七点圆缩小半径至一半的位置，则这时所得的圆，称为次七点圆. 同样，三角形的次七点圆共有三个，个个对应于三角形的每一顶点.

由这定义，以及七点圆原来的位置，我们自然很易推知次七点圆有这样的性质：它们同通过三角形的外心，各通过对应类似弦的中点及非对应的两顶点，每圆各再交他两边的点交换在该两边的中垂线上.

定理　三角形的三个次七点圆，再交他二边于两点，联结之得三直线，这三直线所构成的三角形的外接圆，必与原三角形的外接圆相切.

证明　如图 7，设 $\triangle ABC$ 的三个次七点圆再交三边的点为 L_1,L_2,M_1,M_2,N_1,N_2；联结 L_1L_2,M_1M_2,N_1N_2 构成 $\triangle LMN$，则我们所要证明的，乃系 $\odot LMN$ 与 $\odot ABC$ 相切.

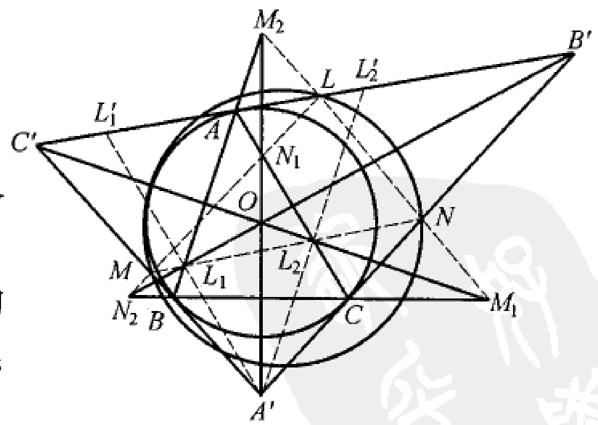


图 7

命 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，并在各顶点作外接圆的切线构成 $\triangle A'B'C'$，则根据刚才所说，我们已知 M_2N_1,N_2L_1,L_2M_1 各为 BC,CA,AB 的中垂线；因之它们与 OA',OB',OC' 相合.

联结 $A'L_1, A'L_2$ 交 $B'C'$ 于 L'_1, L'_2，则因 OA' 为对应于 A 的次七点圆的直径，故

$$OB' \perp A'L'_1, OC' \perp A'L'_2$$

由此易知 L_1, L_2 各为 $A'L'_1, A'L'_2$ 的中点. 于是，L_1L_2 便通过 $C'A'$，$A'B'$ 的中点. 同理，M_1M_2 及 N_1N_2 亦各通过 $A'B'$，$B'C'$ 及 $B'C'$，$C'A'$ 的中点.

这样一来，$\triangle LMN$ 实在就是 $\triangle A'B'C'$ 的中点三角形，到此就变成费氏定理(2b)了.

13 在前面，我们论述了 12 个圆有一共同的公切圆，并且具有其他的性质. 现在我们再来研究由通过各等心的另一种线段而产生的另外 12 个圆，它们的性质和前者是很类似的. 这种相映成趣的图象，实使我们觉得几何图形具有无限的美感，因而去欣赏不置. 我们现在先从一个著名的定理说起：

曼海姆(Mannheim)定理 有一定顶点及一定切圆的动三角形，它的外接圆必常切于某一定圆.

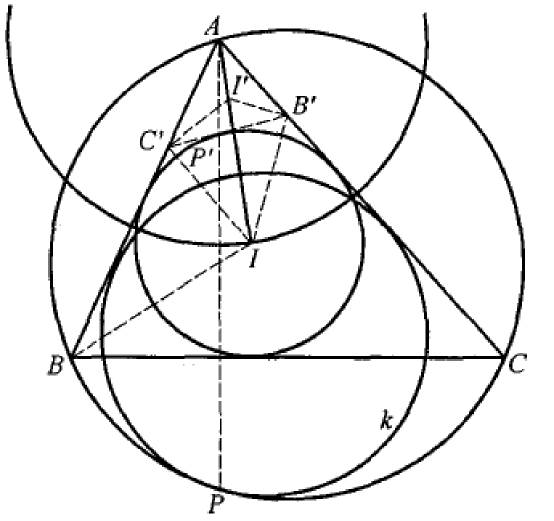


图 8

证明 如图8，设 $\triangle ABC$ 的顶点 A 及切圆 $\odot I$ 都为一定，BC 边为动线. 作 BC 的逆平行线 $B'C'$ 令切于 $\odot I$，但使 I 非为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C'$ 的自相似点. 在 AI 上取一点 I'，令 I 与 I' 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C'$ 的相似点，则 I, I' 都是 $\triangle AB'C'$ 的等心. 因之，B', C', I, I' 四点共圆，于是有

$$\measuredangle AIC' = \measuredangle I'IC' = \measuredangle I'B'C' = -\measuredangle IBC = \measuredangle IBC'$$

由此知 $\odot IBC'$ 切直线 AI 于点 I，故得

$$\overline{AI}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC'} = \overline{AC} \cdot \overline{AB'}$$

这就表示 $\odot ABC$ 与直线 $C'B'$ 对于定圆 $\odot A(AI)$ 系互为反演形的.

$\odot ABC$ 既为动圆，则 $B'C'$ 亦为动线，但 $B'C'$ 常切于定圆 $\odot I$，那么 $\odot ABC$ 当亦常切于某一定圆 k，这个圆 k 显然乃系 $\odot I$ 对于 $\odot A(AI)$ 的反演圆.

系 圆 k 切于 AB 及 AC，且 A 与 I 对于圆 k 互为反演点.

证明 因 A 为 $\odot I$ 与圆 k 的相似中心，故圆 k 亦必与 AB 及 AC 相切. 又 I 对于 $\odot I$ 的反演点为无穷远点 J，再对于 $\odot A(AI)$ 施行反演，则点 I 不变，J 反演

为 A，于是根据"反演性虽经反演而不变"的道理，便知 A 与 I 对于圆 k 互为反演点.

定义　圆 k 称为动三角形 ABC（有一定顶点 A 及一定切圆 $\odot I$）的曼氏圆.

14 这里我们再把上述的曼氏圆定义引入定三角形中去，这对我们将是很有用处而且怪有趣的：

定义　已知一三角形，设依次按定两边及任一切圆，使第三边移动，则这样每一次变形，即得一个曼氏圆，因三角形有四个切圆，计可有 12 次变形，故共得 12 个曼氏圆. 这 12 个圆，我们仍称它们为已知三角形的曼氏圆. 但我们必须注意，这里的定义和 13 中的定义，其意义是有差别的，前者系对于一动三角形（合乎所给条件）而说，它只有一个曼氏圆；而后者则系对于一定三角形（不论形式）而说，它共有 12 个曼氏圆. 虽然前者的曼氏圆和后者的任一个曼氏圆在图形来说没有什么两样，可是它们所基的概念的差异，我们仍应加以辨别的. 这点既明，我们就应记着：三角形的 12 个曼氏圆，每一圆系分别对应于一个顶点及一个切圆的；也就是对应于任一个顶点及任一个切圆即有一个曼氏圆，而三个顶点与四个切圆的配合，其数恰好正是 12.

根据 13 的定理和系，我们自然会知道这样的事实：三角形的 12 个曼氏圆都同切于外接圆，而且各分别切于三角形的两边.

下面的定理，使曼氏圆更具体化起来了：

定理　设 I 为 $\triangle ABC$ 的等心，过 I 且垂直于 IA 作直线交 AB，AC 于 B'，C'，则过 B'，C' 且切于 AB，AC 的圆 k，即为对应于 A 及切圆 $\odot I$ 的曼氏圆. 余类推.

证明　如图 9，命圆 k 的心为 K，则有

$$\overline{KB'}^2 = \overline{KA} \cdot \overline{KI}$$

这乃表示 A 与 I 对于圆 k 互为反演点. 一个圆既切于 AB，AC，又合于上式的关系，那显然是唯一的，故依 13 的系即可知圆 k 就是曼氏圆.

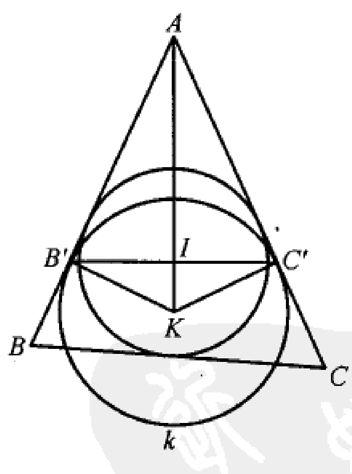


图 9

15 定理　三角形中，对应于每一顶点的四个曼氏圆和外接圆的切点与这个点的连线，凡 12 线，除三角形的顶点外，另三三相交于八点，而为外接圆与各切圆的相似中心.

证明　在图 8 中，命曼氏圆 k 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的切点为 P，$B'C'$ 与切圆

$\odot I$ 的切点为 P'，则 APP' 必为一直线，这是因为 P 与 P' 对于 $\odot A(AI)$ 互为反演点的缘故. AP' 通过 $\triangle AB'C'$ 的奈氏点或席氏点，故 AP 通过 $\triangle ABC$ 的纳格尔点或热尔岗点的等角共轭点是很显明的. 其余照此类推. 那么这就表明本定理所说的八点实是纳格尔点和热尔岗点的等角共轭点无疑.

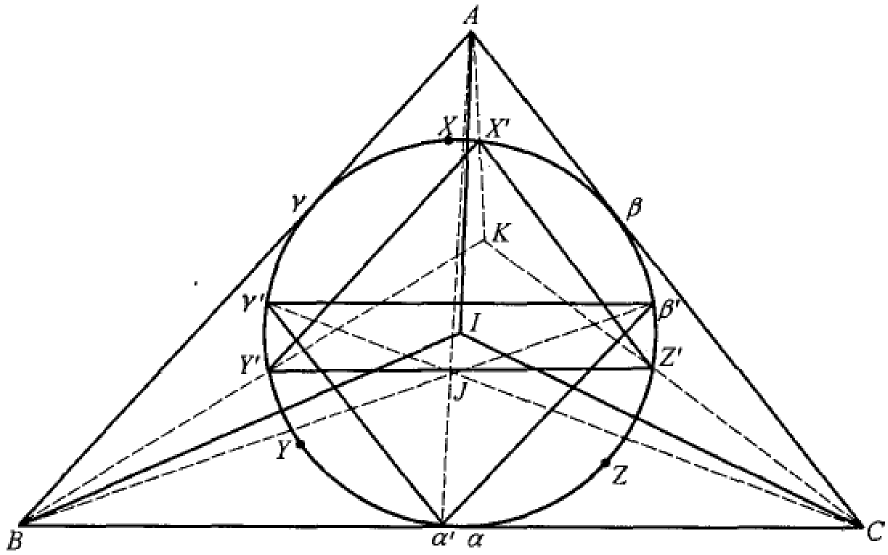


图 10

如图 10，设切圆 $\odot I$ 切 $\triangle ABC$ 的三边于 α,β,γ，令这三点各对于 AI,BI,CI 的反映点为 α',β',γ'，则它们显然同在切圆 $\odot I$ 上，此时

$$\widehat{\gamma'\alpha}=\widehat{\beta\gamma}=\widehat{\alpha\beta'}$$

因知 $$\beta'\gamma' /\!/ BC$$

同理 $$\gamma'\alpha' /\!/ CA,\ \alpha'\beta' /\!/ AB$$

故 $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ 与 $\triangle ABC$ 为位似形. 作切圆 $\odot I$ 的直径 $\alpha'X'$，$\beta'Y'$，$\gamma'Z'$，则 $\triangle X'Y'Z'$ 与 $\triangle ABC$ 亦显然为位似形. 又作切圆 $\odot I$ 的直径 $\alpha X,\beta Y,\gamma Z$，那么 X',Y',Z' 明明就为 X,Y,Z 各对于 AI,BI,CI 的反映点. 我们已知 $A\alpha,B\beta,C\gamma$ 相交于 $\triangle ABC$ 的热尔岗点，而 AX,BY,CZ 相交于纳格尔点(参阅 4 的证明)，所以 $A\alpha',B\beta'$，$C\gamma'$ 的交点 J 及 AX',BY',CZ' 的交点 K 就各是热尔岗点及纳格尔点的等角共轭点. J 及 K 既各为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ 及 $\triangle X'Y'Z'$ 的位似心，可见也就是 $\triangle ABC$ 的外接圆与切圆 $\odot I$ 的相切中心，这便已证明我们的定理了.

16 定理 三角形中，对应于同顶点的四个曼氏圆，同与对应于该顶点的七点圆相切.

证明 如图 11，在 $\triangle ABC$ 中，设将 $\overline{AB},\overline{AC}$ 倍增为 $\overline{A\beta},\overline{A\gamma}$，自 C,B 各作 AC，AB 的垂线令各交 AB,AC 于 E,F，则 β,γ,E,F 即为对应于 A 的七点圆上的点

(11).

以 A 为反演中心，p 为反演率而施行反演法，命 B，C 的反演点为 B'，C'，则直线 $B'C'$ 即为 $\odot ABC$ 的反演形. 因对应于 A 的四个曼氏圆同切于 AB，AC 及外接圆(14)；故反演后变为 $\triangle AB'C'$ 的四个切圆.

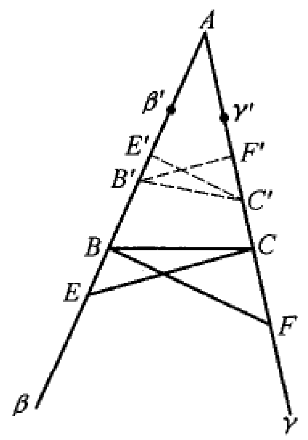


图 11

设 AB'，AC' 的中点为 β'，γ'，C'，B' 各至 AB'，AC' 的垂趾为 E'，F'，则 β'，γ'，E'，F' 即为 $\triangle AB'C'$ 的九点圆上的点. 今因

$$\overline{A\beta}\cdot\overline{A\beta'} = 2\,\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}\,\overline{AB'} = p$$

$$\overline{A\gamma}\cdot\overline{A\gamma'} = 2\,\overline{AC}\cdot\frac{1}{2}\,\overline{AC'} = p$$

及

$$\overline{AE}\cdot\overline{AE'} = \overline{AC}\cdot\overline{AC'} = p$$
$$\overline{AF}\cdot\overline{AF'} = \overline{AB}\cdot\overline{AB'} = p$$

故知对应于 A 的七点圆乃反演为 $\triangle AB'C'$ 的九点圆.

由此应用费氏定理(2b)而将反演法还原，即可证知本定理为真.

系　有一定顶点及一定切圆的动三角形，它的对应于定顶点的七点圆必常切于一定圆，也就是这动三角形的曼氏圆.

17 从上面最后的一系，我们可以引得一些特例，也很有趣：

a. **定理**　设 $\triangle ABC$ 的切圆 $\odot I$ 切 AC 于 Y，将 $\overline{AY}$ 倍增为 $\overline{A\gamma}$，命 IY 交 AB 于 E(图 12)，则 $\odot A\gamma E$ 与对应于 A 及切圆 $\odot I$ 的曼氏圆相切，余类推.

证明　设移动边 BC，使 B 合于 A，C 合于 Y，则由此看来，本定理实为 16 系的一种极限情形.

b. **定理**　设 $\triangle ABC$ 的对应于 A 的任一个曼氏圆 $\odot K$ 切 AC 于 C'，将 $\overline{AC'}$ 倍增为 $\overline{A\gamma}$，命 $\overline{KC'}$ 交 AB 于 E，则直线 γE 与 $\odot K$ 相切. 余类推.

证明　如图 13，设切圆 $\odot I$ 系与 $\odot K$ 对应的，则有(14)

$$\angle AIC' = \frac{1}{2}\pi$$

故自 C' 作 $\odot I$ 的另一切线 $C'J$ 必平行于 AB. 今移动边 BC，使它的位置和 JC' 相

合，那么，由此看来，本定理又为16系的另一种极限情形了.

注 在图12,13中，$\triangle EA\gamma$ 显然都是等腰三角形，由此也很易知 γE 和 $\odot I$ 或 $\odot K$ 相切的(因而由13可证a)；不过我们从上面的观点，更可看出七点圆和外接圆、切圆，曼氏圆之间，竟有这般的密切的关联.

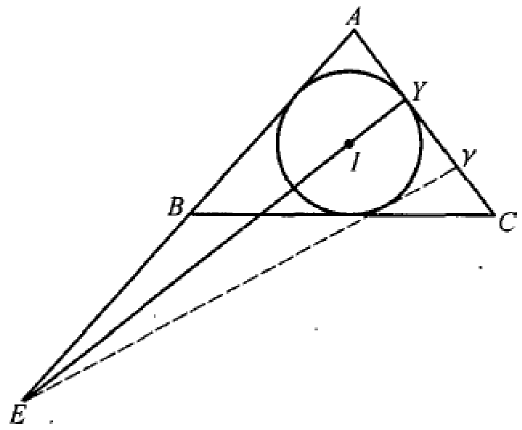


图 12

18 a 由上面的b定理，我们又引得：

定理 设 $\triangle ABC$ 的切圆 $\odot I$ 切 AC 于 Y，命 AY 的中点为 γ'，Y 至 AB 的垂趾为 E'，则 $\odot A\gamma'E'$ 与 $\odot I$ 相切，余类推.

证明 沿用图13，因

$$\overline{A\gamma}\cdot\overline{A\gamma'}=2\,\overline{AC'}\cdot\frac{1}{2}\,\overline{AY}=\overline{AI}^2$$

$$\overline{AE}\cdot\overline{AE'}=\overline{AC'}\cdot\overline{AY}=\overline{AI}^2$$

此乃表示直线 γE 与 $\odot A\gamma'E'$ 对于 $\odot A(AI)$ 互为反演形，故如定理所说.

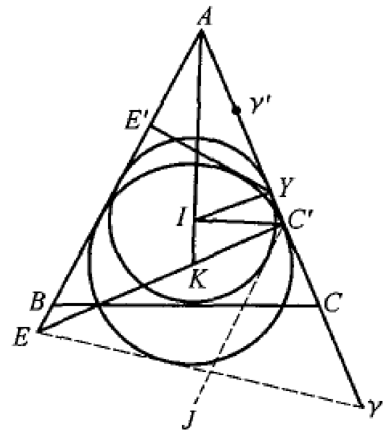


图 13

b. 在上定理中，设 $\angle A$ 为直角，则 E' 合于 A，此时 $\odot A\gamma'E'$ 即趋为以 $A\gamma'$ 做直径的圆.因此我们衍得：

定理 设分正方形每边为四等份，则以接近顶点的线段为直径作圆，凡八圆，都和该正方形的内切圆相切.

19 下面的定理，和上面b定理可说相互辉映成趣，所以顺便把它叙述于此：

定理 设分正六边形每边为四等份，则以接近每边中点的线段为直径作圆，凡12圆，都和该正六边形的外接圆相切.

证明 如图14，设 AB 为正六边形的一边，M 为它的中点，N 为 AM 的中点，P 为 MN 的中点，O 为外接圆的心，则有

$$OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} =$$
$$\sqrt{OA^2 - AM^2 + (\frac{1}{8}AB)^2} =$$
$$\sqrt{OA^2 - (\frac{1}{2}OA)^2 + (\frac{1}{8}OA)^2} =$$
$$\frac{7}{8}OA = OA - \frac{1}{8}OA = OA - PM$$

此式就是表示 ⊙MN 和外接圆 ⊙O 相切.

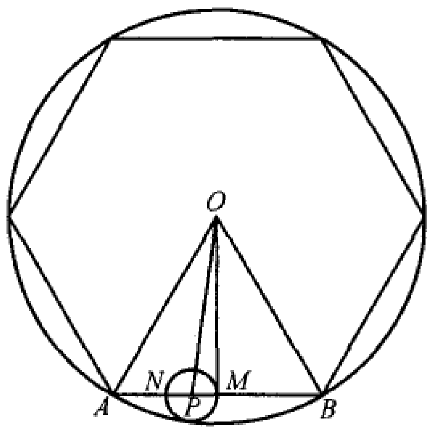


图 14

20 由于 13 中定理的启导,复推得一些颇有趣味的结果,让我们在下面逐一地来叙述它们.

定理　设 I 为 △ABC 的一等心,P 为外接圆上的动点,则:

(1) 切圆 ⊙I 对于 ⊙$P(PI)$ 的反演圆恒切于外接圆;

(2) ⊙$P(PI)$ 与外接圆的根轴恒切于切圆 ⊙I.

证明　(1) 利用 2a 定理,并参照 13 中定理的证明,即可推得.

(2) 以 ⊙$P(PI)$ 为反演基圆而施行反演法,则外接圆反演为一直线,由(1)知此直线必切于切圆 ⊙I;但此直线和 ⊙$P(PI)$ 及外接圆共轴,故即为它们的根轴.

21 上面定理的(1),又可以下面的方式来表现它:

定理　设 ⊙$I(r)$ 为 △ABC 的切圆,P 为外接圆上的一点,有一动点 K,适合

$$KI : KP = r : IP$$

的关系,则 K 的轨迹为与外接圆相切的一圆 k.

证明　如图 15,K 的轨迹为一圆 k(阿波罗尼奥斯定理),这是我们所熟知的,设 ⊙$P(PI)$ 交 ⊙$I(r)$ 于 X,Y,则这两点显然在圆 k 上.以 ⊙$P(PI)$ 为反演基圆而施行反演法,这样,圆 k 的反演圆 k' 必通过 X,Y.

其次,因 I 与 P 对于圆 k 互为反演点(阿波罗尼奥斯圆的性质),经过刚才所行的反演法后,点 I 不变,P 反演为无穷远点,故知 I 必为圆 k' 的心,于是圆 k' 实在就是 ⊙$I(r)$.到此就和上面定理的(1) 一致了.

20 又由 20 中定理的(2),衍得一个颇为精致的结果:

定理　设以定圆上的动点为心作圆,使常通过一定点,则所作圆与该定圆

的根轴：它的包形为另一定圆；而且可有无穷数的三角形，既外切（或旁切）于这定圆，又内接于原定圆.

证明 根据察氏定理(2a)，我们以定点为心，必可作得一个这样的圆：能使一三角形内接于定圆，而外切（或旁切）于这个所作圆.那么，这时的情况便和 20 定理的(2) 完全一样.

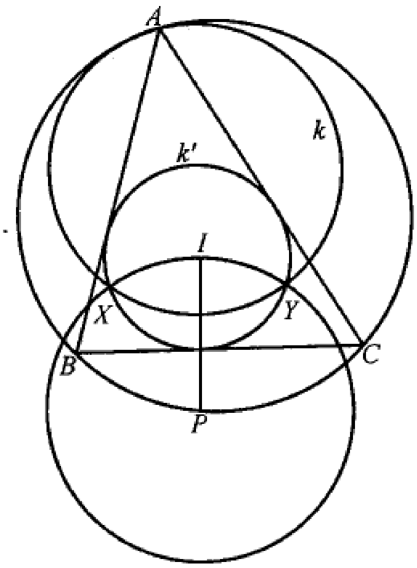


图 15

23 试推广上定理，可得一结论如下：

定理 设以定圆上的动点为心作圆，使常正交于他一定圆，则所作圆与前定圆的根轴，它的包形为另一定圆，此圆和后定圆同心.

证明 如图 16，设 ⊙O 及 ⊙I 均为定圆，A 为 ⊙O 上的定点，作 ⊙A 使正交于 ⊙I，命 ⊙A 与 ⊙O 的根轴为 a. 以 I 为心，作切于 a 的圆 k，则此圆为一定圆.

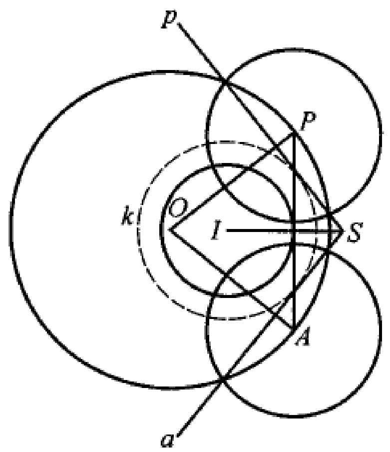


图 16

今 P 为 ⊙O 上的动点，作 ⊙P 使正交于 ⊙I，命 ⊙P 与 ⊙O 的根轴为 p，p 交 a 于 S. 因 I 及 S 对于 ⊙A 与 ⊙P 都有等幂，故 IS 即为它们的根轴. 这样，由垂直的关系，得

$$\measuredangle IS, a = \measuredangle PAO = -\measuredangle APO = -\measuredangle IS, p$$

此式乃系表示 p 为 a 对于 IS 的反映线. 因之，p 便常切于定圆 k.

24 本节将论述由通过三角形的等心的六条顶边线分所产生的六个圆的一些性质，并且因而推得一个其他的定理，让我们先来确立一些定义，因为这样可以使我们的叙事方便而且简洁.

定义 通过三角形的等心的顶边线段，特称为分角线段. 以分角线段为弦，且切于对边的圆，称为分角圆，凡得六圆，以同过一等心的分角线段为弦的，分别各有三圆，叫做相聚分角圆，凡得四组；而以该等心为心的切圆，即视为和各该组的圆对应.

分角圆有这样的简单性质，是很易知道的：

定理　三角形的六个分角圆与外接圆相切于顶点.

系　过同顶点的两个分角圆，以它们的连心线为直径作圆，必与对边相切，切点就是勒穆瓦纳线①和该边的交点.

在这里顺便证明一个预备定理，以便应用：

预备定理　设通过两圆的相似中心的动直线交两圆于四点，则两双应位点间的线分的乘积为一定值.

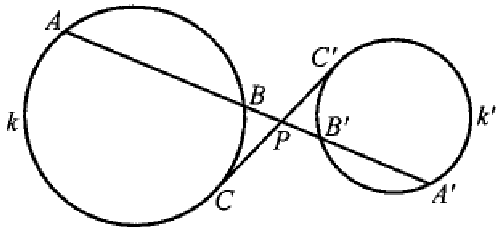


图 17

证明　如图 17，设 P 为圆 k 及圆 k' 的相似中心，过 P 的动直线 p 交两圆于 A,B 及 A',B'，令 A 与 A'，B 与 B' 为应位点，则 A 与 B'，B 与 A' 即为反位点. 今

$$\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}=(\overline{PA'}-\overline{PA})(\overline{PB'}-\overline{PB})=$$
$$\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}-\overline{PA}\cdot\overline{PB'}-\overline{PB}\cdot\overline{PA'}+\overline{PA}\cdot\overline{PB}$$

因其中 $\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}$ 及 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ 为 P 对于圆 k' 及圆 k 的幂都是定值，而 $\overline{PA}\cdot\overline{PB'}$ 及 $\overline{PB}\cdot\overline{PA'}$ 为 P 至两反位点间线分的乘积亦是定值，故上式左端为一定值乃是当然的.

若过 P 有两圆的公切线 CC'，则上述的定值实为

$$\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}=\overline{PC'}^2-2\,\overline{PC}\cdot\overline{PC'}+\overline{PC}^2=$$
$$(\overline{PC'}-\overline{PC})^2=\overline{CC'}^2$$

25 注意　因而圆有两个相似中心，故对于这个定理，应得两个定值.

定理　三角形每组的相聚分角圆及其对应的切圆各有一公切圆.

证明　如图 18，命 $\triangle ABC$ 的相聚分角圆为 k_1,k_2,k_3，依次各切对边于 X，Y，Z，而切圆 $\odot I$ 系和它们对应的. 今假定 I 为 $\triangle ABC$ 的内心来证明，至于其他的情形，只要把这证法稍加修饰，即可适用，故不再论.

设两圆 k_2,k_3 再交 BC 于 T'，T，则由 24 的定理知 B，C 为这两圆的反位点，故 B 与 T，T' 与 C 即为应位点，根据 24 的预备定理，便知这两圆的公切线为

$$\pm\, t_1=\sqrt{\overline{BT}\cdot\overline{T'C}}=\sqrt{\frac{\overline{BZ}^2}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{CY}^2}{\overline{BC}}}=\frac{\overline{BZ}\cdot\overline{CY}}{\overline{BC}}=$$

① 自三角形的顶点作外接圆的切线和对边相交，这三交点共线，称为勒穆瓦纳线(Lemoine line).

$$\frac{-\frac{ca}{a+b}\cdot\frac{ab}{c+a}}{a}=-\frac{abc}{(c+a)(a+b)}$$

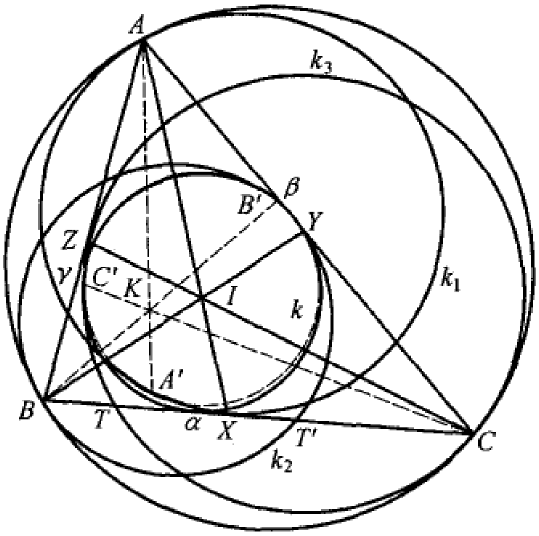


图 18

式中的 a,b,c 乃系代表 $\triangle ABC$ 的三边. 其次,命内切圆 $\odot I$ 与三边的切点为 α, β,γ,并以 s 表 $\triangle ABC$ 的半周,则 $\odot I$ 与圆 k_1 的公切线为

$$t'_1=\overline{\alpha X}=\overline{BX}-\overline{B\alpha}=\frac{ca}{b+c}-(s-b)=\frac{(s-a)(b-c)}{b+c}$$

故得

$$\pm t_1t'_1=-\frac{abc(s-a)(b-c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

一如上法,命圆 k_3 与圆 k_1,$\odot k_1$ 与圆 k_2,$\odot I$ 与圆 k_2,$\odot I$ 与圆 k_3 的公切线为 $\pm t_2$, $\pm t_3$, t'_2, t'_3,则亦得

$$\pm t_2t'_2=-\frac{abc(s-b)(c-a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$\pm t_3t'_3=-\frac{abc(s-c)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

故

$$\pm t_1t'_1\pm t_2t'_2\pm t_3t'_3=-\frac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$
$$\{(s-a)(b-c)+(s-b)(c-a)+(s-c)(a-b)\}=0$$

由此根据凯西定理(2c),便知四圆 I,k_1,k_2,k_3 有一公切圆 k 了.

26 上述的圆 k,在理论上已证知它的存在了,但它的位置如何呢?这可以

由下面的定理来决定：

定理　命三圆 k_1,k_2,k_3 的根心为 K，设 AK,BK,CK 各依次再交该三圆于 A',B',C'，则 $\odot A'B'C'$ 即为圆 k.

证明　今仍假定 I 为 $\triangle ABC$ 的内心而考证这个定理. 此时因 X,Y,Z 三点都在 $\odot ABC$ 之内，故三圆 k_1,k_2,k_3 亦必都在 $\odot ABC$ 之内，可见 $\odot ABC$ 与三圆 k_1,k_2,k_3 都是内切，亦即 $\odot ABC$ 与三圆 k_1,k_2,k_3 的切向相同.

设以三圆 k_1,k_2,k_3 的根圆 $\odot K$ 为反演基圆而施行反演法，则 k_1,k_2,k_3 不变，而 A,B,C 的反演点即为 A',B',C'，故 $\odot A'B'C'$ 同切于三圆 k_1,k_2,k_3.

已知 B,C 为两圆 k_2,k_3 的反位点，而 B,C,B',C' 四点共圆，可见 B 与 C，B' 与 C' 必为关于同一相似中心的反位点. 因 $\odot ABC$ 与 k_2,k_3 的切向相同，故 BC 通过 k_2,k_3 的相似外心，从而 $B'C'$ 也通过此相似外心. 同理，亦知 $C'A'$ 通过 k_3,k_1 的相似外心，$A'B'$ 通过 k_1,k_2 的相似外心. 由此看来，我们便立即知道 $\odot A'B'C'$ 与三圆 k_1,k_2,k_3 的切向是相同的.

由上所述，可知 t_1,t_2,t_3 乃系三圆 k_1,k_2,k_3 两两的外公切线，这样，准凯西定理的规定(2c)，圆 k 一定和三圆 k_1,k_2,k_3 有同切向.

三圆的公切圆中最多能有两圆系和原三圆有同切向的，那么圆 k 将非为 $\odot ABC$ 即为 $\odot A'B'C'$ 了，但它非为 $\odot ABC$ 已很显明，故必为 $\odot A'B'C'$ 无疑.

当 I 为 $\triangle ABC$ 的旁心时，仍可仿此来证明它，不再赘述.

系 1　$\odot ABC$ 与 $\odot k$ 对于 $\odot K$ 互为反演圆，因之三者共轴.

系 2　三圆 $\odot KB'C',\odot KC'A',\odot KA'B'$ 依次各与 k_1,k_2,k_3 相切，且与 $\odot ABC$ 有一公切圆.

证明　同上施行反演法，很易证明.

27 下面的定理，似乎与等心无关，但它却可以由 §25 的定理推得：

定理　设自三角形的顶点作直线通过外心而与对边相交，以各交点为心并通过对顶点作圆，则这三圆与外重圆有一公切圆.

证明　如图 19，设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，外重三角形为 $\triangle \alpha\beta\gamma$，联结 AO,BO，CO 各交对边于 P,Q,R，则现在所要证明的乃系四圆 $\odot P(PA),\odot Q(QB)$，$\odot R(RC),\odot \alpha\beta\gamma$ 有一公切圆.

命 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，则由 6 的系知三圆 $\odot P(PA),\odot Q(QB),\odot R(RC)$ 依次各与三圆 $\odot HBC,\odot HCA,\odot HAB$ 相切，它们的切点乃为 $\triangle ABC$ 的顶点各对于对边的反映点 L,M,N.

令 AH,BH,CH 再交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A',B',C'，则 H 显为 $\triangle A'B'C'$ 的

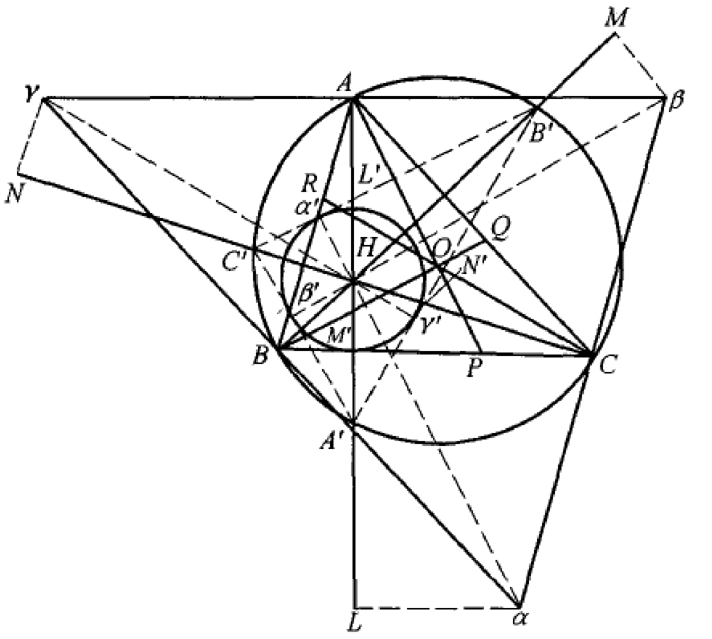


图 19

等心,今

$$AO \,/\!/\, \alpha H, BO \,/\!/\, \beta H, CO \,/\!/\, \gamma H$$

而

$$AO \perp B'C', BO \perp C'A', CO \perp A'B'$$

故

$$\alpha H \perp B'C', \beta H \perp C'A', \gamma H \perp A'B'$$

命后三者的垂趾为 α', β', γ',则 $\odot \alpha'\beta'\gamma'$ 即为 $\triangle A'B'C'$ 的切圆 $\odot H$.

由共圆点的关系,得

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{H\beta} \cdot \overline{H\beta'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'} = \overline{H\alpha} \cdot \overline{H\alpha'} =$$
$$\overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{H\gamma} \cdot \overline{H\gamma'} = k$$

若以 H 为反演中心,k 为反演率而施反演法,则三圆 $\odot HBC$,$\odot HCA$,$\odot HAB$ 反演为三直线 $B'C'$,$C'A'$,$A'B'$;因之,HA 与 $B'C'$,HB 与 $C'A'$,HC 与 $A'B'$ 的交点 L',M',N' 即为 L,M,N 的反演点;由此可知三圆 $\odot P(PA)$,$\odot Q(QB)$,$\odot R(RC)$ 必各反演为 $\triangle A'B'C'$ 对应于 H 的相聚分角圆,到此应用 25 的定理便可证明了.

28 最后我们将讨论六个圆(它们系以三角形各边所对外接圆的弧的中点为心的)的性质,它们除共同具有一种特性外,并可三三分为八组,每组又都有它们的特性,由此可见几何图形组织的复杂和关系的微妙的一斑.

a. **定理**　在$\triangle\alpha\beta\gamma$中，$A,B,C$为某切圆与三边的切点，设$I$为$\triangle ABC$的等心，联结$AI,BI,CI$各再交$\odot ABC$于$L,M,N$，则这三点各为$\triangle\alpha BC$，$\triangle\beta CA$，$\triangle\gamma AB$的一等心.

证明　如图20，因L为$\overset{\frown}{BC}$（劣弧或优弧）的中点，故有

$$\measuredangle \alpha BL = \measuredangle BCL = -\measuredangle CBL$$

及

$$\measuredangle \alpha CL = \measuredangle CBL = -\measuredangle BCL$$

由此可知L为$\triangle\alpha BC$的等心.

其余仿此.

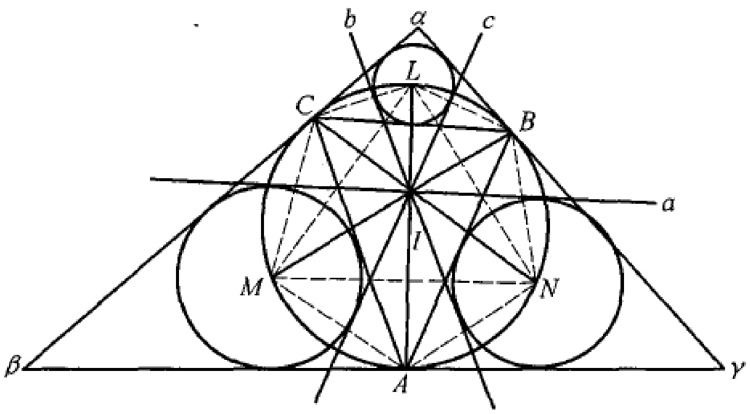


图 20

b. **定理**　作出$\triangle\alpha BC$，$\triangle\beta CA$，$\triangle\gamma AB$的切圆$\odot L$，$\odot M$，$\odot N$，再作它们两两的公切线a,b,c（和$\triangle\alpha\beta\gamma$的三边系同态的），则这三线必交于点$I$.

证明　我们很易知道I为$\triangle LMN$的垂心，因而A,B,C即为I对于$\triangle LMN$三边的反映点，由此依对称的关系，则a,b,c曾于I是很显明的.

c. 现在我们以$\triangle ABC$为基准来考察a,b,c和它的三边的关系，因a与$\beta\gamma$，I与A关于MN互相对称，故有

$$\measuredangle AI,a = \measuredangle \beta\gamma,AI = \measuredangle \beta AL = \measuredangle ABL = \measuredangle ABC + \measuredangle CBL = \\ \measuredangle ALC + \measuredangle LCB = \measuredangle AI,BC$$

可见

$$a \parallel BC$$

同理

$$b \parallel CA,\ c \parallel AB$$

从这里来仔细地观察，当我们把I逐次取完$\triangle ABC$的四个等心的位置时，那么

我们便不难推得这样的定理：

定理 过三角形各等心引各边的平行线，凡12线；自各顶点作外接圆的切线，凡三线；连三角形的三边合计18线. 这18线必七七相切于六圆，它们的心同在三角形的外接圆上，且为各边所对弧的中点.

29 定理 在上述的六圆中，选择三个如$\odot L$，$\odot M$，$\odot N$，使AL，BM，CN相交于$\triangle ABC$的等心I，则此三圆和切圆$\odot I$必有一公切圆，这样的配合共有四组.

证明 如图21，根据28c的定理，我们知道过I而平行于BC的直线必切$\odot M$及$\odot N$于M'及N'，于是MM'，NN'都垂直于BC，命它们的垂趾为M_1，N_1. 设在BI，CI上的他一等心为I_2，I_3，作I，I_2，I_3至BC上的垂趾α，α_2，α_3，则因M，N各为II_2，II_3的中点，故M_1，N_1亦各为$\alpha\alpha_2$，$\alpha\alpha_3$的中点.

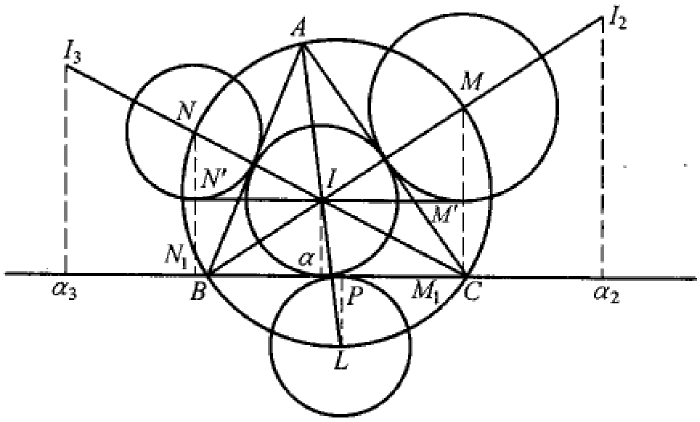


图21

现在假定I为$\triangle ABC$的内心，则I_2，I_3即为对着B，C的旁心，那么下面二式是我们最熟悉的(以下用a，b，c代表$\triangle ABC$的三边，s代表半周)

$$\overline{\alpha_3\alpha} = c, \overline{\alpha\alpha_2} = b$$

设令$\odot M$与$\odot N$的公切线为l，则有

$$l = \overline{M'N'} = \overline{M_1N_1} = \overline{M_1\alpha} + \overline{\alpha N_1} = \frac{1}{2}(\overline{\alpha_2\alpha} + \overline{\alpha\alpha_3}) = -\frac{1}{2}(b + c)$$

再设$\odot L$与BC的切点为P，则P为BC的中点，于是$\odot I$与$\odot L$的公切线为

$$l' = \overline{\alpha P} = \overline{BP} - \overline{B\alpha} = \frac{1}{2}a - (s - b) = \frac{1}{2}(b - c)$$

故得
$$ll' = -\frac{1}{4}(b^2 - c^2)$$

一如上法，命$\odot N$与$\odot L$，$\odot L$与$\odot M$，$\odot I$与$\odot M$，$\odot I$与$\odot N$的公切线为m，

n, m', n',则亦得

$$mm' = -\frac{1}{4}(c^2 - a^2), nn' = -\frac{1}{4}(a^2 - b^2)$$

由此显然知

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

于是依凯西定理(2c),便得证明四圆 $\odot I, \odot L, \odot M, \odot N$ 有一公切圆.

当 I 为 $\triangle ABC$ 的旁心时,亦可同样的来证明.

30 定理　又在上述的六圆中,选择三个如 $\odot L, \odot M, \odot N$,使 AL, BM, CN 两两相交于 $\triangle ABC$ 的等心 I_1, I_2, I_3,命第四个等心为 I,则此三圆和切圆 $\odot I$ 亦必有一公切圆,这样的配合也共有四组.

证明　如图 22,同样根据 28c 的定理,我们知道过 I_1 而平行于 BC 的直线必切 $\odot M$ 及 $\odot N$ 于 M' 及 N',其余的记号都仿照图 21.

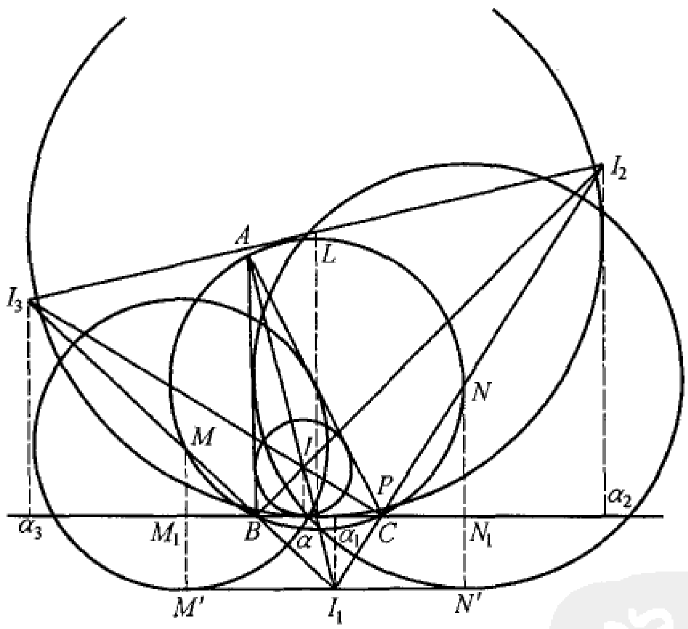


图 22

现在假定 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,则

$$\overline{\alpha_3\alpha_1} = b, \overline{\alpha_1\alpha_2} = c$$

由此 $\odot M$ 与 $\odot N$ 的公切线为

$$l = \overline{M'N'} = \overline{M_1N_1} = \overline{M_1\alpha_1} + \overline{\alpha_1N_1} =$$

$$\frac{1}{2}(\overline{\alpha_3\alpha_1} + \overline{\alpha_1\alpha_2}) = \frac{1}{2}(b + c)$$

又 $\odot I$ 与 $\odot L$ 的公切线为

$$l' = \overline{\alpha P} = \frac{1}{2}(b - c)$$

故得

$$ll' = \frac{1}{4}(b^2 - c^2)$$

同上证，亦得

$$mm' = \frac{1}{4}(c^2 - a^2), nn' = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$$

于是

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

这样便得证了.

当 I 为 $\triangle ABC$ 的旁心时，亦一样可以证明.

注意 以上两定理，利用在 $\triangle ABC$ 各顶点所作外接圆的切线，由 28c 定理仍可证明.

在 29 的定理中，所得的公切圆和切圆 $\odot I$ 的切点，实在就是费氏切点，而且它的心又为 I 和九点圆心的连线的中点，可见这个公切圆的半径乃系等于九点圆和切圆的半径的半和半差的. 不过在这里想要加以证明，倒很麻烦，但我们若用另一观点来看它，那就简易得多. 由于采取另一观点，因之，不仅 29 的定理，连 30 的定理也同样得到推广，而且二者居然合流，同把费氏定理包容于其中. 这种图象，说来话长，为省篇幅，姑且不提.

以上关于等心的性质，都是就一个三角形而研究的，倘若把它扩张到几个三角形上去，那么它的图象将更复杂，内容将更丰富，这是当然的. 例如：

夫尔曼(Fuhrmann)定理 圆上四点所成四个三角形的等心凡十六点四四共线，得两组互相垂直的平行线，每组含四线.

施泰纳(Steiner)定理 四直线所成四个三角形的等心凡十六点四四共圆，得两组互相正交的共轴圆，每组含四圆.

前者的证明并不太难，而后者施泰纳只有叙述而无证明，这令后来的学者曾煞费过一番苦心. 这两个定理，在表面看来似乎没有什么关系，但经过推演后，竟然也发生瓜葛，并因此获得后者的更进一步的推广，其结果的美妙，实不亚于新颖的布罗卡尔图象(Brocard configuration).

总之，由此足见"等心" 这个宝库的宝物，实可说是无边尽藏的，大家如感兴趣，何妨去发掘发掘呢！

附录四　帕波斯定理的推广[①]

本文所述的定理的推广方式及 §4(1), §4(4), §5(1), §5(3) 各定理都是北京师范大学故教授汤璪真先生生前所示的. 汤故教授对于 §4(4), §5(3) 两定理的证明, 乃系利用一种他所称为(一,二) 射影的方法而得, 并因此引出 §4(1), §5(1) 两个定理来. 但他认为这两个所引得的定理, 系属于初等几何的范围, 应该另给它们独立的证明, 因此他便嘱笔者为它们设计一种初等的证法. 经过一番思考、研究之后, 笔者乃获得 §4(1) 定理的如本文所述的证明方法. 虽然这个方法也约略涉及射影几何的一些知识, 但与初等几何相距尚不过远. 至于 §5(1) 定理的证明和证 §4(1) 定理所需的原理当然是一样的, 为了节省篇幅, 留待读者自己去思索, 倘读者有能够纯用初等几何的方法去证明这两个定理的, 那是更好的事, 笔者极愿请教.

汤故教授所称的(一,二) 射影究竟是什么样的一种方法, 可惜得很, 笔者没有问得详细, 只记得他曾告诉笔者: 先把平面上的图形依某中心射影到空间的一个二次曲面(例如球面) 上, 再用另一个中心射影回平面来, 这样平面上一点便会产生两个对应点, 因此他称它为(一,二) 射影, 他说这个方法很新鲜, 能够把很多定理推广为更广泛的定理; 但他想先把这个方法的基本原则、关系、互换公式等建立好了, 然后再发表出来和大家研究; 因为研究得尚未十分成熟, 所以还不到发表的时候. 为了这个缘故, 对于 §4(4), §5(3) 两定理的证明, 他到底是怎样运用这个(一,二) 射影方法而得的, 惭愧得很, 笔者实在毫无所知. 他只曾把这两个定理记在一张小小的硬纸片上交给笔者, 这张硬纸片目下已找不着, 尚幸笔者当时把它们抄录下来(经过几次抄写, 文字已有变更, 但内容未变), 得以保存, 现在只好把它们照样录出, 料想它们缺乏证明, 必然要引起大家的怀疑; 究竟它们是定理与否(因此特注上 * 号, 以示区别), 让大家去判断吧. 同时他这个(一,二) 射影方法, 若有人认为有研究的价值, 继续去研究, 完成他未竟的工作, 则更是一件极好的事情了.

本文前后共改写了几次, 每次都系遵照汤故教授的指示而修正重写的. 可惜后来的一次, 他未及寓目, 不料竟与世长辞, 真是万分遗憾. 现在, 笔者谨用本文(当然又经过一些补充) 来表示哀悼之忱, 并留作永久的纪念.

本文原系着重在寻求 §4(1) 定理的证法, 但因为叙述的方便, 还乘机推论

---

① 原载于《数学通报》(1955 年 7 月).

一些射影几何的东西.同时在求证的过程中,不意另得帕斯卡定理等类似的推广,这可说是意外的收获,也顺便写在一起.

§1　帕波斯定理

(1) 约公元第三世纪的时候,帕波斯(Pappus)获得一个所谓巧合形的定理,普通称它做帕波斯定理:

"设一六边形的顶点相间分配在两直线上,则它的三对对边的交点必定共线".如要具体表示出来,也可以说是(图1):

"设 A_1,B_1,C_1 及 A_2,B_2,C_2 各为共线点,则 B_1C_2 与 B_2C_1,C_1A_2 与 C_2A_1,A_1B_2 与 A_2B_1 的交点 A_3,B_3,C_3 共线".

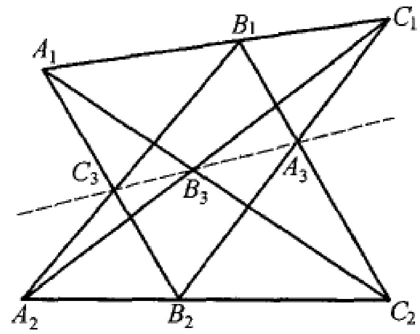


图 1

用射影几何的方法,是很容易证明这个定理的;若用初等几何的方法,则比较麻烦,但亦不太艰难,现在假定读者已经知道,不再去论证了.

(2) 上定理中的两直线 $A_1B_1C_1$ 与 $A_2B_2C_2$,可以看做是一个锥线的变态,凡学过射影几何的都会知道有这种看法.因此,当我们把六边形 $B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ 看成内接于一个锥线时,那么这时便成为所谓神秘的六边形定理,一般称它做帕斯卡定理.

"设一六边形内接于一个锥线,则它的三对对边的交点必定共线".

这个定理是帕斯卡(Pascal)于1639年所发现的,帕波斯定理算为它的一个特例.

像这样由帕波斯定理衍得帕斯卡定理,当然可以说是一种推广.现在本文所述的与这不同,另是一种推广方式:先把直线看做是圆的一种特殊形状而推广它,然后再将它射影成为锥线的图象.因为要经过这些手续,所以我们要先略述共幂圆系、对合等的概念,并假定读者对于反演变换及射影变换已略有所知,然后才进而论证此种推广的定理.

§2　共幂圆系

(1) 设过一定点作一动直线与一定圆相交,则自定点至两交点的两个有向

线段的积是一个常数.这是初等几何中大家已熟知的定理.那个常数的值,我们称它做定点对于定圆的幂;它的平方根叫做幂根,因为幂的值可为正、负或零,所以幂根的值随着为实、虚或零,当定点在定圆的外部时,它的幂根可以用定点至定圆的切线长来表示;在圆内时,可以用过定点的极小弦的半长乘以$\sqrt{-1}$来表示;若在圆上,幂根的值便为零了.

上面的定义,乃系对于通常的实圆而说的,为着避免牵扯,关于虚圆的说法,我们不必去谈(虽然后面也有提及虚圆的,不过只是略一提及,不去探究).以后有些地方,万一涉及虚圆的,那就用另一方式去代替说明.除虚圆外,圆还有他种变形,譬如,半径无穷增大而变为直线,半径无穷减小而变为点.为着使我们的定义含义丰富,对于这些广义的圆——直线、无穷远线及零圆(点)——来说,共意义仍须加以修饰一下,也可以说是规定一下;这样对于我们以后的叙述才不会受到它们的掣肘,并且还可以使意义普遍化.

① 定圆为直线,我们先这样设想:令 P 为定点,自 P 作一直线 k 通过 $\odot O$ 的中心而交 $\odot O$ 于 A,B,则 P 对于 $\odot O$ 的幂为

$$p = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

而后固定点 A,使 $\odot O$ 的半径渐渐增大,即点 O 在 k 上渐趋于无穷远,那么 $\odot O$ 的极限状态就要变成直线 l 的形状,而 B 在 k 上也趋至无穷远的位置,这时 $\overline{PB}$ 的值便变成无穷大.这就是说,直线外的任何点对于这直线的幂是无穷大①.

若 P 在 l 上,即 P 和 A 相合,那么 $\overline{PA}=0$,这时我们自然要把 p 看做不定值.这样一来,当直线和圆混杂在一起而组成某某类的时候,我们就可以把直线上的点对于直线的幂看成与对于圆的幂有某种的关系(例如相等)了.这种看法在下款我们就要用到,希望读者记着.

② 定圆为无穷远线,无论定点是通常的点或无穷远点,一律规定它对于无穷远线的幂是无穷大.

③ 定圆为零圆(点),这时定点对于零圆的幂,就用它们间的距离的平方来表示.

我们有了这些概念,直线、无穷远线、零圆和通常的圆在某种条件下的关联便可以建立起来了.

(2) 平面上两个不同的圆,假设一个动点对于它们的幂是相等的,那么这个动点的轨迹是一条直线,这条直线就叫做那两个圆的等幂轴.这在初等几何中,大家一定很熟悉的了.这种特性,无论两个圆是通常的圆抑其中有一或全是

① 请注意,无穷大并不是一个固定值.

零圆,都可以适合.但若其中有一或全是直线(或有一是无穷远线)的话,那我们仍须规定一下:

① 一圆(或零圆)和一直线(或无穷远线)的等幂轴就是那直线(或无穷远线)的本身.

② 两直线(或有一是无穷远线)的等幂轴是通过它们的交点的任一直线(不定).

有了这个规定之后,那我们以后凡说圆的,都可以同时包括通常的圆、零圆、直线和无穷远线,不再另加说明了;但有时为了使得更加明了,也不妨特别指明.

平面上许多圆,倘若它们之间两两的等幂轴都相合为一,那么这许多圆所组成这样的一群,我们就称它做共轴圆系.这个共轴圆系的等幂轴,亦应当包括在里面而为系中的一员.由此我们可以知道,平面上两个不同的圆,必定完全确定一个唯一的共轴圆系.

平面上有三个不同的圆,假定它们不属于同一的共轴圆系,那么它们便两两确定三个不同的共轴圆系.这三个共轴圆系的等幂轴,我们很容易知道一般都是同交于一点,只三个圆全为直线时是例外,这个点我们就称它做那三个圆(因而也是那三个共轴圆系的全体)的等幂心;至于三条直线的等幂心我们当然认为是个不定点.

现在平面上有许多圆,它们不属于同一的共轴圆系,倘若它们之间三三的等幂心都相合为一,那么这许多圆所组成这样的一群,我们就称它做共幂圆系.通常地说,这个共幂圆系的等幂心对于每圆的幂必定彼此相等;所以我们以等幂心为圆心,等幂心对于各圆的幂根为半径,必定作得一个唯一的圆.这个圆我们叫它做这个共幂圆系的等幂圆.再进一步说,因为幂根的值可以为实、为虚、为无穷大或为零,所以等幂圆就有实圆、虚圆、直线(或无穷远线)或零圆等的区别.显然,当等幂圆是实圆或直线的时候,它一定同时正交于系中的每一圆,即是它恰为系中各圆的唯一公共正交圆.

为着易于掌握共幂圆系的性质,我们要把它分成下面的几类,如此逐类去研究,那就比较容易明了了.分类的着眼点,要从等幂圆来入手:

第一类,等幂圆为实圆,这时等幂心在系中各通常圆的外部.此类包括通常圆(圆心在等幂圆外)、零圆(等幂圆上的点)及通过等幂心的直线.也就是凡正交于一定实圆的圆,便组成第一类的共幂圆系.

第二类,等幂圆为虚圆,这时等幂心在系中各通常圆的内部.此类包括通常圆及通过等幂心的直线.设过等幂心作各圆的极小弦,则易知所得各弦都等长

而且有一个共同中点(即等幂心),故以各弦为直径可作得一个唯一的圆.因此,这类共幂圆系我们也可以说是径交[1]于一定实圆的那些圆.

第三类,等幂圆为直线,这时等幂心为此线的垂线上的无穷远点.此类包括通常的圆(圆心在等幂圆上)、零圆(等幂圆上的点)、垂直于等幂圆的直线及无穷远线.亦即凡正交于一定直线的圆,便组成第三类的共幂圆系.

第四类,等幂圆为零圆,这时等幂心就是等幂圆,它必定同时在系中各圆的上面.故此类共幂圆系亦即共点的一群圆,包括通常的圆、一零圆(即等幂心)及通过等幂心的直线.

第五类,等幂圆为无穷远线,这时凡是直线及该无穷远线的本身都属于此类共幂圆系.这类对于上面的几类来说,其中有一个特异的地方:把无穷远线看做圆,圆心就不是一个固定的点,所以这类共幂圆系的等幂心应当是个不定点,因而把前几类等幂心的唯一性的特征消失掉了.

(3) 共幂圆系经反演变换后,仍为共幂圆系,这在第一,第三,第四,第五四类来看,是很容易知道的,因为正交圆和共点圆[2]这种属性乃是反演不变的性质的缘故.但对于第二类共幂圆系是否也是如此呢?为要证实它一样具有这种特性,我们可以这样设计:假定取一点 O 为反演中心,设 P 为等幂心,P 对于系中各圆的幂为 p,而在 OP 上取一点 Q,仅适合

$$\overline{PQ}\cdot\overline{PO}=p$$

那么通过 O,Q 的一群圆便组成一个共轴圆系,这系中的每一圆显然都属于原来的共幂圆系,而且在后者中任取两圆,则在前者中必有一圆与之共轴.经过反演之后,上述的那个共轴圆系的各圆便都变成共点的直线,而原共幂圆系各圆的反演圆中每两圆的等幂轴也就不出于这些直线.于是我们的目的达到了,现在把各类共幂圆系相互间的反演变换情形列下:

① 第一类经反演后,类别通常不变;但若以等幂圆上的点为反演中心,则反演为第三类.

② 第二类经反演后,类别不变.

③ 第三类经反演后,通常变为第一类;但若以等幂圆上的点为反演中心,则类别不变.

④ 第四类经反演后,类别通常不变;但若以等幂心为反演中心,则反演为第五类.

① 即一圆交他圆于后者的一直径之两端的意思.

② 用反演变换的眼光来看,一切直线都可视为共点圆.

⑤ 第五类经反演后,通常变为第四类;但若反演基圆为直线(此时等于施行线反射),则类别不变.

§3 对 合

(1) 假设同台的甲乙两个点列($ABC\cdots$)和($A'B'C'\cdots$)有射影对应的关系,且当把 A' 看做甲点列中的点时,A 即为乙点列中和 A' 相对应的点;那么,其他各对对应的点就全都可以像这样彼此交换.这在射影几何中是已证明了的事实.此时特称甲乙两点列构成一个对合,或称点列(AA', BB', CC', $\cdots$)为一对合点列.

对合的定义,亦有这样下的:设($OAA'BB'CC'\cdots$)为一点列,而有

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}=\overline{OC}\cdot\overline{OC'}=\cdots=k$$

为一常数,则(AA', BB', CC', $\cdots$)即为对合点列.

在对合点列中,可以交换的对应点如 A 与 A', B 与 B', C 与 C', $\cdots$ 都称为点耦,而如上述的点 O 称为对合中心,k 称为对合常数.

上述两种定义,前者比较广泛,它可以包括后者.今由第一种定义,我们马上引得下面的一个定理:

定理 点列(AA', BB', CC')成对合的必要且充分之条件为

$$(AA'BC)\,\overline{\wedge}\,(A'AB'C')$$

(2) 设一线束为任一直线所截能成对合点列者,则称为对合线束.对合线束亦有和上面相类似的定理.

定理 线束(aa', bb', cc')成对合的必要且充分之条件为

$$(aa'bc)\,\overline{\wedge}\,(a'ab'c')$$

(3)① **定理** 设过定点 P 作一圆的诸弦 AA', BB', CC', $\cdots$,命 X 为圆上的任一点,则 $X(AA', BB', CC', \cdots)$ 为对合线束.

证明 设 BC' 交 AA' 于 O(图 2),

$$X(AA'BC)\,\overline{\wedge}\,C'(AA'BC)\,\overline{\wedge}\,(AA'QP)\,\overline{\wedge}$$
$$B(AA'C'B')\,\overline{\wedge}$$
$$X(AA'C'B')\,\overline{\wedge}$$
$$X(A'AB'C')$$

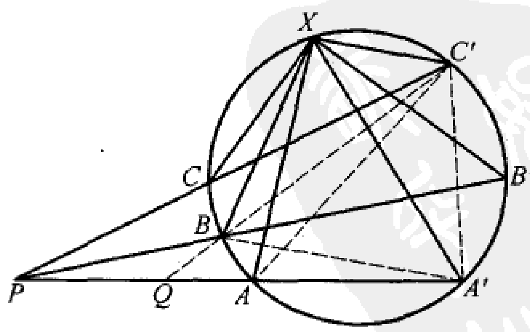


图 2

故知 $X(AA', BB', CC')$ 为对合线束

((2)).

因为只需有两对线耦即足决定一个对合线束,所以上面的证明已可代表全面了.

② **定理**　逆之,设 $XA,XA',XB,XB',XC,XC',\cdots$ 同为一圆的弦,且 $X(AA',BB',CC',\cdots)$ 为对合线束,则 $AA',BB',CC',\cdots$ 必共一点 P.

证明　命 AA' 与 BB' 的交点为 P,联结 $PC,\cdots$ 设再交圆于 $C_1,\cdots$,则准(3)① 知 $X(AA',BB',CC',\cdots)$ 为对合线束. 这样一来, 由题设, 即可知道 $XC_1,\cdots$ 必与 $XC',\cdots$ 相合,亦即 $C_1,\cdots$,与 $C',\cdots$ 相合,故 $CC',\cdots$ 都同通过点 P.

(4)① **定理**　以对合点列每双点耦间的线段为直径所作的诸圆必为共轴圆系.

定理　对合点列的对合中心对于所作诸圆的幂显然都等于对合常数.从这点来看,则定理是很了然的.若对合中心一旦变为无穷远点,那么所作诸圆便是一组同心圆.

② **定理**　任一直线截一共轴圆系中的诸圆必得对合点列.

证明　这个共轴圆系的等幂轴与该直线的交点对于诸圆显然有等幂,由此依据 §3(1) 的第二种对合定义便十分明白,倘交点是无穷远点,则截得各弦有一共同中点.

(5) **定理**　在点列$(A_1A_2B_1B_2C_1C_2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2)$中,设有两 双点 M_1,N_1 及 M_2,N_2,能使

$$(A_1\beta_1,A_2\gamma_2,M_1N_1)$$

$$(B_1\gamma_1,B_2\alpha_2,M_1N_1),(C_1\alpha_1,C_2\beta_2,M_1N_1)$$

及

$$(\alpha_2B_2,\alpha_1C_1,M_2N_2)$$

$$(\beta_2C_2,\beta_1A_1,M_2N_2),(\gamma_2A_2,\gamma_1B_1,M_2N_2)$$

都成对合;则必有一双点 P,Q(实、虚或重合),也能使

$$(B_1\gamma_1,\beta_2C_2,PQ)$$

$$(C_1\alpha_1,\gamma_2A_2,PQ),(A_1\beta_1,\alpha_2B_2,PQ)$$

都成对合.

证明　设以点列的台外一点 O 为反演中心而施行反演变换,则该点列即反演为共圆的诸点,且点 O 亦在此圆上.为简单起见,今仍用原字母以记诸反演点(图 3),由题设,知

$$O(A_1\beta_1,A_2\gamma_2,M_1N_1)$$

$O(B_1\gamma_1, B_2\alpha_2, M_1N_1)$

$O(O_1\alpha_1, C_2\beta_2, M_1N_1)$

又

$O(\alpha_2B_2, \alpha_1C_1, M_2N_2)$

$O(\beta_2C_2, \beta_1A_1, M_2N_2)$

$O(\gamma_2A_2, \gamma_1\beta_1, M_2N_2)$

都为对合线束(3(2)),故 $A_1\beta_1$ 与 $A_2\gamma_2$, $B_1\gamma_1$ 与 $B_2\alpha_2$, $C_1\alpha_1$ 与 $C_2\beta_2$ 的交点 X_1, Y_1, Z_1 同在 M_1N_1 上,及 α_2B_2 与 α_1C_1, β_2C_2 与 β_1A_1, γ_2A_2 与 γ_1B_1 的交点 X_2, Y_2, Z_2 同在 M_2N_2 上(§3(3)②).因此可见 $B_1\gamma_1$ 与 β_2C_2, $C_1\alpha_1$ 与 γ_2A_2, $A_1\beta_1$ 与 α_2B_2 的交点 X_3, Y_3, Z_3,共线(§1(1)),命直线 $X_3Y_3Z_3$ 交圆于 P, Q(实点、虚点或重合点),则

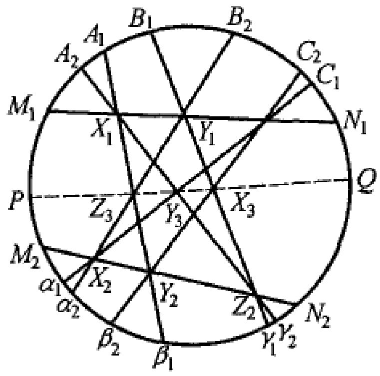


图 3

$$O(B_1\gamma_1\beta_2C_2, PQ), O(C_1\alpha_1, \gamma_2A_2, PQ), O(A_1\beta_1, \alpha_2B_2, PQ)$$

都是对合线束(§3(3)①).于是我们若将反演变换还原,即得本定理的证明了.

系 若前六个对合点列互不相同,则那一双点 P, Q 是唯一的.

(6) **定理** 在两圆 k_1 及 k_2 中,各作垂直于连心线 l 的三弦 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 及 $\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2$,命六圆 $B_1B_2\gamma_1\gamma_2, \beta_1\beta_2C_1C_2, C_1C_2\alpha_1\alpha_2, \gamma_1\gamma_2A_1A_2, A_1A_2\beta_1\beta_2, \alpha_1\alpha_2B_1B_2$ 为 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.则必有一圆 k_3(实、虚或零)同时和 a_1 与 a_2, b_1 与 b_2, c_1 与 c_2 共轴,并且 k_3 的圆心亦在 l 上(图 4).

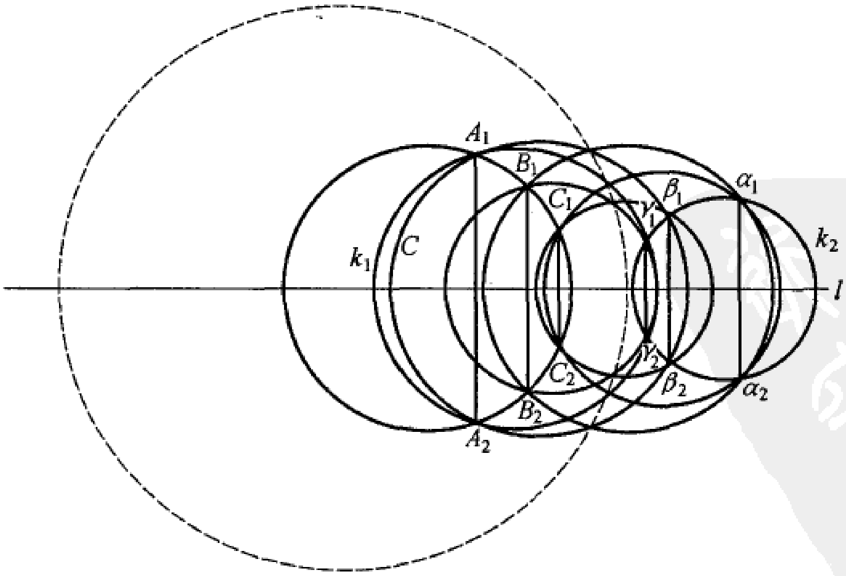


图 4

证明　l 截六圆 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 得六双点成一点列，若命 l 截 k_1 及 k_2 于 M_1,N_1 及 M_2,N_2，则此两双点必分别与该六双点组成像(5) 所述的前六个对合点列((4)②)，因此在 l 上必有一双点 P,Q(实、虚或重合)，使与该六双点分别组成像(5) 所述的后三个对合点列((5))，故以 PQ 为直径的圆必同时和 a_1 与 a_2，b_1 与 b_2，c_1 与 c_2 共轴((4)①)，这圆即是 k_3.

§4　帕波斯定理的推广

(1) 我们把直线看做是圆的一种特殊形状，因而把帕波斯定理中的九条直线看做第五类共幂圆系. 现在我们的企图，就是想把帕波斯定理推广到一般的共幂圆系中去. 经过这样的推广，帕波斯定理就变成如下的普遍形式：

定理　设八圆 $\odot A_1B_1C_1$，$\odot A_2B_2C_2$，$\odot A_3B_1C_2$，$\odot A_3B_2C_1$，$\odot A_2B_3C_1$，$\odot A_1B_3C_2$，$\odot A_1B_2C_3$，$\odot A_2B_1C_3$ 同属一共幂圆系，则 $\odot A_3B_3C_3$ 亦必属于此共幂圆系中.

证明　若这个共幂圆系是第五类，则此定理即是帕波斯定理的本身，毋庸再证了.

倘这个共幂圆系是第四类，我们可以把它反演变为第五类(§2(3))，在第五类中既已为真，则只需将反演变换还原即可证明.

如果这个共幂圆系是第三类，这时实在和 §3(6) 的定理一样，只要稍稍思索一下便会知道的.

假设这个共幂圆系是第一类，可将它反演为第三类(§2(3))，在第三类中既已证明，故在第一类中为真亦不成问题.

至于这个共幂圆系若是第二类，我们本可应用"连续原理"来说明它. 但欲使证明具体些，我们可以这样来设计：八个圆既同属于一个共幂圆系，则其中各两圆或三圆有一个公共点的，亦必有第二个公共点. 命这些第二个公共点为 $A'_1,A'_2,A'_3,B'_1,B'_2,B'_3,C'_1,C'_2,C'_3$，使顺次与 $A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3,C_1,C_2,C_3$ 相对应，于是 $A_1A'_1,A_2A'_2\cdots$ 同交于这个共幂圆系的等幂心 P. 今不过 P 作一直线 l 与八圆相交得八双点. 必组成如 §3(5) 中定理所述的前六个对合点列(§3(4)②) 且互不相同，但

$$\overline{PA_3}\cdot\overline{PA'_3}=\overline{PB_3}\cdot\overline{PB'_3}=\overline{PC_3}\cdot\overline{PC'_3}=k$$

故 $B_3B'_3C_3C'_3$，$C_3C'_3A_3A'_3$，$A_3A'_3B_3B'_3$ 各内接于圆，若这三个圆不相同，则将交 l 于三对点，每对点均与前八对点中的六对组成如 §3(5) 中定理所述的后三个对合点列（§3(4)②；§3(5)）. 这显然和 §3(5) 中系相悖，所以这三个圆非相合为一不可. 由此可知 $\odot A_3B_3C_3$ 属于这个共幂圆系无疑.

至此，这个普遍定理便完全证明了.

(2) 上款的定理，我们还可以用下面的另外两种方式来表述它，采取这种方式有一个好处，就是使我们在构图上有一条路径可以遵循.

① **定理** 设于两圆 k_1 及 k_2 上，各任取三点 A_1, B_1, C_1 及 A_2, B_2, C_2，通过 B_1 与 C_2，B_2 与 C_1，C_1 与 A_2，C_2 与 A_1，A_1 与 B_2，A_2 与 B_1 作六圆 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$，使此六圆与 k_1, k_2 同属一共幂圆系；则必有一圆 k_3（实、虚或零）同时和 a_1 与 a_2、b_1 与 b_2，c_1 与 a_2 共轴，并且 k_3 亦属于这个共幂圆系中.

② **定理** 设自两圆 k_1 及 k_2 的等幂轴上任一点各作三直线交该两圆于 A_1 与 A_2，B_1 与 B_2，C_1 与 C_2 及 α_1 与 α_2，β_1 与 β_2，γ_1 与 γ_2；命六圆 $B_1B_2\gamma_1\gamma_2$，$\beta_1\beta_2C_1C_2$，$C_1C_2\alpha_1\alpha_2$，$\gamma_1\gamma_2A_1A_2$，$A_1A_2\beta_1\beta_2$，$\alpha_1\alpha_2B_1B_2$ 为 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$，则必有一圆 k_3（实、虚或零）同时和 a_1 与 a_2，b_1 与 b_2，c_1 与 c_2 共轴，并且这样的九个圆同属一个共幂圆系.

(3) 设将(1) 定理中的圆射影变成锥线，则该定理就要变为：

定理 设有九个锥线分别通过以下九组的点

$$A_1B_1C_1,\quad A_2B_2C_2,\quad A_3B_3C_3$$
$$A_1B_2C_3,\quad A_2B_3C_1,\quad A_3B_1C_2$$
$$A_1B_3C_2,\quad A_2B_1C_3,\quad A_3B_2C_1$$

且同通过另一定锥线 s 上的两定点 P, Q（实、虚或重合）；则这九个锥线各与 s 的另两交点（实、虚或重合）的连线，共九线，若有八线同通过一点 O，那么第九线亦必通过这点 O.

证明 设将 P, Q 射影为两无穷远虚圆点，则各个锥线都被射影变成圆. 此时 O' 对于 s' 及其中八圆显然有等幂，故为共幂圆系（§2(2)）：因此，第九圆亦属于这个共幂圆系中（§(1)），于是第九圆与 s' 的等幂轴必通过点 O'，这就表明在原图形中亦为真.

(4) 下定理是汤故教授运用(一,二) 射影的方法而得到的：

定理* 今有九个锥线分别通过以下九组的点

$$A_1B_1C_1,\quad A_2B_2C_2,\quad A_3B_3C_3$$
$$A_1B_2C_3,\quad A_2B_3C_1,\quad A_3B_1C_2$$

$$A_1B_3C_2,\quad A_2B_1C_3,\quad A_3B_2C_1$$

设其中八个锥线各与另两个锥线 s_1,s_2 的 $(6\times 8)\times 2$ 条公弦[①]中各有一弦凡 16 线同遇于 s_1 与 s_2 的一公弦上的一点，且第九个锥线与 s_1 的公弦中有一弦亦通过此点，则第九个锥线与 s_2 的公弦中必有一弦通过这相同的一点.

§5　同类命题的推广的一例

(1) 上述的推广方式，对于同类的命题仍一样可以施行，只不过其间的证明或许有些少的差别罢了. 读者如有兴趣，不妨自己去找寻例子. 下面所举的例，乃系把德扎格(Desargues) 的透视三角形定理推广所得：

定理　设平面上有十点 $P_{ij}(i,j=1,2,3,4,5;i\neq j,P_{ij}=P_{ji}$，下同)，每过 P_{ij},P_{ik},P_{jk} 形式的三点作圆，共得十圆；若其中有九圆同属一共幂圆系，则第十圆亦必属于这个共幂圆系中.

(2) 如前，将上定理的圆射影变成锥线，可得：

定理　设平面上有十点 P_{ij}，每过 P_{ij},P_{ik},P_{jk} 形式的三点作锥线，共得十个锥线，且令同通过另一锥线 s 上的两定点(实、虚或重合)；则这十个锥线各与 s 的另两交点(实、虚或重合) 的连线，共十线，若有九线共点，那么第十线亦必通过此点.

(3) 下定理亦是汤故教授运用(一,二) 射影方法得到的：

定理*　今平面上有十点 P_{ij}，每过 P_{ij},P_{ik},P_{jk} 形式的三点作锥线，共得十个锥线. 设其中九个锥线各与另两个锥线 s_1,s_2 的 $(6\times 9)\times 2$ 条公弦中各有一弦凡 18 线同遇于 s_1 与 s_2 的一公弦上的一点，且第十个锥线与 s_1 的公弦中有一弦亦通过此点，则第十个锥线与 s_2 的公弦中必有一弦通过这相同的一点.

§6　帕斯卡定理的类似的推广

(1) 由于研究 §3(5) 定理的图象，连带得到一个关于对合的定理，从这个定理，竟然引出帕斯卡定理(关于圆而说) 的类似推广定理来，这本不是原来所企图的，故可以说是一个意外的收获了，今先述该关于对合的定理如下：

定理　在点列 $(A_1A_2B_1B_2C_1C_2)$ 中，恒有一对点 P,Q(实、虚或重合)，能

① 这些公弦是广义的，它与锥线的交点可为实点、虚点或重合点，下同.

使

$$(B_1C_2, B_2C_1, PQ), (C_1A_2, C_2A_1, PQ), (A_1B_2, A_2B_1, PQ)$$

都成对合.

证明　能有一对点 P, Q，使(C_1A_2, C_2A_1, PQ)及(A_1B_2, A_2B_1, PQ)都成对合，这是很容易知道的．因为设$\odot C_1A_2$与$\odot C_2A_1$，及$\odot A_1B_2$与$\odot A_2B_1$交于点 M_1, M_2 及 N_1, N_2（实、虚或重合），则这四交点显然共圆（实、虚或零）；命此圆交点列的台于点 P, Q（实、虚或重合），于是由 §3(4)② 定理即可推知了.

今设 P, Q 是如上述所得的两点，由此我们就有

$$(B_1B_2PQ) \barwedge (A_2A_1OP) \barwedge (C_1C_2PQ) \barwedge (C_2C_1QP)$$

故(B_1C_2, B_2C_1, PQ)亦成对合（§3(1)）.

系　设$(A_1A_2B_1B_2C_1C_2)$为点列，则必有一圆 k（实、虚或零）同时和$\odot B_1C_2$与$\odot B_2C_1$、$\odot C_1A_2$与$\odot C_2A_1$、$\odot A_1B_2$与$\odot A_2B_1$共轴（§3(4)①）.

(2) 在上款的系中，所作六圆可无需限于以各线段为直径，即以各线段为弦，只要令它们的圆心共线，仍然可以成立，这是很容易看得出来的（参照

§3(4)②），现在若将这个图形反演一下，那么便变成下面的定理了：

定理　设 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 为圆上的六点，过 B_1 与 C_2，B_2 与 C_1，C_1 与 A_2，C_2 与 A_1，A_1 与 B_2，A_2 与 B_1 作圆 $a_1, a_2, b, b_2, c_1, c_2$，并令这六个圆同属一共幂圆系；则必有一圆 k（实、虚或零）同时和 a_1 与 a_2，b_1 与 b_2，c_1 与 c_2 共轴，且 k 亦属于这个共幂圆系中.

这个定理显然是把帕斯卡定理中的六边形（内接于圆）的六边推广为共幂圆系的情形；当这个共幂圆系是第五类时，它便是帕斯卡定理的本身.

(3) 下面的两定理，实在都是上定理的变相，亦可以用上定理来证明它们.

① **定理**　设于两圆 k_1 及 k_2 上各任取三点 A_1, B_1, C_1 及 A_2, B_2, C_2，通过 B_1 与 C_2，B_2 与 C_1，C_1 与 A_2，C_2 与 A_1，A_1 与 B_2，A_2 与 B_1 作六圆 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 使同正交于 k_1 与 k_2 的两反相似圆[①]之一；则必有一圆 k_3（实、虚或零）同时和 a_1 与 a_2，b_1 与 b_2，c_1 与 c_2 共轴，并且 k_3 亦正交于该反相似圆.

② **定理**　设两圆 k_1, k_2 关于同一相似中心有六对反位点 A_1 与 A_2，B_1 与 B_2，C_1 与 C_2，α_1 与 α_2，β_1 与 β_2，γ_1 与 γ_2；命六圆 $B_1B_2\gamma_1\gamma_2$，$\beta_1\beta_2C_1C_2$，$C_1C_2\alpha_1\alpha_2$，$\gamma_1\gamma_2A_1A_2$，$A_1A_2\beta_1\beta_2$，$\alpha_1\alpha_2B_1B_2$ 为 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$，则必有一圆

① 设两圆关于另一圆互为反演圆时，则称后者为前两者的反相似圆．两圆可有两个反相似圆，它们的圆心即是原两圆的外相似心和内相似心.

k_3(实、虚或零)同时和 a_1 与 a_2, b_1 与 b_2, c_1 与 c_2 共轴,并且 k_3 与该六个圆同属一个共幂圆系.

这两个定理和 §4(2) 的两个定理很是类似,现在试各取它们的 ① 定理来观察一下:在 §4(2) 中,九个圆同属一共幂圆系,而它的等幂圆可为前二圆的任一个公共正交圆;在(3) 中,只后七个圆同属一共幂圆系,但它的等幂圆限为前二圆的两反相似圆之一.在任何一种中,当前二圆重合为一时,该等幂圆都趋为二重合圆的正交圆(无穷多个位置),在此二者便趋于统一了.但我们又可看出,这时等幂圆与重合圆正交一条件,已不是必要的,若除去这条件,那就成为(2) 的定理.似此相映成趣,其微妙的关联实在耐人寻味不置.

(4) 设将(2) 定理中的圆射影变成锥线,那么就得:

定理　$u^2(A_1A_2B_1B_2C_1C_2PQ)$ 为二次点列,现在有六个锥线分别通过以下六组点

$$B_1C_2PQ,\quad B_2C_1PQ,\quad C_1A_2PQ$$
$$C_2A_1PQ,\quad A_1B_2PQ,\quad A_2B_1PQ$$

设 s 为过 P, Q 的另一个锥线,并且上面的六个锥线各与 s 的他两交点(实、虚或重合)的连线凡六线共一点 O;则第一与第二,第三与第四,第五与第六个锥线的交点(实、虚或重合)及 P, Q 共八点同在一锥线 k 上,而 k 与 s 的另两交点(实、虚或重合)的连线亦必通过该点 O.

§7　余　论

(1) 在上面我们已看到帕波斯、德扎格、帕斯卡定理在初等几何中的推广情形.这种推广方式对于凡只论及直线或圆的位置关系而不涉及其他计量性质的命题都可适用.例如关于圆的布里昂雄(Brianchon) 定理"圆外切六边形的三对对顶的连线共点",可以推广为:

① **定理**　设六圆 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 同属一共幂圆系且有一公切圆,命同时和 a_1 与 a_2, a_4 与 a_5 共轴的圆为 k_1,同时和 a_2 与 a_3, a_5 与 a_6 共轴的圆为 k_2,同时和 a_3 与 a_4, a_6 与 a_1 共轴的圆为 k_3;则三圆 k_1, k_2, k_3 共轴,而且也属于该共幂圆系中.

又如由勒穆瓦纳(Lemoine) 定理"自三角形各顶所引外接圆的切线各与对边的交点共线",可推得:

② **定理**　设 A, B, C 为圆 u 上的三点,过 B 与 C, C 与 A, A 与 B 作圆 $a, b,$

c,又作与 b,c 共轴而与 u 相切于 A 的圆 a',与 c,a 共轴而与 u 相切于 B 的圆 b',与 a,b 共轴而与 u 相切于 C 的圆 c',则有一圆 k(实、虚或零)同时和 a 与 a',b 与 b',c 与 c' 共轴.

再如由热尔岗(Gergonne)定理"自三角形各顶引过某切圆(内切圆或旁切圆)与对边的切点的直线必共点",可以得到:

③ **定理** 设三圆 a,b,c 同切某圆于 A,B,C 三点,过 A 作一圆 a' 使与 b,c 共轴,过 B 作一圆 b' 使与 c,a 共轴,过 C 作一圆 c' 使与 a,b 共轴,则三圆 a',b',c' 必共轴.

诸如此类,不一而足.

在射影几何中,大家都知道有所谓"对偶原理".上面一些定理,事实上还可以推广到射影几何方面去,于是由所推得的定理又可产生对偶定理.犹如§4(3),§4(4),§5(2),§5(3),§6(4)各定理都是还有它们的对偶定理而未写出的.所有这些,读者有兴时不妨自己去演述一下,这里不多赘述了.

作者发表的相关文章目录

1. 梁绍鸿，塞氏点及梅氏截线性质一束．武汉数学通讯，1951，2(1)：3-5.
2. 由塞氏点及梅氏截线性质所得的推论．武汉数学通讯，1951，2(2)：1-5.
3. 西姆森线之推广．武汉数学通讯，1951，2(4)：3-4.
4. 作图题一则．武汉数学通讯，1951，3(2)：6-7.
5. 东北教育部编译[平面几何]中的三个作图题．数学通报，1953(1-2)：29-38.
6. 一个三角形定理的另外证法．数学通讯，1953(11)：19-20.
7. 略谈轨迹问题．数学通报，1954(4)：11-16.
8. 略谈轨迹问题(续)．数学通报，1954(5)：16-21.
9. 初中平面几何课本中两个作图题的讨论．数学通报，1954(7)：28-31.
10. 三角形内容极大正方形问题．数学通报，1954(11)：24-29.
11. 三角形顶点到对边相等线段共点的作图题．数学通讯，1954(3)：12-14.
12. 三角形等心的宝藏．数学通报，1955(1)：33-38.
13. 三角形等心的宝藏(续)．数学通报，1955(2)：16-23.
14. 柏普斯定理的推广．数学通报，1955(7)：21-28.
15. 十字四边形的性质．数学通讯，1955(7)：4-13.
16. 黄金分割法的推演．数学通讯，1956(11)：12-15.
17. 轨迹与轨迹命题．数学通报，1957(4)：30-37.
18. 海岛算经第七题所设数字订正．数学通讯，1957(5)：12-13.
19. 海岛算经第七题的另一种看法．数学通讯，1957(10)：19.
20. 谈谈作图题．数学通报，1963(4)：16-23.
21. 关于平行线的定义．数学教学研究，1984(1)：4-9.(梁绍鸿，关于平行线的定义和公理 // 赵慈庚．初等数学研究．北京：北京师范大学出版社，1990：209-222).
22. 几何证明失检的例题 // 赵慈庚．初等数学研究．北京：北京师范大学出版社，1990：232-246.

编后记

世界真奇妙，许多事都以人们意想不到的方式发生着联系.有朋自远方来，一位多年同窗张捷突然从美国回来，此兄光环甚多，学生时代曾任中国科学技术大学学生会主席，安徽省学联主席，中华全国学联副主席，后去MIT读博士，继而自己创业，成为身价数千万美元的成功人士.欢迎宴会上张捷谈起当年学生时代的学习经历，他特别提到1979年大年三十的夜晚，与笔者在教室演算平面几何习题的难忘经历.那是一本什么样的几何书有如此大的吸引力呢？巧的是就是这本梁绍鸿先生的《初等数学复习与研究(平面几何)》.

这本书出版的"幕后"推动者是青年平面几何大师，上海教育出版社的叶中豪先生，我与小叶相识于1993年，当时我刚入道(进入出版业)，而小叶已在此行中小有名气，经湖北教育出版社的编辑任争健女士介绍与小叶相识.小叶是位典型的读书人，读书极广且藏书甚丰，曾被评为上海十大藏书家.笔者有过与小叶在深秋时节提着大旅行袋，穿行于上海小巷，搜寻旧书的愉快经历，每次开会如遇必住一个房间，高谈阔论.出于好奇笔者特别转乘多次地铁、电车到辛庄小叶书房去参观，果然名不虚传，书架林立，满坑满谷，虽面积极大但也将上海人善于螺丝壳里做道场的功力发挥到极致，书架内竟然排三、四行.另外，小叶的藏书结构与我有交集，即都有大量数学书，但奇怪的是他还藏有极多的《红楼梦》研究之书，颇难理解.

小叶对梁书推崇备至,多次与我提及,遂产生重印之念,小叶为我提供了梁先生之长女的电话,几经周折终于谈成了此事,所以此书能够出版,小叶功不可没.

不仅如此,小叶还不遗余力地收集了梁先生的遗作,将其复印后寄来,并在我的请求之下,为本书撰写了长篇序言.小叶算是惜墨如金之人,很少动笔,不像笔者好长篇大论,热衷"著作等身".此次作序恐是小叶的第一次,何以如此呢？关于《红楼梦》,各行人等看出的味道不一样,革命家看到剥削,道学家看到淫乱,生活家看到奢华,艺术家看到缠绵,而数学家则感到磨叽.数学家认为其实抽象出来,《红楼梦》就三个字"我爱你".就此问题我特别请教了数学圈内的《红楼梦》专家小叶.他的回答更简洁,说《红楼梦》通篇讲的就一个字——情(奇怪竟与赵本山小品暗合),而小叶我们都感觉到他是几何学中的性情中人,甚至可以说是"几何痴",在现今这个大多数人对什么都有点热情却又都缺少真情和深情的时代,小叶作为一个另类自有其独特的价值.几何之于小叶恰似大猩猩之于珍妮,写序当然是义不容辞.

对于本书的书名我与小叶也商量多次,古人云:名不正则言不顺.商业社会一个好书名当然能吸引眼球.但最后我们还是决定用原书名一字不改,一是尊重历史,二是让那些念旧的中年人忆起当年(火红的20世纪50年代和黄金的20世纪80年代),勾起他们重温此书之欲望.其实本书名最早是傅种孙先生起的,傅种孙先生是我国数学教育界元老级人物.1928年即为北师大数学系主任,是闵嗣鹤的老师,据北师大数学系1949届毕业生袁兆鼎先生回忆说:广西百色小学教师梁绍鸿,初中毕业后自学并研究几何多年,很有成就,傅先生知道后请他来师大数学系任教,同时学习高等数学,对他进行培养,当时有人请教傅先生几何难题,傅先生总是请梁绍鸿作答,傅先生看过之后回信.(傅种孙著《数学教育文选》,人民教育出版社,365页.)

傅先生初等数学极强,据早年北师大文书科长回忆,傅先生曾对其夸口:"高等数学研究,吾犹人也.若夫初等数学研究,敢谓全国无出某之右者".傅种孙从毕业生的来信中,察觉他们不能用高等数学统摄初等数学,便于1928年在数学系三年级开设了"初等数学研究"来弥补这点遗憾.1947年11月他结束了两年的在牛津、剑桥两所大学的访问,回国重新担任师大数学系主任,他决心按其理想,办一个典型的师范性数学系.希望教师不仅要向高深研究,还要重视初等数学.首先把其已经营20余年的"初等数学研究"课改为"初等数学复习及研

究”，纳入课程计划，这便是这本现在看来稍嫌平庸的书名来历.

本书出版的另一位需要感谢之人为赵慈庚先生，虽然赵先生已于1999年2月4日逝世，但他作为原书的校者做了大量工作.赵先生终身致力于我国大学师范教育的建设、改革和教学工作.20世纪50~70年代北京市历次数学竞赛从赛前辅导、竞赛命题到试卷分析，总结评奖他都亲自参加，这些活动为国家吸引和发掘了许多优秀数学人才.

十年动乱结束后，赵慈庚以近70高龄奋力工作，与蒋铎合译了卢丁(Walter Rudin)的《数学分析原理》，与江泽涵共同主编了《大学数学自学丛书》，赵老在其70年的数学生涯中为国家培养了大批人才，本书的出版也算是对赵老的怀念.在这一版中，编辑对一些老名词按现在的提法进行了重新校订，特此说明.

在毕达哥拉斯(Pyhagoras)之前，有学问的人都叫做Sophoi是智者的意思，毕达哥拉斯不肯自称为“智者”，而采用了一个新名称Philosophie，希腊文Philo，即喜爱，Sophos是智慧，合起来即“喜爱智慧的人”，Philosophy后来便成为哲学的名称.哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室致力于为爱数学的人提供精神食粮，所以也是一群Philo族，愿本书在Philo几何族中流行.这本书作为刘培杰数学工作室第34号产品，希望能向广大数学爱好者昭示：彰显科学，普及数学，我们正在路上.

刘培杰

2008年6月26日

PDG